

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2001

Prova Modelo

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A Prova é constituída por dois Grupos, I e II.

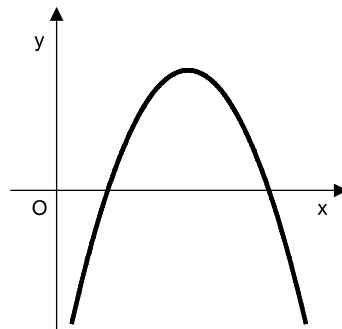
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de doze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões do primeiro grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está representada parte de uma parábola, que é o gráfico de uma certa função g , de domínio \mathbb{R} .



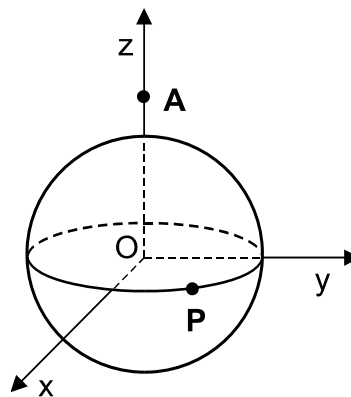
Seja h a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $h(x) = g(x) \cdot (x + 3)^2$.
Qual pode ser o conjunto dos zeros da função h ?

- (A) $\{2, 3, 4\}$ (B) $\{-3, 1, 4\}$
(C) $\{-3, 2, 3, 5\}$ (D) $\{-1, 5, 9\}$
2. Indique o valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$
- (A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A , de coordenadas $(0, 0, 4)$
- a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

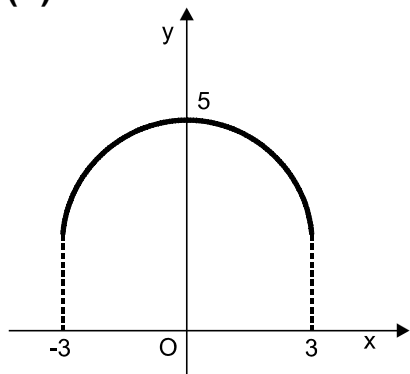
Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.



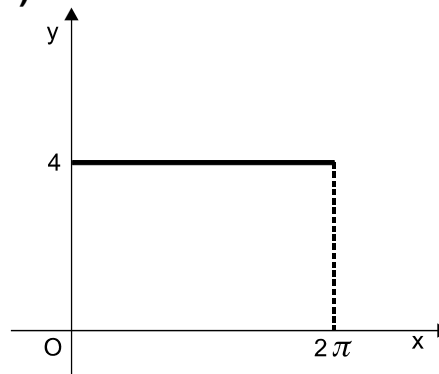
Considere a função f que faz corresponder, à **abscissa** do ponto P , a **distância** de P a A .

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

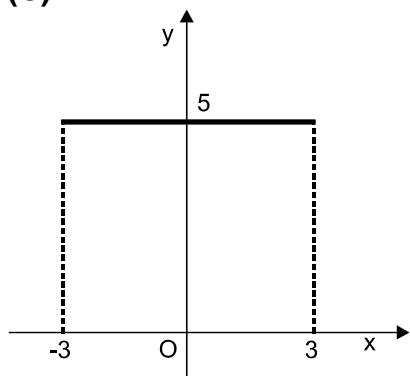
(A)



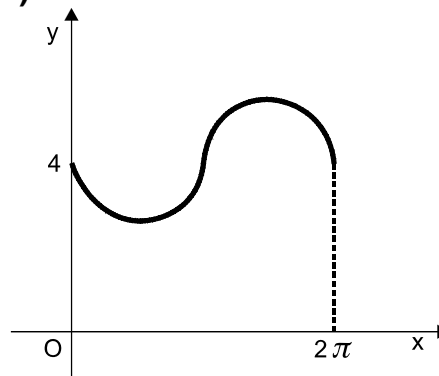
(B)



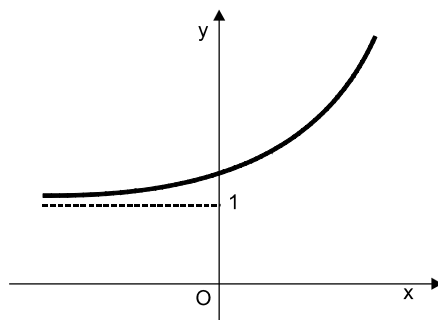
(C)



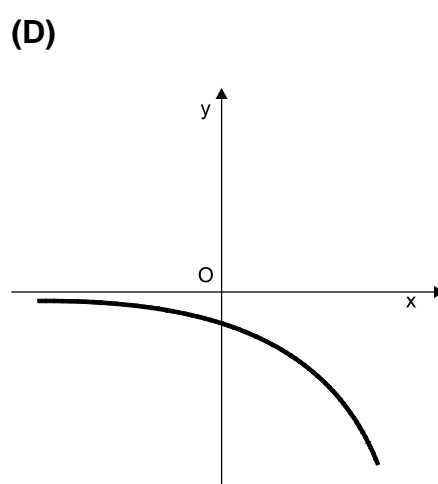
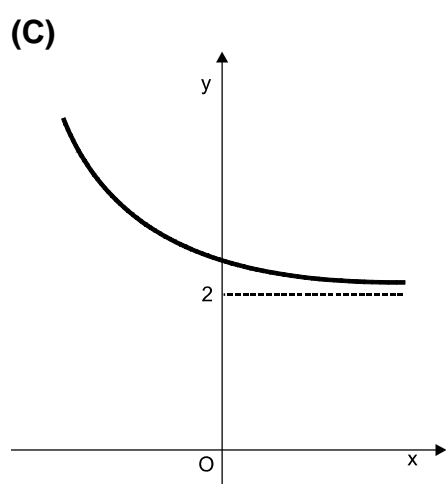
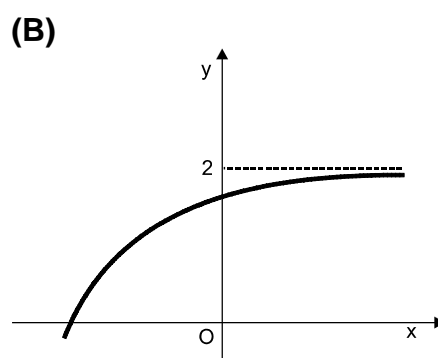
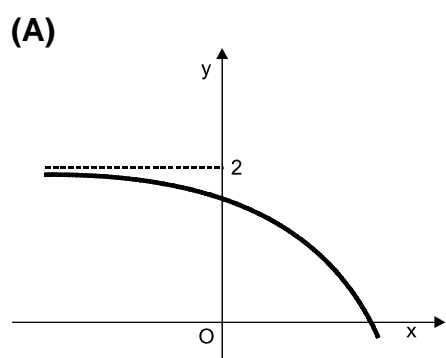
(D)



4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g , de domínio \mathbb{R} .



Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h , definida em \mathbb{R} por $h(x) = -g(x) + 1$?



5. Admita que, numa certa escola, a variável «altura das alunas do 12.º ano de escolaridade» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm. Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

- (A) A sua altura é superior a 180 cm. (B) A sua altura é inferior a 180 cm.
(C) A sua altura é superior a 155 cm. (D) A sua altura é inferior a 155 cm.

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S , nenhum deles impossível, nem certo.

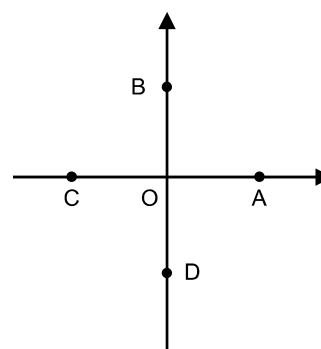
Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade, e \bar{A} e \bar{B} designam os acontecimentos contrários de A e de B , respectivamente).

- (A) $P(A) > P(B)$ (B) $P(A \cap B) = 0$
(C) $P(A \cup B) = 1$ (D) $P(\bar{A}) \geq P(\bar{B})$

7. Seja $z = yi$, com $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, um número complexo (i designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A , B , C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4 ?



- (A) O ponto A (B) O ponto B
(C) O ponto C (D) O ponto D

Grupo II

Nas questões do segundo grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um *stand* de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis nesse *stand*, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

1.1.1. A Marina, empregada do *stand*, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.

Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

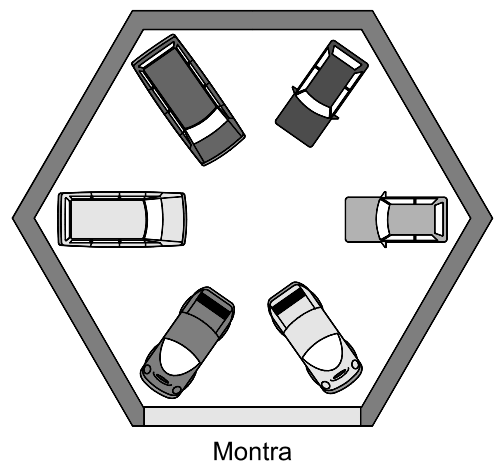
1.1.2. Alguém informou depois a Marina de que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.

Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. O *stand*, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis **diferentes** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.



2. Em \mathbb{C} , conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 7 + 24i \quad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

2.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1 . Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

2.2. Seja $z_2 = cis \alpha$ com $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{4}, \pi \right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

3. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\text{sen } x}{2x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função h quanto à continuidade no ponto 0.

(Deve indicar, justificando, se a função h é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

3.1.2. Considere a função j , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $j(x) = \frac{1}{3x}$

Mostre que, no intervalo $[-1, 1000\pi]$, os gráficos de j e de h se intersectam em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \frac{x + 3 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\ln(e^x + 4)}$

4.1. Sabe-se que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e que o seu valor é um número inteiro. Recorrendo à sua calculadora, conjecture-o. Explique como procedeu.

4.2. Será conclusivo, para a determinação do valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora? Justifique a sua resposta.

5. Malmequeres de Baixo é uma povoação com **cinco mil** habitantes.

5.1. Num certo dia, ocorreu um acidente em Malmequeres de Baixo, que foi testemunhado por algumas pessoas. Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124 e^{-0,3t}}, \quad t \geq 0$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assíntotas do seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

5.2. Alguns dias depois, ocorreu outro acidente no mesmo local, testemunhado pelas mesmas pessoas. No entanto, neste segundo acidente, a notícia propagou-se mais depressa, no sentido em que, decorrido o mesmo tempo após o acidente, mais pessoas sabiam do ocorrido. Admita que, t horas depois deste segundo acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$$g(t) = \frac{5}{1 + a e^{-bt}}, \quad t \geq 0 \quad (\text{para certos valores de } a \text{ e } b).$$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que pode garantir sobre os valores de a e de b , comparando cada um deles com o valor da constante correspondente da expressão analítica de f .

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 32

1.1.20

1.1.1.10

1.1.2.10

1.2.12

2. 21

2.1.10

2.2.11

3. 36

3.1.28

3.1.1.12

3.1.2.16

3.2.8

4. 16

4.1.8

4.2.8

5. 32

5.1.17

5.2.15

TOTAL200

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$