EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **Época Especial**
2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a recta de equação $y = -2x + 1$ é assimptota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

(A) $-\infty$

(B) -2

(C) 1

(D) $+\infty$

2. Seja g uma função contínua de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que:

- g tem mínimo **absoluto** igual a 3, para $x = 2$
- g tem máximo **absoluto** igual a 7, para $x = 5$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) g é crescente em $[2, 5]$

(B) O contradomínio de g é $[3, 7]$

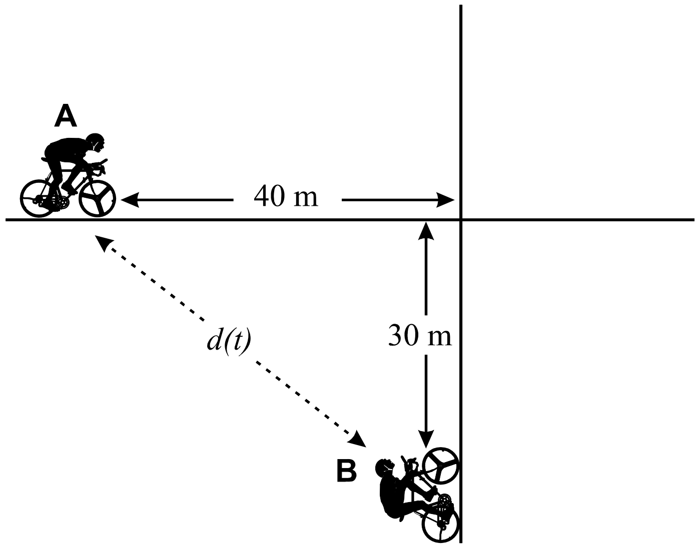
(C) g tem derivada nula em $x = 2$ e em $x = 5$

(D) g tem pelo menos um zero

3. Na figura estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente.

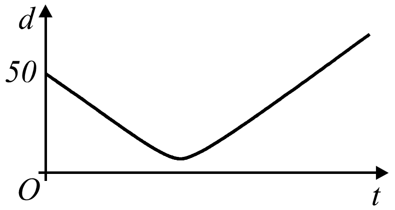
No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento.

Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.

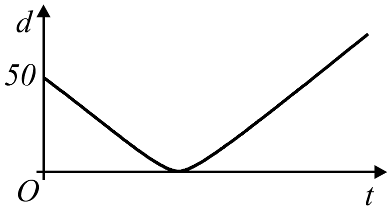


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de t, dá a distância $d(t)$ entre os dois ciclistas, no instante t ?

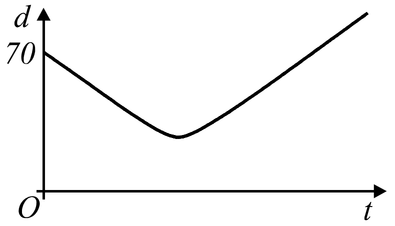
(A)



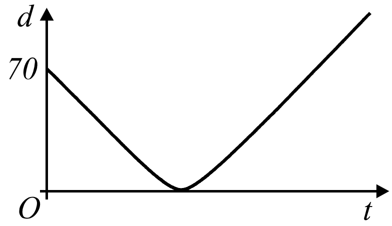
(B)



(C)



(D)



4. De uma função f sabe-se que $f(x)+f''(x)=0$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Qual das seguintes pode ser a expressão analítica da função f ?

(A) $\operatorname{sen} x$ **(B)** e^{x}

(C) x **(D)** $\ln x$

5. Nos jogos de futebol entre a equipa X e a equipa Y, a estatística revela que:
- em 20% dos jogos, a equipa X é a primeira a marcar;
- em 50% dos jogos, a equipa Y é a primeira a marcar.

Qual é a probabilidade de, num jogo entre a equipa X e a equipa Y, não se marcarem golos?

(A) 10% **(B)** 25% **(C)** 30% **(D)** 35%

6. Extrai-se, ao acaso, uma bola de uma caixa que contém vinte bolas, numeradas de 1 a 20.
Considere os acontecimentos:
A - «A bola extraída tem número par».
B - «A bola extraída tem número múltiplo de 5».

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número complexo i satisfaz uma das condições a seguir indicadas.

Qual delas?

(A) $\frac{z}{i}=z-i$ **(B)** $\frac{z}{|z|}=i$ **(C)** $arg(z)=0$ **(D)** $z^2=z$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja A o conjunto dos números complexos que satisfazem a condição

$$|z| = 1 \qquad \wedge \qquad Re(z) \geq 0$$

1.1. Mostre que o número complexo $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}\,cis\,\pi}$ pertence a A

1.2. A representação geométrica, no plano complexo, da condição

$$z \in A \quad \wedge \quad -\frac{\pi}{4} \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$$

é uma linha.

Represente graficamente essa linha e determine o seu comprimento.

2. Seja B o conjunto dos números de quatro algarismos **diferentes**, menores que 3000, que se podem formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

2.1. Verifique que o conjunto B tem 240 elementos.

2.2. Escolhe-se, ao acaso, um elemento de B.
Qual é a probabilidade de que esse elemento seja um número par? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.3. Escolhem-se, ao acaso, três elementos de B.
Qual é a probabilidade de todos eles serem maiores do que 2000? Apresente o resultado na forma de dízima, com duas casas decimais.

3. Considere a função f, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$f(x) = 2\,x \,-\, \operatorname{tg} x$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

3.1. Estude f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

3.2. Estude f quanto à monotonia e existência de extremos relativos.

4. Uma pastilha elástica é tanto mais saborosa quanto maior for a quantidade de aromatizante nela presente.
Admita que a quantidade de aromatizante presente numa pastilha elástica da marca *MastiBom*, t minutos após ter sido colocada na boca, é dada, em certa unidade de medida, por

$$A(t) = 5\,e^{-0{,}1\,t} \;,\; t \in [0, +\infty[$$

4.1. Utilizando métodos analíticos e recorrendo à calculadora para efectuar cálculos numéricos, determine ao fim de quanto tempo, após ter sido colocada na boca, a quantidade de aromatizante presente numa pastilha *MastiBom* se reduz a metade.
Apresente o resultado em minutos, arredondado às unidades.

4.2. Suponha que é o responsável pelo laboratório da empresa produtora das pastilhas *MastiBom*.
Admita que a concorrência acabou de lançar no mercado três tipos de pastilhas e que a gerência da sua empresa o encarregou de analisar essas pastilhas, para ver se algumas delas poderiam colocar em risco a posição de líder de mercado das pastilhas *MastiBom*.
Da análise que efectuou, concluiu que a quantidade de aromatizante presente em cada uma delas, t minutos após ter sido colocada na boca, é dada por:

Pastilha X: $B_1(t) = 4\;e^{-0{,}15\,t} \;,\; t \in [0, +\infty[$

Pastilha Y: $B_2(t) = 7\;e^{-0{,}2\,t} \;,\; t \in [0, +\infty[$

Pastilha Z: $B_3(t) = 6\;e^{-0{,}1\,t} \;,\; t \in [0, +\infty[$

Recorrendo à sua calculadora, compare, **no intervalo $[0, 15]$**, cada uma destas três funções com a função A, definida acima (admita que, ao fim de quinze minutos, a quantidade de aromatizante presente em cada uma das pastilhas já não lhes dá sabor).

Elabore um relatório, com cerca de dez linhas, que possa ser apresentado à gerência da sua empresa, em que mencione, para cada uma das pastilhas concorrentes, durante quanto tempo é que, nos primeiros quinze minutos, ela é mais saborosa do que a *MastiBom* (Sempre? Nunca? A partir de um certo instante? Qual? Até um determinado instante? Qual?).
Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & se\ \ x \neq 0 \\ 1, & se\ \ x = 0 \end{cases}$$

5.1. Justifique que g não é contínua no ponto 0.

5.2. Mostre que é falsa a seguinte afirmação:
«Qualquer que seja a função h, de domínio $\mathbb{R}$, a função $h+g$ não é contínua no ponto 0.»

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
  1.1. 11
  1.2. 10

2. 32
  2.1. 10
  2.2. 11
  2.3. 11

3. 29
  3.1. 13
  3.2. 16

4. 30
  4.1. 14
  4.2. 16

5. 25
  5.1. 10
  5.2. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $(r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)\,.\,(\rho'\, cis\, \theta') = \rho\, \rho'\, cis\, (\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$