EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos | **Época Especial**
2002 | **Outubro**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 9 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

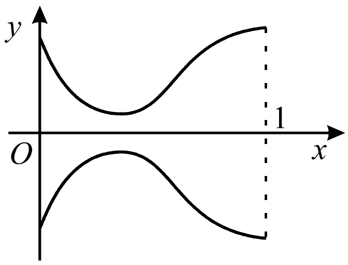
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De duas funções f e g, de domínio $[0,1]$, sabe-se que

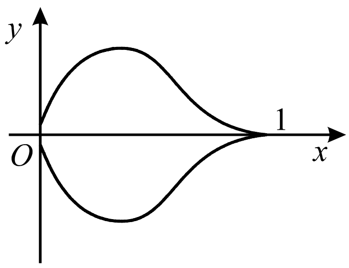
$$f'(x) = g'(x) \ , \ \forall x \in [0,1]$$

Em qual das figuras seguintes podem estar representados os gráficos de f e de g?

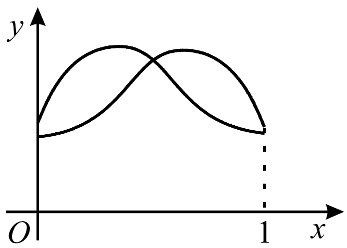
(A)



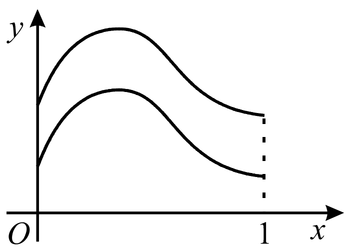
(B)



(C)

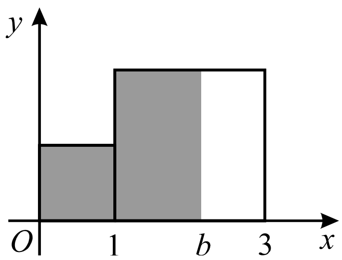


(D)



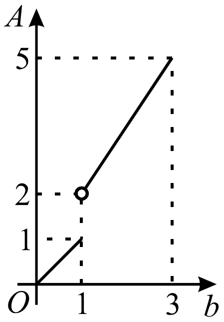
2. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy, dois quadrados.

Considere, para cada valor de $b \in [0,3]$, a área $A(b)$ da região sombreada (região interior à figura formada pelos dois quadrados e compreendida entre o eixo das ordenadas e a recta de equação $x = b$)

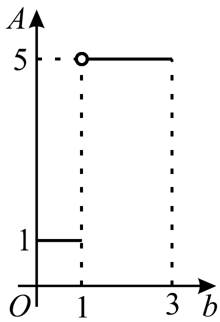


Qual dos gráficos seguintes é o da função A?

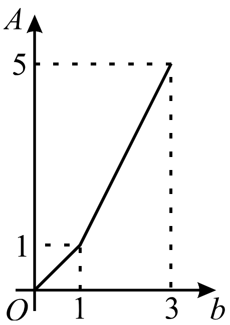
(A)



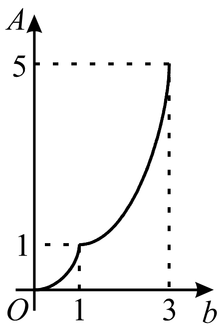
(B)



(C)



(D)

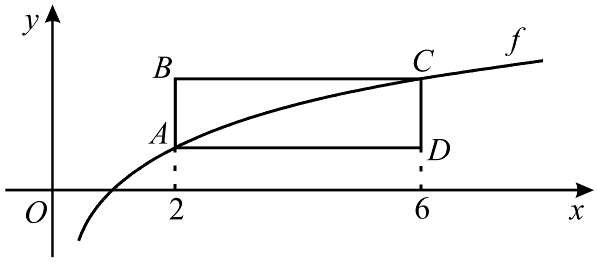


3. Seja h a função, de domínio $[-3\,,\,2]$, definida por $h(x) = x^2 + 1$

Qual é o contradomínio de h?

(A) $[-8, 5]$ **(B)** $[5, 10]$ **(C)** $[0, 5]$ **(D)** $[1, 10]$

4. Na figura está parte da representação gráfica da função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \ln x$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).



Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função f, são vértices de um rectângulo $[ABCD]$, de lados paralelos aos eixos do referencial.
As abcissas de A e de C são 2 e 6, respectivamente.

Qual é a área do rectângulo $[ABCD]$?

(A) $\ln 64$ **(B)** $\ln 72$ **(C)** $\ln 81$ **(D)** $\ln 93$

5. Uma certa variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	a	b

Qual é a média desta variável aleatória?

(A) $a + b$ **(B)** $\frac{a+b}{2}$ **(C)** $a + 2b$ **(D)** $2a + b$

6. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma certa experiência aleatória.

Sabe-se que A e B são independentes, que $P(A) = 0{,}2$ e $P(B) = 0{,}5$.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}5$ **(D)** $0{,}7$

7. Qual das condições a seguir indicadas define, no plano complexo, uma recta paralela à semi-recta definida por $arg(z) = \frac{\pi}{4}$?

(A) $Re(z) = \frac{\pi}{4}$ **(B)** $Im(z) = \frac{3\pi}{4}$

(C) $|z| = |z - 1 + i|$ **(D)** $|z + 1| = |z - i|$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1 = \sqrt{2}\, cis\, \frac{3\pi}{4} \qquad \text{e} \qquad z_2 = 2 + 3i$$

1.1. Determine, na forma algébrica, $z_1 + z_2^2$

1.2. Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^3 = z_1^2$

Apresente as soluções na forma trigonométrica.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

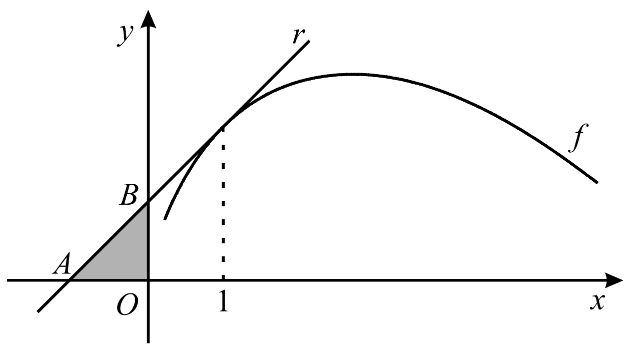
$$f(x) = 2x - x \ln x \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três alíneas seguintes:

2.1. Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

2.2. Estude f quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

2.3. Na figura está, em referencial o. n. xOy, parte do gráfico da função f.



A recta r, tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, intersecta o eixo Oy no ponto B e o eixo Ox no ponto A.

Determine a área do triângulo $[AOB]$.

3. A figura A representa um cubo de aresta 2.
Considere, para cada vértice, os pontos das arestas que estão à distância x $(0 < x \leq 1)$ desse vértice. Seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, obtemos o poliedro (*cubo truncado)* representado na figura B.

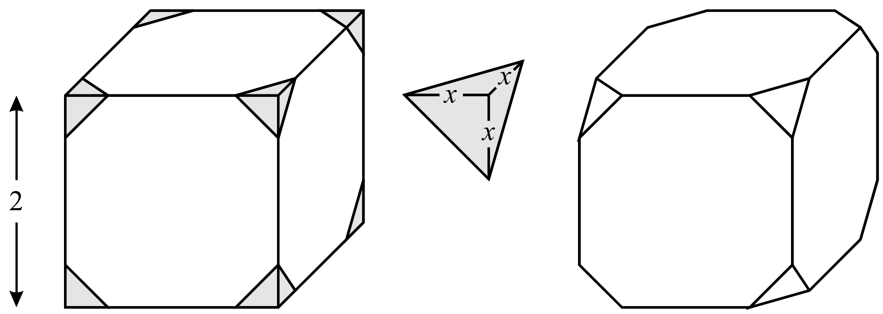


Figura A Figura B

3.1. Mostre que o volume do *cubo truncado* é dado, em função de x, por

$$V(x) = \frac{24 - 4\,x^3}{3} \qquad (\,x \in \,]0, 1]\,)$$

3.2. Determine o valor de x para o qual o volume do *cubo truncado* é mínimo. Para esse valor de x, indique, justificando, quantas arestas tem o poliedro.

4. Considere um conjunto de 4 casais.

4.1. Escolhendo ao acaso quatro dessas oito pessoas, qual é a probabilidade de serem escolhidos dois homens e duas mulheres? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.2. Escolhendo ao acaso uma pessoa de cada casal, qual é a probabilidade de serem escolhidos dois homens e duas mulheres? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Seja S um espaço de resultados, finito, associado a uma experiência aleatória.
Mostre que é falsa a seguinte afirmação:
«Quaisquer que sejam os acontecimentos A e B $(A \subset S$ e $B \subset S)$,
se $P(A) + P(B) = 1$ então $A \cup B$ é um acontecimento certo.»

6. Num certo dia de Verão, as temperaturas, em graus centigrados, fora e dentro de uma determinada habitação, são dadas, respectivamente, por:

$$f(t) = 25 + 10 \cos \frac{\pi\,(t+10)}{12} \qquad \text{e} \qquad d(t) = 21{,}5 + 3{,}5 \cos \frac{\pi\,(t+9)}{12}$$

(t designa o tempo, em horas, contado a partir das 0 horas desse dia)

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, recolha os dados que lhe permitam calcular:

- a amplitude térmica (diferença entre o valor da temperatura máxima e o valor da temperatura mínima) dentro de casa;

- a amplitude térmica fora de casa;

- o desfasamento térmico (tempo que decorre entre as ocorrências das temperaturas máximas, fora e dentro de casa).

Transcreva para a sua folha de prova os gráficos obtidos, bem como os valores encontrados.
Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que se pode concluir acerca das condições de isolamento da referida habitação (admita que uma habitação se considera bem isolada se a amplitude térmica dentro de casa for inferior à terça parte da amplitude térmica fora de casa e se o desfasamento térmico for superior a uma hora e meia).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada..	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 39
- **2.1.** 13
- **2.2.** 13
- **2.3.** 13

3. 30
- **3.1.** 14
- **3.2.** 16

4. 20
- **4.1.** 10
- **4.2.** 10

5. 12

6. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \,.\, \cos b + \text{sen}\,b \,.\, \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\; cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$