

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que:

- $f(5) = 0$
- f é uma função par

Seja g a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = f(x+3)$.

Qual dos seguintes pode ser o conjunto dos zeros de g ?

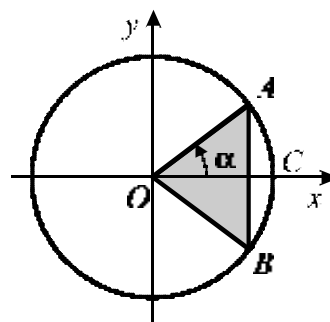
- (A) $\{0,3\}$ (B) $\{3,5\}$ (C) $\{-8,2\}$ (D) $\{2,8\}$

2. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy , o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox .

O ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox .



Seja α a amplitude do ângulo COA . $(\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[)$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α ?

- (A) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ (B) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha}{2}$
- (C) $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha$ (D) $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{2}$

3. De uma função h , de domínio \mathbb{R}^- , sabe-se que a recta de equação $y = 2$ é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{e^x}$?

- (A) $+\infty$ (B) $-\infty$ (C) 0 (D) 2

4. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cilindro de revolução.

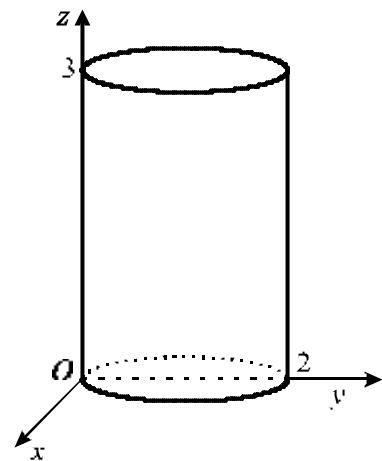
Tem-se que:

- a altura do cilindro é 3
- uma das bases está contida no plano xOy , sendo o seu centro o ponto $(0,1,0)$ e o seu raio igual a 1

Seja $b \in]0,2[$ e seja f a função que, a cada valor de b , faz corresponder o perímetro da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $y = b$.

Qual é o máximo da função f ?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12



5. Na figura estão representados os gráficos de duas distribuições normais.

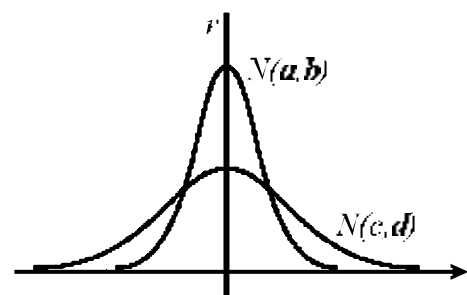
Uma das distribuições tem valor médio a e desvio padrão b .

A outra distribuição tem valor médio c e desvio padrão d .

Os gráficos são simétricos em relação à mesma recta r .

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) $a = c$ e $b > d$ (B) $a = c$ e $b < d$
 (C) $a > c$ e $b = d$ (D) $a < c$ e $b = d$



6. O João utiliza, por vezes, o autocarro para ir de casa para a escola.

Seja A o acontecimento: «O João vai de autocarro para a escola».

Seja B o acontecimento: «O João chega atrasado à escola».

Uma das igualdades abaixo indicadas traduz a seguinte afirmação: «Metade dos dias em que vai de autocarro para a escola, o João chega atrasado».

Qual é essa igualdade?

(A) $P(A \cap B) = 0,5$

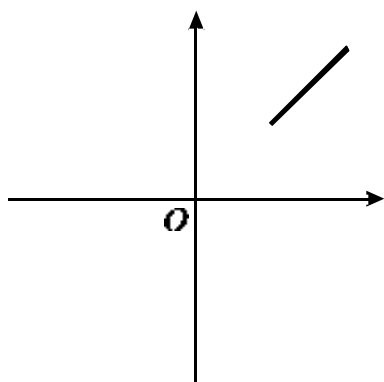
(B) $P(A \cup B) = 0,5$

(C) $P(A|B) = 0,5$

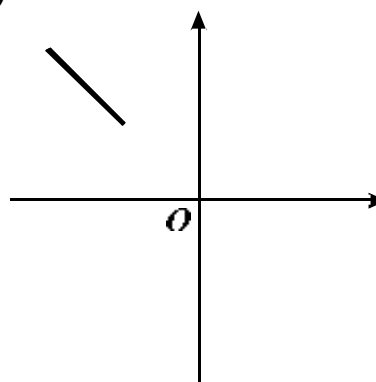
(D) $P(B|A) = 0,5$

7. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = |z - i| \wedge 2 \leq \text{Im}(z) \leq 4\}$?

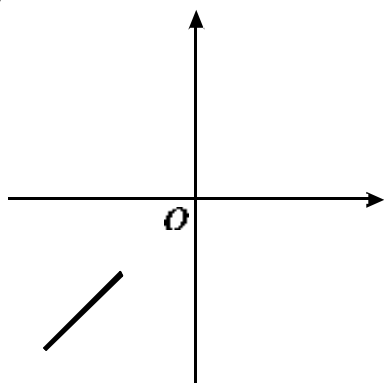
(A)



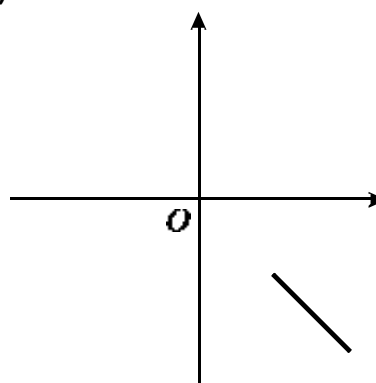
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

- um argumento de z_1 é $\frac{\pi}{3}$
- o módulo de z_2 é 4

1.1. Seja $w = \frac{-1+i}{i}$

Justifique que w é diferente de z_1 e de z_2

1.2. z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo número complexo z .

Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

2. O nível N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I , medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10 \log_{10}(10^{12} I), \quad \text{para } I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Verifique que $N = 120 + 10 \log_{10} I$

2.2. Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.

Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

- 3.** De uma função f , de domínio $[-\pi, \pi]$, sabe-se que a sua **derivada** f' está definida igualmente no intervalo $[-\pi, \pi]$ e é dada por

$$f'(x) = x + 2 \cos x$$

- 3.1.** Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Determine o valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$

- 3.1.2.** Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

- 3.2.** O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox . Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.
Explique como procedeu.

- 4.** Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.
Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.
Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

5. Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

5.1. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

5.1.1. Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

5.1.2. Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que 9800. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

5.2. Considere o seguinte problema:

«De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:

- começam por 9;*
- têm os algarismos todos diferentes;*
- a soma dos quatro algarismos é par.*

Quantos são esses números?»

Uma resposta correcta a este problema é $3 \times 4 \times {}^4A_2 + {}^4A_3$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique porquê.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I 63

| | |
|--|-----|
| Cada resposta certa | +9 |
| Cada resposta errada..... | - 3 |
| Cada questão não respondida ou anulada | 0 |

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II 137

| | |
|-----------|----|
| 1. | 21 |
| 1.1. | 10 |
| 1.2. | 11 |

| | |
|-----------|----|
| 2. | 28 |
| 2.1. | 13 |
| 2.2. | 15 |

| | |
|-------------|----|
| 3. | 41 |
| 3.1. | 26 |
| 3.1.1. | 10 |
| 3.1.2. | 16 |
| 3.2. | 15 |

| | |
|---------|----|
| 4. | 15 |
|---------|----|

| | |
|-------------|----|
| 5. | 32 |
| 5.1. | 16 |
| 5.1.1. | 8 |
| 5.1.2. | 8 |
| 5.2. | 16 |

TOTAL 200

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonalmaior \times Diagonalmenor}{2}$

Trapézio: $\frac{Basemaior + Basemenor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo: πr^2 (r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – raio)

Volumes

Prisma: $Área da base \times Altura$

Cilindro: $Área da base \times Altura$

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área da base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área da base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Trigonometria

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta) \cdot (\rho' \operatorname{cis} \theta') = \rho \rho' \operatorname{cis}(\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \operatorname{cis} \theta}{\rho' \operatorname{cis} \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \operatorname{cis}(\theta - \theta')$$

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

