EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**
2002 **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.

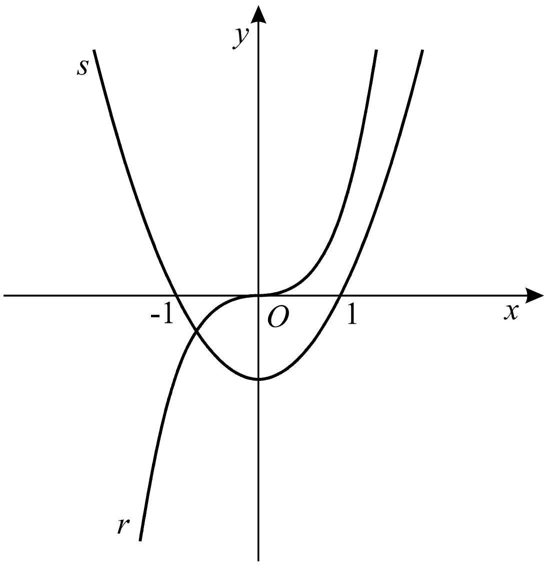
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura estão parcialmente representados os gráficos de duas funções polinomiais, r e s.



Qual dos seguintes conjuntos pode ser o domínio da função $\dfrac{r}{s}$?

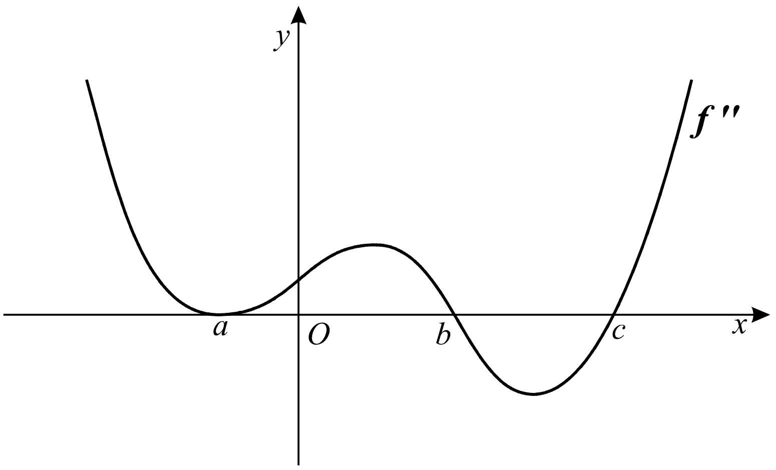
(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

(C) $\mathbb{R}\backslash\{-1,\, 1\}$

(D) $\mathbb{R}\backslash\{-1,\, 0,\, 1\}$

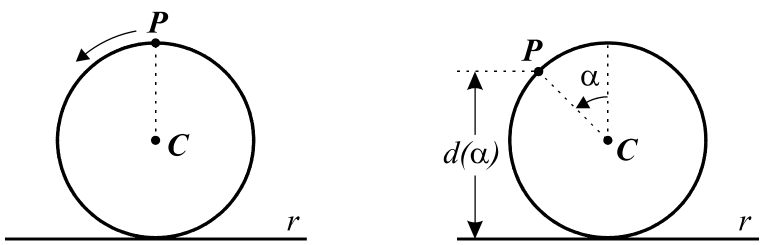
2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.
Na figura está representada parte do gráfico de $\boldsymbol{f''}$, **segunda derivada** da função f.



Relativamente ao gráfico da **função** $\boldsymbol{f}$, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O ponto de abcissa a é um ponto de inflexão.
(B) O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão.
(C) A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[0, b]$.
(D) A concavidade está sempre voltada para cima.

3. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r.
Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se à distância de 2 unidades da recta r.



Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer número real positivo α ?

(A) $d(\alpha) = 1 + \cos\alpha$

(B) $d(\alpha) = 2 + \operatorname{sen}\alpha$

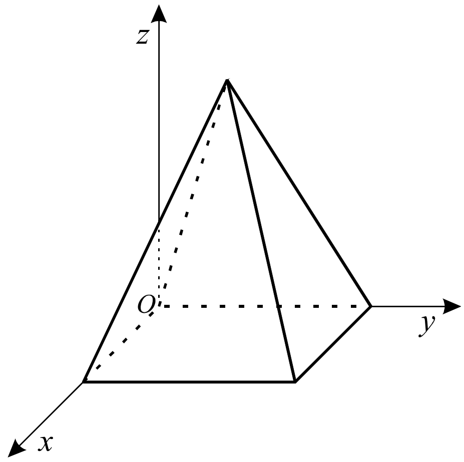
(C) $d(\alpha) = 1 - \cos\alpha$

(D) $d(\alpha) = 2 - \operatorname{sen}\alpha$

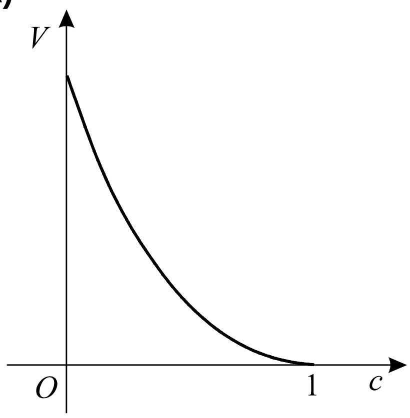
4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular, de altura 1, cuja base está contida no plano xOy.

Para cada $c \in [0, 1]$, seja $V(c)$ o volume da parte da pirâmide constituída pelos pontos cuja cota é **superior ou igual** a c.

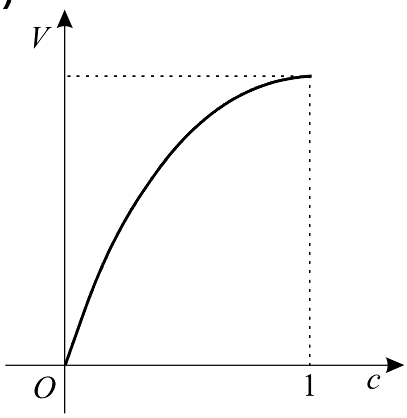
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função V ?



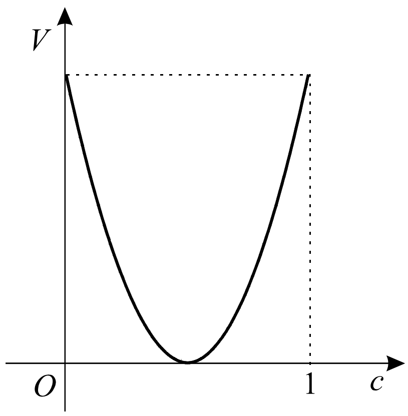
(A)



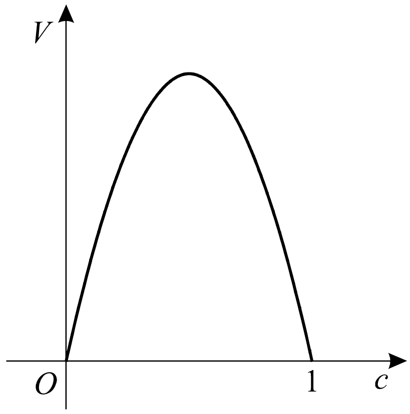
(B)



(C)



(D)



5. Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, seis livros, dois dos quais são de Astronomia.
De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os dois primeiros livros, do lado esquerdo, sejam os de Astronomia?

(A) 24 **(B)** 36 **(C)** 48 **(D)** 60

6. Na figura A está representado um dado equilibrado, cuja planificação se apresenta esquematizada na figura B.

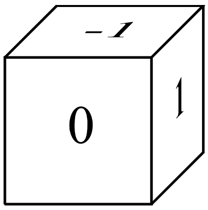


Figura A

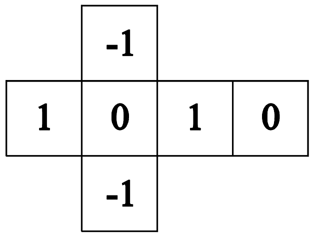


Figura B

Lança-se este dado duas vezes.
Considere as seguintes variáveis aleatórias, associadas a esta experiência:

X_1 : número saído no primeiro lançamento.
X_2 : quadrado do número saído no segundo lançamento.
X_3 : soma dos números saídos nos dois lançamentos.
X_4 : produto dos números saídos nos dois lançamentos.

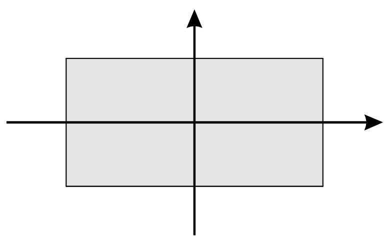
Uma destas quatro variáveis tem a seguinte distribuição de probabilidades:

Valores da variável	-1	0	1
Probabilidades	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

Qual delas?

(A) X_1 **(B)** X_2 **(C)** X_3 **(D)** X_4

7. Na figura está representado um rectângulo, de comprimento 4 e largura 2, centrado na origem do plano complexo.



Seja z um número complexo qualquer, cuja imagem geométrica está situada no interior do rectângulo.

Qual dos seguintes números complexos tem também, necessariamente, a sua imagem geométrica no interior do rectângulo?

(A) z^{-1} **(B)** $\overline{z}$ **(C)** z^2 **(D)** $2\,z$

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$z_1 = 1 + i$ (i designa a unidade imaginária).

1.1. Determine os números reais b e c para os quais z_1 é raiz do polinómio $x^2 + b\,x + c$.

1.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$.

Calcule o valor de α, pertencente ao intervalo $[0, 2\pi]$, para o qual $z_1 \times \overline{z_2}$ é um número real negativo ($\overline{z_2}$ designa o conjugado de z_2).

2. Considere as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \frac{1}{3} + 2\,e^{1-x} \qquad g(x) = 2\,\mathrm{sen}\,x - \cos x$$

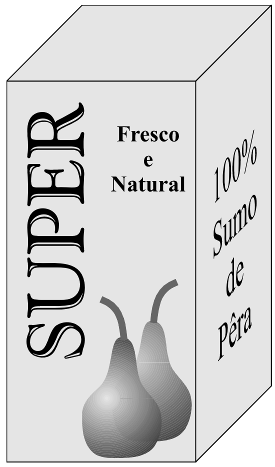
2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

2.1.2. Resolva a equação $f(x) = g(\pi)$, apresentando a solução na forma $\ln(k\,e)$, onde k representa um número real positivo.
($\ln$ designa logaritmo de base e)

2.2. Recorrendo à calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$, no intervalo $[0, 2\pi]$. Explique como procedeu.

3. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.



3.1. Mostre que a área total da embalagem é dada por

$$A(x) = \frac{2\,x^3 + 8}{x}$$

(x é o comprimento da aresta da base, em dm)

Nota: recorde que $1\ litro = 1\,dm^3$

3.2. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.
Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as rectas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b, respectivamente.
Prove que as rectas r e s **não** podem ser perpendiculares.

5. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: Espadas, Copas, Ouros e Paus. Cada naipe tem **três figuras**: Rei, Dama e Valete.

5.1. Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Rei? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

5.2. De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas. Sejam E_1, C_2 e F_2 os acontecimentos:

E_1: *sair Espadas na primeira extracção*;
C_2: *sair Copas na segunda extracção*;
F_2: *sair uma figura na segunda extracção*.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P\big((F_2 \cap C_2)\,|\,E_1\big)$. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicite o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar **apenas** da interpretação do significado de $P\big((F_2 \cap C_2)\,|\,E_1\big)$, no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 49
2.1. 33
2.1.1. 16
2.1.2. 17
2.2. 16

3. 27
3.1. 10
3.2. 17

4. 10

5. 30
5.1. 15
5.2. 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $(r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \,.\, \cos b + \text{sen}\,b \,.\, \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\,a \,.\, \text{sen}\,b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \,.\, \text{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta) \,.\, (\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho' cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\; cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\; cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$