TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 1

Grupo I

1. Tem-se: $x^2 < 4 \;\Leftrightarrow\; x > -2 \;\wedge\; x < 2 \;\Leftrightarrow\; |x| < 2$

Resposta **C**

2. A distância do ponto $Q\,(3,4)$ à origem é $\sqrt{3^2+4^2} = 5$
Portanto, a semicircunferência tem raio 5.
O domínio plano sombreado é, portanto, a intersecção do círculo definido pela condição $x^2 + y^2 \leq 25$ com o semiplano definido pela condição $y \geq 4$

Resposta **B**

3. Os pontos de coordenadas $(2,0)$ e $(0,6)$ pertencem à recta r
Portanto, um vector director da recta r é o vector $(2,0)-(0,6) = (2,\,-6)$
Assim, o declive da recta r é $-\dfrac{6}{2} = -3$

Resposta **A**

4. A esfera E tem centro na origem do referencial e raio igual a 2.
A recta r contém o ponto $(0,0,2)$ e é paralela ao eixo Oy.
Portanto, a intersecção da esfera E com a recta r é o ponto $(0,0,2)$

Resposta **C**

5. A média é igual a $\dfrac{3\times 0 + 7\times 1 + 10\times 2 + 3\times 3 + 1\times 4 + 1\times 5}{3+7+10+3+1+1} =$

$$= \frac{0+7+20+9+4+5}{25} = \frac{45}{25} = 1{,}8$$

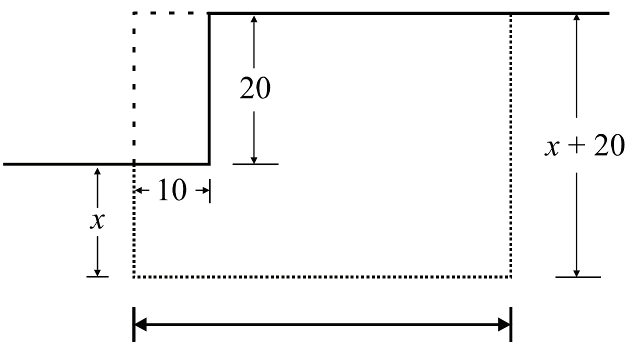
Resposta **A**

Grupo II

1.1. Relativamente aos lados do jardim que não confinam com o lago, tem-se:

- um tem x metros de comprimento;
- o lado oposto tem $x+20$ metros de comprimento;
- o terceiro lado tem $100-(x+x+20)$ metros de comprimento, pois a rede tem 100 metros.

Tem-se, assim, o seguinte esquema:



Portanto, a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por

$$a(x) = (80-2x)\,(x+20) - 10 \times 20 =$$

$$= 80\,x + 1600 - 2x^2 - 40x - 200$$

$$= -2x^2 + 40\,x + 1400$$

1.2. $y = -2x^2 + 40\,x + 1400$ define uma parábola.

Trata-se de encontrar as coordenadas do seu vértice.

A abcissa é $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{40}{-4} = 10$

A ordenada é a imagem da abcissa, ou seja, é

$$a(10) = -2 \times 100 + 40 \times 10 + 1400 = -200 + 400 + 1400 = 1600$$

A área do jardim é máxima para $x=10$, sendo $1600\ m^2$ a área máxima.

2.1. Como um dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox tem abcissa -2, tal significa que -2 é um zero de f.

Portanto, o polinómio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ é divisível por $x + 2$

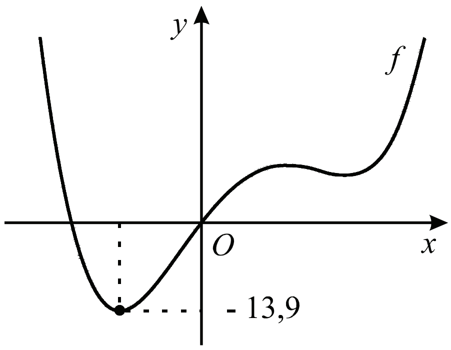
Façamos a divisão, utilizando a regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -3 & -3 & 14 & 0 \\ -2 & & -2 & 10 & -14 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 7 & 0 & \boxed{0} \end{array}$$

Assim, $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x = (x+2)(x^3 - 5x^2 + 7x) =$

$= (x+2)\,.\,x\,.(x^2 - 5x + 7\,)$

2.2. Na figura seguinte está representada parte do gráfico de f.



Assinalou-se no gráfico o ponto de ordenada mínima.

Tem-se, assim, $a \approx -13{,}9$

3.1. A aresta $[UQ]$ está contida na recta de intersecção dos planos PUQ e RUQ, definidos, respectivamente, pelas equações $x = 2$ e $y = 2$.

A aresta $[UQ]$ é o conjunto dos pontos desta recta que têm cota compreendida entre 0 e 2. Assim, uma condição que define a aresta $[UQ]$ é

$$x = 2 \;\wedge\; y = 2 \;\wedge\; 0 \leq z \leq 2$$

3.2. Para que o ponto T pertença ao plano mediador do segmento $[AV]$, o ponto T tem de estar a igual distância de A e de V.

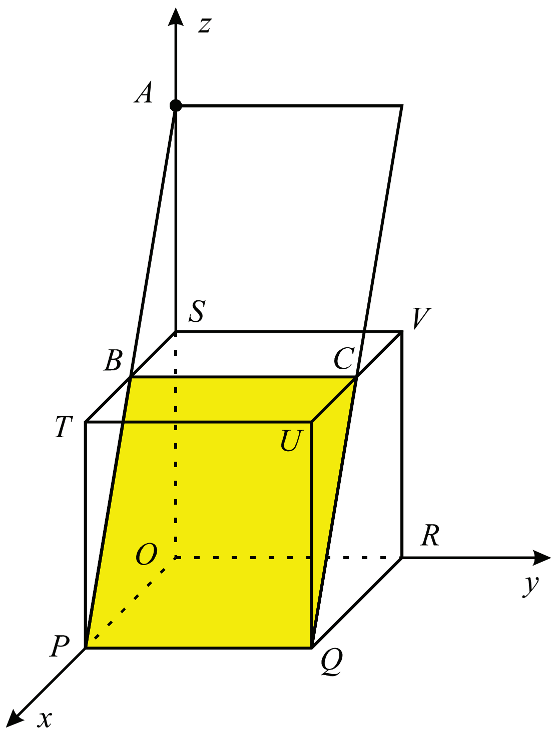
Para determinarmos a distância de T a A podemos ter em conta que as coordenadas de A são $(0,0,4)$ e as de T são $(2,0,2)$.

A distância de T a A é, portanto, igual a $\sqrt{(0-2)^2 + (0-0)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$

O segmento $[TV]$ é uma diagonal de uma face do cubo, pelo que o seu comprimento é $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

Portanto, o ponto T pertence ao plano mediador do segmento $[AV]$

3.3. A secção produzida no cubo pelo plano PQA é o rectângulo colorido na figura.



Dois lados do rectângulo têm comprimento 2 (por serem iguais às arestas do cubo).

Para determinarmos o comprimento de cada um dos outros dois lados, podemos ter em conta que os triângulos $[ABS]$ e $[PTB]$ são iguais, pelo que $\overline{BT} = 1$

Vem, então: $\overline{BP}^{\,2} = \overline{BT}^{\,2} + \overline{PT}^{\,2} \Leftrightarrow \overline{BP}^{\,2} = 1^2 + 2^2 \Leftrightarrow \overline{BP} = \sqrt{5}$

O perímetro do rectângulo é, portanto, $2 \times 2 + 2 \times \sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5}$