Equações do 2º grau a uma incógnita

Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano - 3.º ciclo

Julho de 2011

Autores: Professores das turmas piloto do 9º ano de escolaridade

Ano Lectivo 2010 / 2011

Índice

Introdução

Tópico:

- Equações do 2.º grau a uma incógnita

No 3º ciclo pretende-se desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos.

No âmbito deste tópico, segundo os objectivos gerais do programa , os alunos devem ser capazes de:

- interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos;
- apreciar a plausibilidade dos resultados obtidos e a adequação ao contexto das situações a que chegam;
- efectuar e perceber procedimentos e algoritmos de cálculos rotineiros;
- justificar os raciocínios que elaboram e as conclusões a que chegam.

Além disso, o trabalho a realizar deve ainda contribuir para o desenvolvimento das capacidades transversais indicadas no programa, nomeadamente a capacidade de:

- Resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;
- Raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas;
- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Numa primeira fase, propomos situações que envolvam o uso de expressões algébricas, ligadas a um contexto. Os problemas geométricos da primeira tarefa são propícios à revisão das operações com polinómios, teorema de Pitágoras e Lei do anulamento do produto.

O estudo deste tópico é uma boa oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem a fórmula resolvente.

Proposta de planificação

<table>
<tr><th>Blocos previstos</th><th>Tópico</th><th>Objectivos específicos</th><th>Notas</th><th>Tarefas</th><th>Instrumentos</th></tr>
<tr><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">Equações

• Equações do 2.º grau a uma incógnita</td><td rowspan="4">✓ Resolver equações do 2.º grau a uma incógnita

✓ Resolver e formular problemas envolvendo equações</td><td rowspan="4">Começar a resolução de equações do 2.º grau pelas equações incompletas. Utilizar a noção de raiz quadrada, a decomposição em factores e lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente.
O estudo deste tema é uma boa oportunidade para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrem algebricamente a fórmula resolvente</td><td>Tarefa 1
Lei do anulamento do produto</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>Tarefa 2
Fórmula resolvente</td><td>Papel e Lápis</td></tr>
<tr><td>Tarefa 3
Número de soluções de uma equação do 2.º grau</td><td>AGD ou Calculadora gráfica</td></tr>
<tr><td>Tarefa 4
Exercícios e problemas</td><td>Papel e lápis</td></tr>
<tr><td colspan="6">A realização de outras tarefas de consolidação fica ao critério de cada professor, tendo em conta as características dos seus alunos.</td></tr>
</table>

Tarefa 1 – Lei do anulamento do produto

- Com esta tarefa pretende-se que, através da resolução de problemas geométricos, os alunos resolvam equações do segundo grau usando a lei do anulamento do produto.
- Tema matemático: Álgebra
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Equações do 2.º grau a uma incógnita
- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação de conjecturas.

  Comunicação matemática: interpretação, representação, expressão e discussão.

  Resolução de problemas: compreensão do problema; concepção, aplicação e justificação de estratégias.
- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Princípios de equivalência de equações;

  Operações com polinómios;

  Noção de raiz quadrada;

  Decomposição em factores;

  Casos notáveis da multiplicação de binómios;

  Teorema de Pitágoras.
- Aprendizagens visadas:

  Utilizar a noção de raiz quadrada, a decomposição em factores e a lei do anulamento do produto na resolução de equações do 2.º grau.
- Cadeia: 1.ª tarefa da sequência “ Equações do 2.º grau a uma incógnita – 9º ano”
- Recursos: papel e lápis.
- Duração prevista: Um bloco e meio (90 min + 45 min)
- Notas para o professor

Propõe-se para esta tarefa um bloco e meio. No início da aula o professor deve proporcionar um espaço de discussão, com toda a turma, sobre a lei do anulamento do produto. Após este momento, os alunos resolvem a questão 1, em pequenos grupos, a partir da factorização de polinómios, tópico já trabalhado no 8.º ano.

O grau de dificuldade da resolução das equações aumenta à medida que se avança nos problemas propostos. Pode ser necessário recordar aos alunos a factorização de polinómios usando os casos notáveis.

Após a exploração dos diferentes problemas, o professor dever fomentar uma discussão sobre as suas resoluções, chamando a atenção para os diferentes tipos de equações do 2.º grau que surgiram, o que implica diferentes tipos de factorização.

A questão 2 permite a consolidação da lei do anulamento do produto. Pode ser feita em casa e discutida posteriormente em sala de aula.

Se sentir necessidade, o professor deve seleccionar mais exercícios similares para consolidação.

- Palavras chave: polinómio, factorização de polinómios, lei do anulamento do produto, casos notáveis da multiplicação de binómios, forma canónica, equação do segundo grau, solução de problema.

Tarefa 1 – Lei do anulamento do produto

Lei do anulamento do produto

Um produto é nulo quando pelo menos um dos factores é zero.

$A \times B = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$

1. Segue os passos indicados para resolver cada um dos problemas:

1.1. Escreve uma equação que o traduza.

1.2. Escreve a equação anterior na forma canónica.

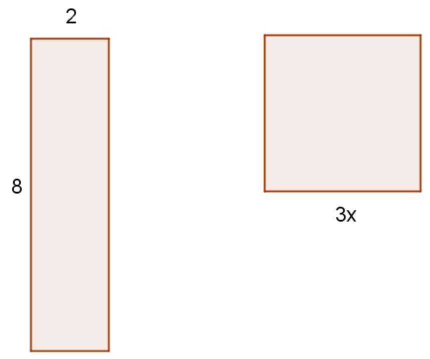
1.3. Num dos membros da equação obtiveste um polinómio. Factoriza-o.

1.4. Resolve a equação aplicando a lei do anulamento do produto.

1.5. Discute as soluções obtidas no contexto do problema.

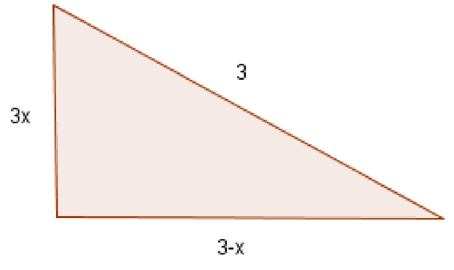
Problema 1

Descobre o valor de *x*, de modo que a área do rectângulo seja igual à área do quadrado.



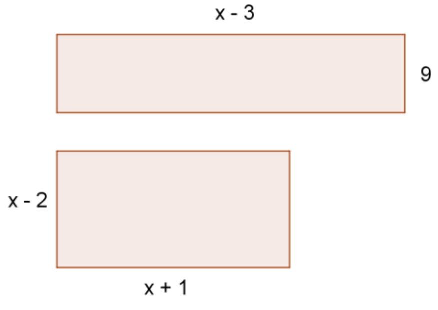
Problema 2

Determina o valor de *x* sabendo que o triângulo da figura é um triângulo rectângulo.



Problema 3

Na figura os dois rectângulos têm a mesma área. Qual é o valor de *x*?



2. Resolve as seguintes equações do 2.º grau:

2.1. $x^2 - 10x = 0$
2.2. $5x^2 + 4x = -x$
2.3. $x^2 + 6x + 9 = 0$
2.4. $x(2x + 3) - 4 = 3x$
2.5. $(x - 5) \times (2 + 3x) = x - 10$
2.6. $(x + 3)^2 - 5x = x + 5$

Tarefa 2 – Fórmula Resolvente

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos traduzam por equações do segundo grau três problemas históricos. Pretende-se ainda que compreendam como Bhaskara II deduziu a fórmula resolvente das equações do 2.º grau..
- Tema matemático: Álgebra
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Equações do 2º grau a uma incógnita
- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação de conjecturas; argumentação.

  Comunicação matemática: interpretação, representação, expressão e discussão.

  Resolução de problemas: compreensão do problema e concepção, aplicação e justificação de estratégias.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Traduzir problemas através de uma equação.

  Calcular o valor numérico de expressões com variáveis.

- Aprendizagens visadas:

  Compreender a demonstração algébrica da fórmula resolvente das equações do 2.º grau.

  Aplicar a fórmula resolvente na resolução de equações do 2.º grau.

- Cadeia: 2ª tarefa da sequência “ Equações do 2º grau a uma incógnita – 9º ano”
- Recursos: papel e lápis.
- Duração prevista: 1,5 blocos de 90 minutos.
- Notas para o professor

  No início da aula, os alunos devem trabalhar em pequenos grupos a leitura dos problemas históricos e a análise da dedução da fórmula resolvente proposto por Bhaskara II. Seguidamente, devem traduzir cada um dos problemas por uma equação do segundo grau e ser desafiados a resolvê-las. A resolução da equação do problema A não exige o uso da fórmula resolvente, pelo que se prevê que os alunos a resolvam. Contudo, na resolução das equações dos problemas B e C, é de esperar que a

generalidade dos alunos sinta dificuldade. O professor deve discutir com toda a turma o tipo de equação em presença, $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$,que não é fácil resolvê-las por qualquer dos métodos anteriormente utilizados (lei do anulamento do produto ou noção de raíz quadrada). Nesta altura é pertinente que o professor analise com toda a turma a demontração de Bhaskara e exemplifique como se usa esta fórmula, por exemplo, na resolução da equação do problema 2.
O tempo restante da aula será usado na resolução de alguns exercícios da questão 2 de modo a consolidar a aplicação da fórmula resolvente. Se necessário, o professor deve propor outros exercícios similares.
O professor poderá elaborar uma tarefa que leve os alunos com melhor desempenho a obter outra demonstração da fórmula resolvente ou propor a estes alunos uma pesquisa de outras demonstrações desta fórmula.

- Palavras chave: equação do segundo grau, termo do segundo grau, termo do primeiro grau, termo independente, raiz /solução/zero, fórmula resolvente; coeficientes.

Tarefa 2 – Fórmula resolvente: introdução histórica e demonstração

As equações do 2.º grau foram abordadas ao longo da História da Matemática, por diferentes civilizações, na resolução de vários problemas. São exemplo disso os seguintes problemas:

Problema A. Papiro de Moscou, (Egípcios aproximadamente 1850 a.C.)

Calcular a base de um rectângulo cuja altura é igual a 3/4 de sua base e cuja área é igual a 12.

Problema B. Tábua babilónica (Babilónicos 1950 a.c. – 1200 a.C.)

Achar o lado de um quadrado se a sua área menos o seu lado é 870.

Problema C. Sulvasutras (Hindus – enunciado de Bhaskara sec XII)

A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, brinca num bosque. Além disso, 12 dos macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual é o número total de macacos?

1. Lê atentamente cada um dos problemas históricos enunciados acima.

1.1. Traduz cada um deles por uma equação.

1.2. Resolve cada uma das equações anteriores e indica a solução de cada um dos problemas. Se a equação que obtiveste é uma equação completa do 2º grau utiliza a fórmula resolvente, tal como está explicado em baixo.

Até ao século IX a resolução das equações do 2º grau surge associada, quase exclusivamente a problemas geométricos. No século XII Bhaskara II arranjou um processo algébrico que permite resolver todas as equações do 2.º grau, completas ou incompletas.

Utilizando uma linguagem moderna, um processo equivalente ao de Bhaskara II consiste no seguinte:

Consideremos a equação completa do 2º grau: $ax^2+bx+c=0$ *(a ≠ 0)*

Mudamos o termo *c* para o segundo membro da equação: $ax^2+bx=-c$

Multiplicamos ambos os membros por $4a$ *(a ≠ 0)* e ficamos com: $4a^2x^2+4abx=-4ac$

Adicionamos b^2 aos dois membros : $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$

Factorizamos o primeiro membro: $(2ax+b)^2=b^2-4ac$

Se $b^2-4ac\geq 0$, podemos escrever: $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

E resolvendo em ordem a *x* :

$2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longleftarrow \textbf{Fórmula resolvente}$$

2. Usando a **fórmula resolvente** de equações do 2.º grau, resolve as seguintes equações:

2.1. $2x^2 + 8x + 6 = 0$

2.2. $3x^2 - 9x + 6 = 0$

2.3. $-2x^2 + 2x + 12 = 0$

2.4. $x^2 + 4x - 5 = 0$

2.5. $-x^2 + 2x + 15 = 0$

2.6. $x^2 + 6x + 9 = 0$

2.7. $x^2 + x = 12$

2.8. $-8x^2 - 2x + 1 = 0$

2.9. $-x^2 + 5x + 8 = 0$

Tarefa 3 – Número de soluções de uma equação do 2.º grau

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos relacionem os zeros de uma função quadrática com as soluções de uma equação do segundo grau. Para além disso, pretende-se também que relacionem o valor do binómio discriminante com o número de soluções da equação.
- Tema matemático: Álgebra
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Equações do 2º grau a uma incógnita
- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação, teste e demonstração de conjecturas. Argumentação.

  Comunicação matemática: interpretação, representação, expressão e discussão.

  Resolução de problemas: compreensão do problema; concepção, aplicação e justificação de estratégias.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Resolução de equações do 2º grau a uma incógnita.

  Classificação de equações.

- Aprendizagens visadas:

  Relacionar o número de soluções de uma equação do segundo grau com o sinal de $b^2 - 4ac$.

  Estabelecer conexões entre as abordagens gráficas e algébricas dos tópicos "Funções quadráticas" e "Equações do 2.º grau".

  Escrever uma equação do 2.º grau dadas as suas raízes.

- Cadeia: 3ª tarefa da sequência " Equações do 2º grau a uma incógnita – 9º ano"
- Recursos: papel e lápis, régua, AGD ou calculadora gráfica
- Duração prevista: Um bloco de 90 minutos
- Notas para o professor

  Os alunos devem iniciar a tarefa com a resolução de equações do 2.º grau (pelo processo que julguem mais conveniente) devendo ser ressaltado que os valores de *x* para os quais cada uma das funções é igual a zero, são chamados os *zeros* da função.

Após a resolução das equações, os alunos irão representar os gráficos das funções utilizando um programa de geometria dinâmica ou calculadoras gráficas e farão registo desses gráficos na ficha de trabalho. Pela análise da tabela da questão 1, os alunos podem concluir o número de zeros ou soluções de uma equação do segundo grau e inferir que este número depende do sinal de b^2-4ac. Podem também observar que o gráfico de uma função intersecta o eixo das abcissas nos zeros da função. Após a discussão o professor deve fazer uma síntese dos aspectos referidos.

Na questão 2, aplicam simplesmente as conclusões anteriormente obtidas. Nas questões 3, 4 e 5 os alunos devem perceber que é possível escrever uma equação que admite como soluções determinados números.

- Palavras chave: equação do segundo grau, termo do segundo grau, termo do primeiro grau, termo independente, raiz; solução, zero, fórmula resolvente, binómio discriminante.

Tarefa 3 – Número de soluções de uma equação do 2.º grau

1. Considera as seguintes funções

$f(x) = (x + 3)^2$

$g(x) = (x - 1)^2$

$h(x) = x^2 - x$

$i(x) = x^2 - 9$

$j(x) = x^2 + 2x - 3$

$k(x) = 2x^2 + x + 3$

$l(x) = 3x^2 + 2$

a) No teu caderno, determina os valores de x para os quais cada uma das funções é igual a zero.

b) Utiliza o *Geogebra* (ou a calculadora gráfica) para observares o gráfico de cada função, dando relevância aos pontos onde o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas.

<u>**Nota:**</u> Para a consecução do ponto anterior, através do *Geogebra*, presta especial atenção à visualização dos eixos coordenados e aos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abcissas.

c) Completa a tabela seguinte.

Função	Zeros da função	Nº de zeros	Esboço do gráfico com marcação dos pontos de intersecção com o eixo das abcissas.	Valor da expressão $b^2 - 4ac$	Classif. da equação f(x)=0
$f(x) = (x + 3)^2$					
$g(x) = (x - 1)^2$					

(continua)

(continuação da tabela)

Função	Zeros da função	Nº de zeros	Esboço do gráfico com marcação dos pontos de intersecção com o eixo das abcissas.	Valor da expressão $b^2 - 4ac$	Classif. da equação f(x)=0
$h(x) = x^2 - x$					
$i(x) = x^2 - 9$					
$j(x) = x^2 + 2x - 3$					
$k(x) = 2x^2 + x + 3$					
$l(x) = 3x^2 + 2$					

Observando a tabela anterior, que conclusões tiras sobre o número de soluções de uma equação do 2.º grau?

2. Sem resolver as equações, diz quantas soluções tem cada uma das equações seguintes:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^2 = 12x - 3$

3. Resolve as equações

a) (x – 3) (x+2) = 0

b) 5 (x – 3) (x+2) = 0

c) Que relação existe entre as soluções das duas equações?

4. Escreve uma equação do 2º grau que admita como soluções os números 1 e 5.

5. Escreve uma equação do 2º grau que cujas raízes são os números 0 e -4.

Tarefa 4 – Exercícios e problemas

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos consolidem, ampliem e aprofundem o conhecimento matemático subjacente a este tópico.
- Tema matemático: Álgebra
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Equações do 2º grau a uma incógnita
- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação, teste e demonstração de conjecturas; argumentação.

  Comunicação matemática: interpretação e representação.

  Resolução de problemas: compreensão do problema; concepção e aplicação.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Operações com polinómios.

  Fórmula resolvente de equações do 2.º grau.

  Escrita de equações do 2.º grau conhecidas as suas soluções.

  Resolução de equações do 2.º grau.

  Classificação de equações.

  Teorema de Pitágoras.

  Expressões das áreas do rectângulo, triângulo e círculo

- Aprendizagens visadas:

  Consolidar a resolução de equações do 2.º grau a uma incógnita.

  Consolidar a resolução problemas com equações do 2º grau.

  Estabelecer conexões entre as equações do 2.º grau e tópicos de Geometria e Funções.

- Cadeia: 4ª tarefa da sequência “ Equações do 2º grau a uma incógnita – 9º ano”
- Recursos: papel e lápis, calculadora gráfica.
- Duração prevista: Dois blocos de 90 minutos.

- Notas para o professor:

Esta tarefa é constituída por exercícios e problemas relacionados com Álgebra e com Geometria. Desta tarefa, o professor deve escolher os exercícios e problemas que considere adequados à realidade da sua turma e ao tempo disponível. Por outro lado, o professor poderá optar por exercícios e problemas similares do manual do aluno ou de outras fontes.

O professor deve deixar os alunos resolver a tarefa autonomamente, esclarecer dúvidas pontuais e sempre que seja oportuno deve fazer pontos de situação com toda a turma.

- Palavras chave: equação do segundo grau, termo do segundo grau, termo do primeiro grau, termo independente, raiz, solução, zero, fórmula resolvente, binómio discriminante.

Tarefa 4 – Exercícios e problemas

I. … COM ÁLGEBRA

1. Resolve as seguintes equações:

a) $6x^2 + 2x = 5 + x$
b) $x(-2x - 3) = 1$
c) $x(x - 3) + 2x = 6$
d) $x + (x - 1)^2 = 3$
e) $x^2 = 2(4 - x)$
f) $2(x^2 - 1) = 3x$
g) $4(x^2 + x) = 1 - x^2$
h) $x(2x - 3) = 1$

2. Escreve uma equação do 2º grau que satisfaça cada uma das seguintes condições e apresenta as suas soluções:

a) Equação com duas soluções: o zero e um número negativo;
b) Equação com duas soluções: dois números positivos;
c) Equação com apenas uma solução;
d) Equação sem soluções.

(GAVE: 1001 itens)

3. Na aula de Matemática, os alunos tinham de resolver a seguinte equação do 2º grau:

$$3x^2 - 12x = 0$$

O Rui resolveu a equação e chegou às seguintes soluções: 0, $-\frac{3}{4}$ e 4

A Joana também resolveu a equação, mas obteve as soluções: 1 e 4.

a) Sem efectuar qualquer cálculo com papel e lápis, explica por que é que nem o Rui, nem a Joana resolveram correctamente a equação.
b) Quais são as soluções correctas da equação?

4. Para cada valor de k, a equação $x^2 + (k+3)x + 8 = 0$ é uma equação do 2.º grau.

a) Indica o valor de k que torna a equação incompleta.
b) Verifica se 2 é ou não solução da equação que se obtém substituindo k por -9.

5. Determina dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 1645.

6. A soma de dois números é 52 e o seu produto é 595. Quais são esses números?

7. A diferença entre dois quadrados perfeitos consecutivos é 39. Descobre-os.

8. Nos festejos dos Santos Populares um foguete é lançado, de cima de uma parede, e percorre uma trajectória que, com o decorrer do tempo (t , em segundos) a altura (s, em metros) do foguete é dada pela seguinte expressão:

$$s=-\frac{1}{2}t^2+\frac{9}{2}t+5$$

a) Qual a altura da parede da qual o foguete é lançado?
b) Qual é o instante em que o foguete chega ao solo?
c) Determina qual a altura do foguete nos seguintes instantes:
c1) $t=2$;
c2) $t=4$.

II. … COM GEOMETRIA

Escreve uma equação que permita resolver os problemas seguintes. Resolve cada problema e, se possível, encontra um método alternativo.

1. Se subtrairmos 8cm ao lado de um quadrado e adicionarmos 12cm ao outro obtemos um rectângulo de área 96cm^2. Qual é a medida do lado desse quadrado?

2. A diagonal de um quadrado tem 15 cm de comprimento. Determina o valor exacto da área e do perímetro deste quadrado.

3. Um terreno rectangular tem de área 192m^2. Sabendo que o seu comprimento excede a largura em 4m, determina o perímetro deste terreno.

4. Quais são as dimensões de um campo de futebol, cuja área é 4900m^2 e cujo perímetro é 296m?

5. Calcula a área de um triângulo rectângulo, em que as dimensões de um cateto ultrapassam em 10m as do outro cateto e a hipotenusa mede 50 m.

6. Qual é a área de um triângulo rectângulo em que a hipotenusa mede 100cm e um dos catetos é o dobro do outro?

7. Observa a figura ao lado:

UVXZ é um rectângulo que tem inscrito um semicírculo de centro no ponto médio de VX, representado por M.

Sabendo que a área da zona sombreada é de 43 m^2, determina as dimensões do rectângulo (usa 3,14 como valor aproximado de π).

8. O senhor António colocou a sua cabra a pastar e para que esta não fugisse, prendeu-a com uma corda a uma estaca. Qual deve ser o comprimento da corda para que a cabra possa ter à sua disposição uma área para pastar com 800 m^2 ?

9. O problema seguinte foi retirado do Papiro de Berlim.
Lê-o atentamente e resolve-o.

É te dito … a área de um quadrado de 100 é igual à de dois quadrados mais pequenos. O lado de um dos quadrados é ½ + ¼ do lado do outro. Diz-me quais são os lados dos dois quadrados desconhecidos.

10. O astrónomo e matemático Ptolomeu enunciou a propriedade seguinte:

«Num quadrilátero inscrito numa circunferência, a soma dos produtos das medidas dos lados opostos é igual ao produto das medidas das diagonais.»

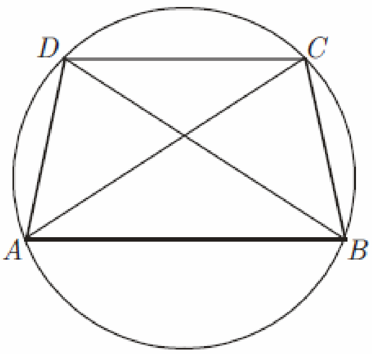
Na figura, está representado um trapézio *ABCD* inscrito numa circunferência.
A figura não está desenhada à escala.

Sabe-se que:

$\overline{AB} = 12$ e $\overline{CD} = 9$

$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{150}$

$\overline{AD} = \overline{BC}$



Determina o valor exacto de $\overline{AD}$, utilizando a propriedade enunciada por Ptolomeu.
Apresenta os cálculos que efectuaste.

(GAVE: Teste Intermédio de Matemática - 9.º Ano – 2010)