Funções e Equações – 8.º ano

Proposta de conjunto de tarefas para o 3.º ciclo

Autores:

Professores das turmas piloto do 8.º ano de escolaridade

Ano lectivo 2009/10

Julho de 2010

Introdução

Tópicos:

- Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores)
- Funções linear e afim
- Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

No 3.º ciclo pretende-se desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos.

Segundo os objectivos gerais de aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:

- ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos;
- compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações.

Além disso, o trabalho a realizar deve ainda contribuir para o desenvolvimento das capacidades transversais indicadas no programa, nomeadamente a capacidade de:

- Resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;

- Raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas;
- Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

Esta sequência de tarefas, destinada a apoiar a leccionação dos tópicos acima mencionados, pressupõe que os alunos já tenham abordado os tópicos “Equações” e “Funções” anteriormente.

Em “Equações”, os alunos devem já ter apreendido a noção de equação e sua solução e a identificar equações equivalentes. É necessário também que saibam resolver equações do 1.º grau a uma incógnita (sem denominadores) e que saibam traduzir para linguagem matemática problemas cuja escrita se reduz a equações do tipo já estudado.

Sobre “Funções”, é necessário que os alunos conheçam já os conceitos de função, objecto, imagem, representação gráfica e proporcionalidade directa.

As tarefas 2 e 7 são constituídas por um conjunto de problemas que, com vantagem, podem ir sendo resolvidos ao longo da leccionação deste tópico.

Todas as tarefas aqui apresentadas podem e devem sofrer alterações em função do grupo de alunos.

A realização de outras tarefas de consolidação fica ao critério de cada professor, tendo em conta as características dos seus alunos.

Proposta de planificação

Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos
4	**Equações** • Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores)	✓ Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução. ✓ Resolver problemas cuja tradução em linguagem matemática seja uma equação do 1.º grau a uma incógnita; ✓ Simplificar expressões algébricas;	Os alunos devem: - relacionar os significados de "membro" e "termo", e de "incógnita" e "solução" de uma equação. - distinguir "expressão algébrica", "equação" e "fórmula".	**Tarefa 1** Equações com denominadores **Tarefa 2** Problemas e equações	Papel e lápis

Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos
3,5	**Funções** • Funções linear e afim	✓ Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa; ✓ Relacionar a função linear com a proporcionalidade directa; ✓ Analisar situações de proporcionalidade directa como funções do tipo y=kx, ($k \neq 0$); ✓ Estudar o efeito da variação do parâmetro k na representação gráfica de funções definidas por $y = kx, k > 0 \; ou \; k < 0$; ✓ Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante; ✓ Representar gráfica e algebricamente uma função linear e uma função afim. ✓ Relacionar as funções linear e afim; ✓ Estudar o efeito da variação dos parâmetros a e b na representação gráfica de funções definidas por $y = ax + b$, sendo a e b números reais.	Os alunos devem: - a partir da representação gráfica de uma função linear ou afim, identificar a imagem dado o objecto e o objecto dada a imagem; - compreender a influência da variação dos parâmetros *a* e *b* (na expressão *y=ax+b*) no gráfico da função; - propor a representação algébrica de uma: - função linear sendo dado um objecto não nulo e a sua imagem; - função afim sendo dados dois objectos e as suas imagens.	**Tarefa 3** Função linear **Tarefa 4** Função afim	Papel e lápis e AGD

<table>
<tr><th>Blocos previstos</th><th>Tópico</th><th>Objectivos específicos</th><th>Notas</th><th colspan="2">Tarefas</th><th colspan="2">Instrumentos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">5</td><td rowspan="3">Equações

• Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas</td><td>✓ Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações.</td><td>Na interpretação gráfica de sistemas de equações, tratar os casos de sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis.</td><td>Tarefa 5A
Sistemas de duas equações a duas incógnitas</td><td>Tarefa 5B
Sistemas de duas equações a duas incógnitas</td><td>Papel e lápis</td><td>AGD</td></tr>
<tr><td>✓ Resolver sistemas de equações pelo método de substituição.</td><td></td><td colspan="2">Tarefa 6
Método de substituição</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td>✓ Resolver e formular problemas envolvendo equações e sistemas de equações;

✓ Traduzir problemas por meio de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas;</td><td></td><td colspan="2">Tarefa 7
Problemas</td><td colspan="2">Papel e lápis</td></tr>
<tr><td colspan="8">A realização de outras tarefas de consolidação fica ao critério de cada professor, tendo em conta as características dos seus alunos.</td></tr>
</table>

Equações com denominadores

Com esta tarefa pretende-se que os alunos aprendam a resolver equações do 1.º grau a uma incógnita quando os coeficientes são fraccionários.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Equações

- **Subtópicos matemáticos:**
  Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores)

- **Capacidades transversais:** Raciocínio matemático
  Comunicação matemática

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Operar com números racionais;
  - Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
  - Resolver equações do 1.º grau, com parêntesis, mas sem denominadores;
  - Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.

- **Aprendizagens visadas:**
  - Resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução, com parêntesis e denominadores;
  - Simplificar expressões algébricas;
  - Formular conjecturas;
  - Interpretar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;
  - Representar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
  - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

- **Duração prevista:** 2 bloco de 90 minutos

- **Notas para o professor:**

Esta tarefa surge, no oitavo ano, como sendo a primeira sobre equações após a abordagem, no ano anterior, em que aprenderam a resolver equações do 1.º grau a uma incógnita, através da utilização dos princípios de equivalência ou das regras de resolução de equações. Caso o professor sinta necessidade, um dos recursos disponível para efectuar alguma consolidação das aprendizagens realizadas no ano anterior, é a própria cadeia de tarefas para o 7.º ano sobre o tópico *Equações*.

A abordagem desta tarefa, por parte dos alunos, deve-se fazer em pequenos grupos de trabalho com orientação para resolverem o item 1, no fim do qual se deve proceder a um momento de discussão conjunto.

Com o trabalho em grupo e com a discussão gerada, pretende-se promover uma consciencialização dos princípios de equivalência, das regras de resolução de equações e das técnicas operatórias.

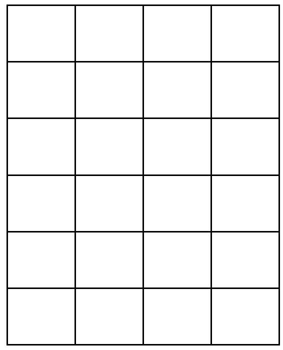
A aula deve seguir com a resolução dos itens 2 e 3, finalizando com a exposição das suas resoluções por parte dos alunos. O item 4 deve ser deixado para trabalho de casa.

Chama-se a atenção para as particularidades da escrita matemática tais como: $2\frac{1}{6}$ (numeral misto) e $2\frac{x}{6}$ (expressão algébrica). Neste momento, é fundamental a distinção patente entre aritmética e álgebra ao nível da escrita.

Na aula seguinte deve explicar-se cuidadosamente os passos de resolução de algumas das equações.

Tarefa 1 – Equações com denominadores

1. Um quadrado foi dividido, de acordo com a figura, em 24 rectângulos iguais.



1.1. Se x representar a medida do lado do quadrado, qual o significado das seguintes expressões:

$\frac{x}{6}$ $\frac{x}{4}$ $2\,\frac{x}{6} + 2\,\frac{x}{4}$

1.2. Sabendo que cada um dos rectângulos ficou com 20cm de perímetro, a Ana, o João e a Matilde resolveram, de formas diferentes, a equação $2\,\frac{x}{6} + 2\,\frac{x}{4} = 20$ que permite determinar a medida do lado do quadrado.

Resolução da Ana	Resolução do João	Resolução da Matilde
$2\,\frac{x}{6} + 2\frac{x}{4} = 20$	$2\,\frac{x}{6} + 2\frac{x}{4} = 20$	$2\,\frac{x}{6} + 2\frac{x}{4} = 20$
$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 20$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 20$	$\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = 20$
$x + \frac{3x}{2} = 60$	$\frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} = 20$	$\frac{2x}{6} + \frac{3x}{6} = \frac{120}{6}$
$2x + 3x = 120$	$\frac{5x}{6} = 20$	$2x + 3x = 120$
$5x = 120$	$5x = 120$	$5x = 120$
$x = 120 \div 5$	$x = 120 \div 5$	$x = 120 \div 5$
$x = 24$	$x = 24$	$x = 24$

- Copia, para o teu caderno, a resolução da equação da Ana e explica cada um dos seus passos.
- Faz o mesmo em relação à resolução do João e da Matilde.

2. Resolve a seguinte equação:

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2x + 11$$

3. Descobre o erro em cada uma das seguintes resoluções e corrige-o.

3.1.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1 + x$$

$$3x + 2x = 1 + x$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$

3.2.

$$2\left(\frac{x-1}{3}\right) = 7$$

$$\frac{2x - 2}{6} = 7$$

$$2x - 2 = 42$$

$$2x = 44$$

$$x = 22$$

3.3.

$$1 - \frac{x-3}{2} = 1$$

$$2 - x - 3 = 2$$

$$-x = 3$$

$$x = -3.$$

4. Resolve cada uma das seguintes equações

4.1. $3x + \frac{1}{5} = \frac{2}{3}$

4.2. $\frac{2x}{3} + 5 = 4x - \frac{1}{3}$

4.3. $\frac{1}{2}(a - 5) = 16$

4.4. $2(x + 2x) = \frac{2+x}{4}$

4.5. $\frac{b}{2} - 3\,(b - 1) = \frac{b - 25}{3}$

4.6. $\frac{3y}{4} - \frac{1}{2} = \frac{y}{5}$

4.7. $\frac{x}{3} - \frac{4 + x}{4} = \frac{x}{5} - 2$

Problemas e equações

Com esta tarefa pretende-se que os alunos resolvam problemas e que os traduzam, em linguagem simbólica, por meio de equações.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Equações

- **Subtópicos matemáticos:**
  Equações do 1.º grau a uma incógnita (com denominadores)

- **Capacidades transversais:** Resolução de problemas
  Comunicação matemática:

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Operar com números racionais;
  - Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
  - Resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução;
  - Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática;
  - Resolver problemas, cuja tradução em linguagem matemática seja feita por equações do 1.º grau a uma incógnita sem denominadores.

- **Aprendizagens visadas:**
  - Resolver problemas cuja tradução em linguagem matemática seja uma equação do 1.º grau a uma incógnita;
  - Resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução, com parêntesis e denominadores;
  - Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;
  - Averiguar da possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema;
  - Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática;

- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

▶ **Duração prevista:** 2 blocos de 90 minutos

▶ **Notas para o professor:**

No ano lectivo anterior, os alunos resolveram problemas em que se incidia, pela primeira vez, na sua tradução matemática através duma equação. Este ano, surgem-lhes outras situações de aprendizagem em que continuam a ter de compreender o problema, conceber e pôr em prática estratégias de resolução.

Neste tópico, os alunos devem evoluir na escrita matemática dos problemas, pelo que, mesmo que haja tendência para se resolver sem se necessitar da tradução por uma equação, deve-se insistir para que, numa segunda abordagem, se esforcem pela tradução por uma equação.

O problema relativo a Diofanto costuma suscitar curiosidade e algum desafio pelo que pode ser utilizado para que cada um tente obter o número de anos que Diofanto viveu e se expliquem as diversas abordagens.

Depois disso, os alunos devem trabalhar em grupo, sendo estipulado um número de problemas (por exemplo 6) ao fim do qual se iniciam as apresentações das resoluções que cada grupo implementou.

Os professores seleccionam o número e o tipo de problemas que considerem mais adequados ao trabalho a desenvolver com os seus alunos.

Tarefa 2 – Problemas e equações

Traduz simbolicamente e resolve cada um dos seguintes problemas.

1. Interrogada acerca da sua idade uma senhora enigmaticamente disse: "Para chegar aos 100 anos terei ainda que viver $\frac{2}{3}$ dos anos que já vivi". Quantos anos tem a senhora?

2. Dos alunos de uma escola do 2.º ciclo $\frac{2}{3}$ estão matriculados no 5.º ano e os restantes 150 no 6.º ano. Quantos alunos tem a escola no 2.º ciclo?

3. Um merceeiro vendeu metade de um queijo, depois $\frac{1}{4}$ e, finalmente, uma sexta parte. Verificou depois que ainda lhe restavam 125g. Quantos quilos pesava o queijo?

4. Um trabalhador gasta por mês $\frac{1}{4}$ do seu salário na renda de casa, $\frac{2}{3}$ em alimentação e vestuário, restando-lhe 125 euros para outras despesas. Quanto ganha o trabalhador?

5. O José e o António têm, respectivamente, 13 e 18 anos. Daqui a quantos anos a idade do José será $\frac{4}{5}$ da do António?

6. Determina dois números inteiros consecutivos sabendo que adicionando metade do menor ao dobro do maior se obtém 27.

7. Há 5 anos o André tinha metade da idade que tem hoje. Quantos anos tem o André?

8. Um dos ângulos internos de um trapézio isósceles é igual a $\frac{3}{5}$ de um outro ângulo interno do mesmo trapézio. Quanto mede cada um desses ângulos?

9. Depois de receber 20 euros que juntei ao dinheiro que já tinha, gastei $\frac{1}{3}$ do dinheiro com que fiquei e verifiquei que ainda me restavam mais 2 euros do que o dinheiro que tinha inicialmente. Que dinheiro tinha eu?

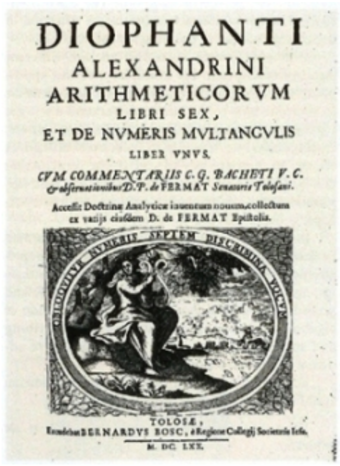
10. Dois irmãos têm conjuntamente 55 anos e a idade do mais novo é igual a $\frac{5}{6}$ da do mais velho. Qual a idade de cada um dos irmãos?

11. Pedro, Inês e Sofia repartem entre si uma certa quantia. Pedro recebe $\frac{2}{7}$ do total, Sofia $\frac{1}{3}$ do restante e Inês 22 euros. Qual é a importância repartida?

12. Nota histórica

Diofanto foi um matemático grego que se pensa ter vivido por volta do ano 250 da nossa era. Pertenceu à Escola de Alexandria e é considerado o "Pai da Álgebra". Trabalhou muitas questões que podem resolver-se mediante equações. Numa antologia grega do ano 500, aparece um problema relativo a Diofanto, ao qual se recorre para obter informações sobre a sua vida.

Note-se que muitos problemas na Antiguidade apareciam como histórias.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Caminhante! Aqui estão sepultados os restos de Diofanto.
E os números podem mostrar (milagre!) quão longa foi a sua vida, cuja sexta parte foi a sua bela infância.
Tinha decorrido mais uma duodécima parte de sua vida, quando seu corpo se cobriu de pêlos.
A partir daí, a sétima parte da sua existência decorreu com um casamento estéril.
Passou mais um quinquénio (cinco anos) e ficou feliz com o nascimento do seu primogénito, cuja bela existência durou apenas metade da de seu pai, que com profunda dor sobreviveu quatro anos a seu filho.
Diz-me caminhante, quantos anos viveu Diofanto até a morte o levar?

Funções lineares

Com esta tarefa pretende-se que os alunos reencontrem o conceito de função e, em particular, o de função linear. Pretende-se que analisem uma função a partir das suas representações.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Funções

- **Subtópicos matemáticos:** Proporcionalidade directa como função.
  Função linear.

- **Capacidades transversais:** Raciocínio matemático
  Comunicação matemática

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações;
  - Analisar uma função a partir das suas representações;
  - Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;
  - Resolver problemas envolvendo situações de proporcionalidade directa.

- **Aprendizagens visadas:**
  - Representar gráfica e algebricamente uma função linear;
  - Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa;
  - Relacionar a função linear com a proporcionalidade directa;
  - Analisar situações de proporcionalidade directa como funções do tipo y=kx, (k $\neq 0$);
  - Estudar o efeito da variação do parâmetro k na representação gráfica de funções definidas por $y = kx, k > 0 \text{ ou } k < 0$.
  - Formular e testar conjecturas;
  - Interpretar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;

- Representar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

- **Notas para o professor:**

Os alunos, com a realização desta tarefa, devem formular e testar conjecturas. A discussão em grande grupo deve garantir uma síntese clara das aprendizagens envolvidas. É de valorizar os pequenos relatórios pedidos.

Com a 1.ª questão pretende-se que os alunos mobilizem os conhecimentos adquiridos no ano lectivo anterior relativo às formas mais utilizadas de representar uma função. Devem, ainda, mobilizar os conhecimentos de que dispõem relativos a uma função de proporcionalidade directa.

Com a 2.ª questão pretende-se analisar a variação do gráfico de uma função de proporcionalidade directa (linear) consoante o valor do parâmetro k ($k>0$), a partir de uma situação contextualizada.

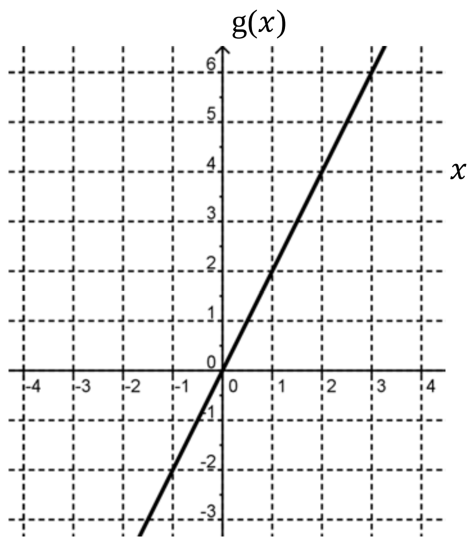
Na 3.ª questão, agora num contexto puramente matemático, os alunos vão alargar o seu conhecimento sobre a influência do parâmetro k na representação gráfica de uma função linear.

Tarefa 3 – Funções lineares

1. Cada uma das três funções seguintes está definida por um dos seguintes processos:

A função f através duma expressão algébrica, a função g pela sua representação gráfica e a função h através duma tabela numérica.

$f(x) = x^2 + 1$



x	-2	-1	0	1	2	3
$h(x)$	-1	1	3	5	7	9

1.1. Para cada uma das três funções faz as duas representações que faltam.

1.2. Alguma delas é uma função de proporcionalidade directa (função linear)? Explica por quê.

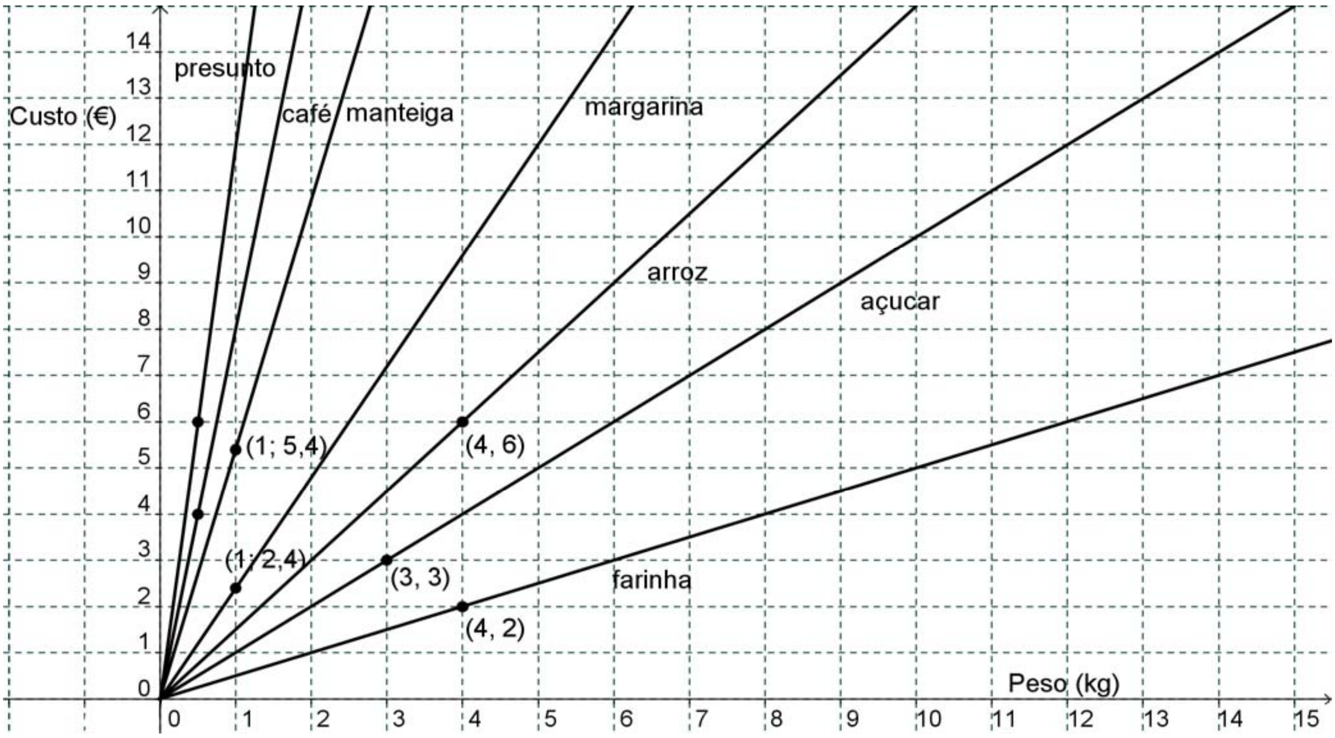
Relembra:

Uma função com uma expressão algébrica do tipo *y* = *k x* (ou *f(x)* = *k x*), *k* ≠ 0, tem o nome de *função de proporcionalidade directa* ou *função linear*.

- *x* é um objecto e *y* (ou *f*(*x*)) é a sua imagem; *k* é a constante de proporcionalidade;
- o gráfico de uma função de proporcionalidade directa é uma recta que contém a origem do referencial.

Por exemplo: $f(x) = 8x$ ou $y = 0{,}5x$ são funções de proporcionalidade directa (funções lineares).

2. Na figura a Ana representou graficamente as relações entre o ***peso*** e o ***custo*** de alguns produtos de alimentação.



2.1. De acordo com as representações preenche a tabela:

Produtos	Peso (kg)	Custo (€)	Preço (€ por kg)
açúcar	3	3	1
Café	0,5	4	
farinha			
arroz			
margarina			
	0,5	6	

2.2. Indica:

(i) Uma expressão algébrica para cada uma das funções de proporcionalidade directa representada.

(ii) A constante de proporcionalidade de cada uma e o seu significado no contexto da situação.

2.3. A Ana quis explicar ao Nuno que apesar de todas as expressões serem do tipo $y = kx$ $(k > 0)$ as rectas tinham inclinação diferente e que isso tinha a ver com o valor de k.

Escreve um pequeno texto sobre a relação entre a inclinação das rectas e o valor de k de cada uma das funções e ilustra-a com alguns exemplos.

3. O Nuno achou interessante o que a Ana descobrira e propôs-lhe estudarem, de seguida, as funções do tipo $y = kx, k < 0$.

Consideraram, para isso, as seguintes funções:

$y = x$	$y = -3x$	$y = -x$
$y = 2x$	$y = -0{,}5\ x.$	$y = -5x.$

Representaram-nas graficamente e tiraram uma conclusão.

- Descreve as prováveis conclusões dos dois amigos, elaborando um pequeno texto onde integres as representações gráficas das funções.

Função afim

Com esta tarefa pretende-se que os alunos procedam a uma pequena investigação que lhes permita compreender a influência dos parâmetros, a e b da expressão $y = ax + b$, na representação gráfica da função.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Funções

- **Subtópicos matemáticos:** Conceito de função e de gráfico de uma função
  Função afim

- **Capacidades transversais:** Raciocínio matemático
  Comunicação matemática

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações;
  - Analisar uma função a partir das suas representações;
  - Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
  - Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade;

- **Aprendizagens visadas:**
  - Representar gráfica e algebricamente uma função afim.
  - Interpretar a variação de uma função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a função é crescente, decrescente ou constante;
  - Relacionar as funções linear e afim;
  - Estudar o efeito da variação dos parâmetros a e b na representação gráfica de funções definidas por $y = ax + b$, sendo a e b números reais.
  - Formular conjecturas;
  - Distinguir uma argumentação informal de uma demonstração;

- Interpretar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;
- Representar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

- **Recursos:** Papel e lápis ou AGD

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

- **Notas para o professor:**

A discussão em cada grupo de trabalho e a alargada, com a turma, devem garantir uma síntese completa e a real apropriação dos conhecimentos matemáticos implicados.

No item 1 trabalha-se com funções afins de declive sempre igual a 3, logo todas as rectas, que representam as funções, são paralelas; o valor do parâmetro b fixa o ponto onde a recta intersecta o eixo das ordenadas. No item 2, os alunos representam graficamente funções afins, passando todas no mesmo ponto (0,2); o parâmetro k define a inclinação da recta que representa a função. Na discussão após a realização do item 2, os alunos devem ser capazes de representar graficamente funções do tipo $y = kx + b$ considerando

(i) $k < 0$ e $b > 0$
(ii) $k > 0$ e $b < 0$
(iii) $k = 0$ e $b > 0$.

Tarefa 4 – Função afim

1. Considera as seguintes funções do tipo $y = kx + b$, com $k = 3$:

$y = 3x$ $\qquad\qquad$ $y = 3x - 2$

$y = 3x + 4$ $\qquad\qquad$ $y = 3x + 1{,}5$

1.1. Representa-as graficamente num mesmo referencial.

1.2. Qual a posição relativa das rectas que representam as funções?

1.3. O que há de comum entre as expressões algébricas que definem as funções?

1.4. Indica as coordenadas dos pontos de intersecção de cada uma das rectas com o eixo das ordenadas.

1.5. Explica o efeito do valor de b no gráfico da função.

2. Considera as funções do tipo $y = kx + b$, com $b = 2$.

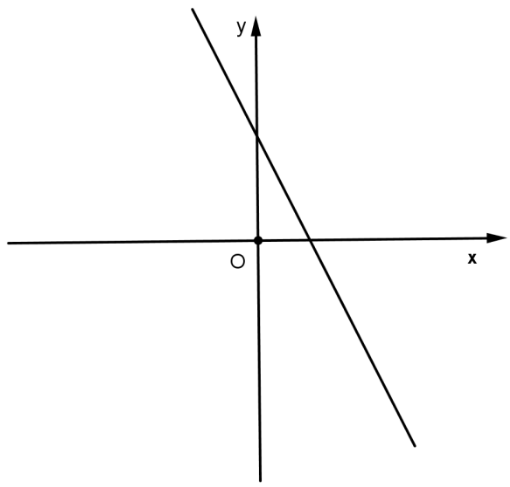
2.1. Escreve três exemplos de funções deste tipo atribuindo valores a k (escolhe valores de sinais diferentes).

2.2. Representa, num mesmo referencial, os gráficos das funções consideradas na alínea anterior.

2.3. O que há de comum entre os gráficos?

2.4. Descreve o efeito do valor de k no crescimento e no decrescimento das funções.

3. Observa o gráfico seguinte:



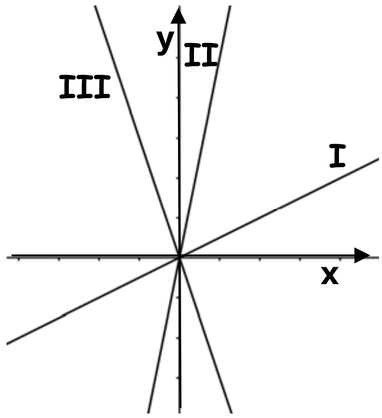
3.1. Este gráfico pode representar uma função de proporcionalidade directa? Explica a tua resposta.

3.2. Indica a expressão analítica de uma função que possa ser representada por este gráfico, explicando o porquê da tua resposta.

4. Faz corresponder as expressões algébricas

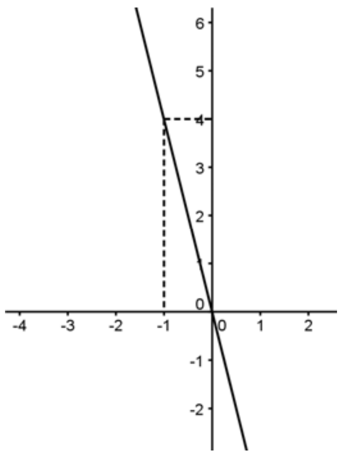
$$y = 0{,}5x \text{ , } y = -3x \text{ e } y = 5x$$

a cada um dos gráficos. Justifica a tua resposta.

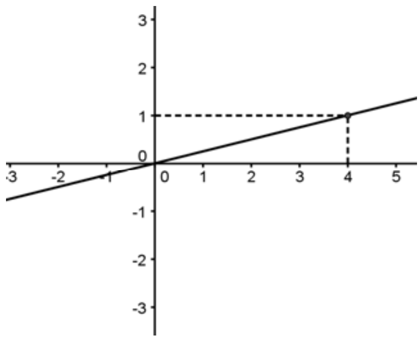


5. Escreve a expressão algébrica que define cada uma das funções a seguir representadas graficamente:

5.1.



5.2.



6. Escreve a expressão algébrica que define a função linear cujo gráfico passa pelos pontos:

A(-2,-3) e B(4,6).

Sistemas de duas equações

Com esta tarefa pretende-se que os alunos compreendam o significado da conjunção de condições e a sua interpretação geométrica.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Equações

- **Subtópicos matemáticos:** Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

- **Capacidades transversais**: Comunicação matemática

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**

  - Compreender as noções de equação e de solução de uma equação e identificar equações equivalentes;
  - Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
  - Representar graficamente uma função afim.

- **Aprendizagens visadas:**

  - Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações;
  - Reconhecer, a partir de representações gráficas, sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis;
  - Representar informação, ideias e conceitos matemáticos de diversas formas;
  - Exprimir resultados, ideias e conceitos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;
  - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

- **Recursos:** Papel e lápis e material de desenho (tarefa 5A) ou Geogebra (tarefa 5B)

- **Duração prevista**: 1 bloco de 90 minutos

▶ **Notas para o professor:**

Com esta tarefa pretende-se que os alunos interpretem geometricamente sistemas de duas equações e dêem significado às suas soluções. "Esta interpretação da representação gráfica de um sistema de equações é fundamental para uma efectiva compreensão tanto da noção de sistema de equações como da natureza da respectiva solução[1]" (Ponte et. al, 2009).

Foram concebidas duas tarefas em alternativa: a tarefa 5A e a tarefa 5B, diferindo somente no tipo de recursos a utilizar. A primeira está concebida para a utilização de material de desenho e a segunda para um ambiente de geometria dinâmica.

Nesta tarefa o uso de tecnologia é aconselhável por permitir o estudo de uma grande variedade de casos de sistemas possíveis determinados, possíveis indeterminados e impossíveis, relacionando-os com a posição relativa das rectas correspondentes.

No final do item um é recomendável organizar com os alunos uma discussão em grande grupo para clarificar o significado geométrico das soluções de um sistema, bem como fazer uma primeira alusão à existência de sistemas impossíveis e sistemas indeterminados.

[1]Retirado de Ponte, J., Branco, N, Matos, A (2009). Álgebra no ensino básico disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/algebra03.htm

Tarefa 5A – Sistema de duas equações (PL)

1. Cada uma das equações que se segue tem duas incógnitas.

$$y = 3x + 4 \quad \text{e} \quad y = -2x - 1$$

O par ordenado (1,7) é solução da equação $\boldsymbol{y = 3x + 4}$ porque 7 = 3x1+4.

O par ordenado (4, -9) é solução da equação $\boldsymbol{y = -2x - 1}$ porque -9 = -2x4-1.

1.1. Preenche as tabelas com várias soluções de cada uma das equações.

$\boldsymbol{y = 3x + 4}$		
x	y	(x, y)
1	7	

$\boldsymbol{y = -2x - 1}$		
x	y	(x, y)
4	-9	

1.2. Representa no mesmo referencial cartesiano os pontos (x,y) que encontraste.

1.3. Há alguma solução comum às duas equações?

1.4. No mesmo referencial cartesiano, representa as rectas que correspondem a cada uma das equações.

1.5. Qual o ponto comum às rectas representadas? Que representa esse ponto para as equações?

As equações $y = 3x + 4$ e $y = -2x - 1$ formam um **sistema de duas equações** que se representa habitualmente por

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

A solução do sistema é um par ordenado (x, y).

Cada uma das equações do sistema tem várias soluções (geometricamente são as coordenadas dos pontos de uma recta).
Se existe uma solução comum às duas equações, esta é a **solução do sistema** (geometricamente é o ponto de intersecção das rectas correspondentes a cada uma das equações).
Se não existe uma solução comum às duas equações, o sistema **não tem solução** (as rectas são paralelas) o **sistema é impossível**.
Se têm uma infinidade de soluções comuns o **sistema é indeterminado** (as duas rectas são coincidentes).

2. Resolve graficamente cada um dos seguintes sistemas de equações:

2.1. $\begin{cases} x + y = 8 \\ y = 2 - x \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x + y = -9 \end{cases}$ **2.3.** $\begin{cases} 2y - 3x = 2 \\ y = 1{,}5x + 1 \end{cases}$

3.

3.1. Num referencial, traça a recta **y=2x+1**.

3.2. Traça outra recta de modo que o sistema constituído pelas equações dessas rectas seja um sistema impossível.

3.3. Que alterações deverás fazer à segunda recta traçada para encontrar um novo sistema possível e indeterminado?

3.4. Procede de modo análogo de forma a obteres um sistema possível e determinado e explica como pensaste.

Tarefa 5B – Sistema de duas equações (AGD)

1. Cada uma das equações que se segue tem duas incógnitas.

$$y = 3x + 4 \quad \text{e} \quad y = -2x - 1$$

O par ordenado (1,7) é solução da equação $\boldsymbol{y = 3x + 4}$ porque 7 = 3x1+4.

O par ordenado (4, -9) é solução da equação $\boldsymbol{y = -2x - 1}$ porque -9 = -2x4-1.

1.1. Preenche as tabelas com várias soluções de cada uma das equações.

$\boldsymbol{y = 3x + 4}$		
x	y	(x, y)
1	7	

$\boldsymbol{y = -2x - 1}$		
x	y	(x, y)
4	-9	

1.2. Representa num referencial cartesiano, utilizando o programa Geogebra, os pontos (x,y) que encontraste.

1.3. Há alguma solução comum às duas equações?

1.4. No mesmo referencial, representa as rectas que correspondem a cada uma das equações.

1.5. Qual o ponto comum às rectas representadas? Que representa esse ponto para as equações?

As equações $y = 3x + 4$ e $y = -2x - 1$ formam um **sistema de duas equações** que se representa habitualmente por

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

A solução do sistema é um par ordenado (x, y).

Cada uma das equações do sistema tem várias soluções (geometricamente são as coordenadas dos pontos de uma recta).

Se existe uma solução comum às duas equações, esta é a **solução do sistema** (geometricamente é o ponto de intersecção das rectas correspondentes a cada uma das equações).

Se não existe uma solução comum às duas equações, o sistema **não tem solução** (as rectas são paralelas) o **sistema é impossível**.

Se têm uma infinidade de soluções comuns o **sistema é indeterminado** (as duas rectas são coincidentes).

2. Recorrendo ao Geogebra, resolve graficamente cada um dos seguintes sistemas de equações:

2.1. $\begin{cases} x + y = 8 \\ y = 2 - x \end{cases}$ **2.2.** $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x + y = -9 \end{cases}$ **2.3.** $\begin{cases} 2y - 3x = 2 \\ y = 1{,}5x + 1 \end{cases}$

3.

3.1. No Geogebra, exibe o quadriculado e traça uma recta qualquer.

3.2. Com a “zona algébrica” activada, procura a equação da recta que traçaste.

3.3. Traça outra recta de modo que o sistema constituído pelas equações dessas rectas seja um sistema impossível. Explica como desenhaste a segunda recta para que o sistema fosse impossível?

3.4. Escreve o sistema obtido com as equações que correspondem às duas rectas.

3.5. Que alterações deverás fazer à segunda recta traçada para encontrar um novo sistema mas agora possível e indeterminado?

3.6. Procede de modo análogo de forma a obteres um sistema possível e determinado e explica como pensaste.

Método de substituição

Com esta tarefa pretende-se que os alunos aprendam a resolver sistemas pelo método de substituição e consolidem a noção de solução de um sistema de duas equações a duas incógnitas.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Equações

- **Subtópicos matemáticos:** Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

- **Capacidades transversais**: Comunicação matemática:
  Raciocínio matemático

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Resolver equações do 1.º grau utilizando as regras de resolução;
  - Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações.

- **Aprendizagens visadas:**
  - Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;
  - Consolidar a noção de solução de um sistema;
  - Interpretar informação, ideias e conceitos representados de diversas formas, incluindo textos matemáticos;
  - Exprimir resultados, processos, e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;
  - Discutir resultados, processos e ideias matemáticos;
  - Seleccionar e usar vários tipos de raciocínio.

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

Notas para o professor:

A partir de alguns exemplos simples e tendo por base a noção de solução de um sistema de duas equações a duas incógnitas pretende-se introduzir o método de substituição.

É aconselhável que as primeiras 5 questões sejam resolvidas a pares ou em grupo, sendo posteriormente indispensável realizar uma discussão com toda a turma sobre estas, de modo a sistematizar o método de substituição, comparando estratégias de substituição para reconhecer as mais adequadas.

A pergunta 7 poderá ser concluída como trabalho de casa.

Tarefa 6 – Método de substituição

1. Por simples observação, é possível ver qual é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - b = 0 \end{cases}$$

És capaz de dizer qual é a solução do sistema sem efectuar qualquer cálculo?
Explica a tua resposta.

2. Considera o seguinte sistema

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$$

2.1. Tendo por base o sistema escreve uma equação onde só apareça a incógnita x.

2.2. Resolve essa equação.

2.3. Determina o valor de y correspondente em cada uma das equações do sistema.

2.4. Faz uma interpretação dos valores de x e y que obtiveste.

3. Para resolver o sistema

$$\begin{cases} 5x - 2y = 20 \\ 5x + 4y = 32 \end{cases}$$

O Luís decidiu usar um processo que lhe pareceu prático:

$$\begin{cases} 5x = 20 + 2y \\ 5x = 32 - 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} \ldots = \ldots \\ 20 + 2y = 32 - 4y \end{cases} \qquad \begin{cases} \ldots = \ldots \\ \ldots = \ldots \end{cases}$$

3.1. És capaz de explicar a resolução do Luís?

3.2. Completa a resolução do sistema.

4. Por vezes a resolução de um sistema pode tornar-se mais simples. Procura resolver o sistema seguinte do modo mais prático possível. Repara que a segunda equação tem apenas uma incógnita.

$$\begin{cases} 5a - 3b = 1 \\ 3a + 2 = 8 \end{cases}$$

5. Considera o sistema seguinte:

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$$

5.1. Resolve uma das equações em ordem a uma das incógnitas.

5.2. Na outra equação substitui a expressão que obtiveste de modo a encontrares uma equação com uma só incógnita.

5.3. Determina a solução do sistema.

6. Averigua se algum dos pares $(3,2)$ e $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ é, ou não, solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2 = \frac{y}{2} \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$$

7. Determina a solução de cada um dos sistemas seguintes:

7.1. $\begin{cases} x = y + 10 \\ x + y = 20 \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 4x - 3y = -11 \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 5x - y = 17 \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3(x + y) = 2 \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 6x + 8y = -5 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$

7.6. $\begin{cases} 2(x - 1) - y = 10 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

Problemas e sistemas de equações

Com esta tarefa pretende-se que os alunos traduzam problemas em linguagem simbólica, por meio de sistemas de equações. Pretende-se, também, que consolidem a sua aprendizagem na resolução de sistemas de equações de duas equações a duas incógnitas.

- **Tema matemático:** Álgebra

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Equações

- **Subtópicos matemáticos:** Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas

- **Capacidades transversais:** Resolução de problemas
  Comunicação matemática

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**

  - Resolver problemas cuja tradução em linguagem matemática seja uma equação do 1.º grau a uma incógnita.

  - Resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução, com parêntesis e denominadores.

  - Resolver sistemas de equações pelo método de substituição;

  - Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações;

- **Aprendizagens visadas:**

  - Resolver problemas envolvendo sistemas de equações;

  - Traduzir problemas por meio de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas;

  - Identificar os dados, as condições e o objectivo do problema;

  - Conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;

  - Averiguar da possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema;

  - Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática;

- Exprimir resultados, processos e ideias matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando a notação, simbologia e vocabulário próprios;
- Discutir resultados, processos e ideias matemáticos.

▶ **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

▶ **Notas para o professor:**

Pretende-se com esta tarefa que os alunos resolvam problemas preferencialmente através da sua tradução simbólica em sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas.

É natural que os alunos apresentem dificuldades na tradução de situações dadas em linguagem natural para sistemas de equações, sendo essas dificuldades idênticas às que já existiam noutras traduções simbólicas. Por isso, é aconselhável discutir com toda a turma essas resoluções, sendo essa uma boa forma de promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e da comunicação matemática, por parte dos alunos. É, também, interessante discutir em grande grupo outras estratégias para a resolução de alguns destes problemas sem recorrer a sistemas de equações, equacionando vantagens e desvantagens da tradução simbólica de algumas situações problemáticas e evidenciando a utilização das expressões algébricas como um auxiliar valioso do pensamento matemático.

Estes problemas podem não ser trabalhados todos na mesma aula, devendo o professor escolher como distribuí-los adequadamente no decorrer das suas aulas.

Tarefa 7 – Problemas

Traduz simbolicamente os seguintes problemas, por meio de sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, e resolve-os.

1. Duas redes telefónicas impõem as seguintes condições:
a rede regional obriga a uma mensalidade de 8€ e depois cobra 15 cêntimos por cada chamada, enquanto que a mensalidade da rede geral é de 9€ e cada chamada é paga a 10 cêntimos.
Usando equações e resolução gráfica de sistemas, explica em que situação é que é mais vantajoso usar cada uma das redes telefónicas.

2. Divide 100 em duas partes, tais que metade de uma delas seja igual a $\frac{1}{3}$ da outra.

3. A diferença de dois números é 300. Se à metade do maior subtrairmos $\frac{2}{3}$ do outro, obteremos 100. Quais são esses números?

4. No parque de estacionamento de uma escola estão cinquenta veículos, entre bicicletas e automóveis. Tendo-se contado cento e quarenta rodas, quantos veículos há de cada tipo?

5. Um casal pesa conjuntamente 115kg. O peso do marido excede o peso da mulher em 30% deste. Quanto pesa cada um?

6. O ângulo externo em B de um triângulo ABC é triplo do ângulo interno em B. Sabendo que a medida do ângulo interno em C é 30°, qual a medida da amplitude do ângulo interno em A?

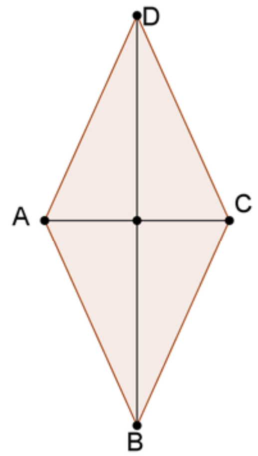
7. O Jorge e o João receberam conjuntamente 60 euros. Se o Jorge desse $\frac{1}{6}$ do dinheiro que recebeu ao João ficariam com a mesma quantia. Que dinheiro recebeu cada um?

8. Sendo x e y o comprimento e a largura de um rectângulo redija o enunciado do problema correspondente ao sistema

$$2x + 2y = 16 \quad \text{e} \quad x = \frac{3}{5}y$$

9. O perímetro de um triângulo isósceles é 60cm. Se a medida do comprimento da base tiver mais 6cm do que o comprimento dos outros lados, quais as dimensões do triângulo?

10. No losango ABCD, de lado igual a 13cm, as diagonais diferem de 14cm e o perímetro do triângulo CDO é de 30cm. Determina a medida do comprimento de cada uma das diagonais.



11. Um problema antigo: Um cavalo e um burro caminham juntos, carregando, cada um, cargas bastante pesadas. Lamentava-se o cavalo do seu pesado fardo, ao que o interrompeu o burro:

– De que te queixas?

– Se eu tomasse um dos teus sacos, a minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um saco, a tua carga igualaria a minha.

Quantos sacos levavam o cavalo e o burro?

12. Num armazém rectangular, o dobro do comprimento é igual ao triplo da largura. Se o armazém tivesse mais 3 metros de largura e menos 3 metros de comprimento, seria um quadrado.

Descobre as dimensões do armazém.