

**Proposta de cadeia de tarefas para o 8.º ano - 3.º ciclo**

**Isometrias**

**Autores: Professores das turmas piloto do 8.º ano de escolaridade**

**Ano Lectivo 2009/2010**

**Outubro de 2010**

## Índice

### Introdução

### Proposta de planificação

### Tarefas

- 1 – Simetrias de figuras (I)
- 2 – Simetrias de figuras (II)
- 3 – Isometrias do plano - rotação
- 4 – Isometrias do plano - reflexão
- 5 – Isometrias do plano - translação
- 6 – Isometrias do plano – reflexão deslizante
- 7 – Adição de vectores/Composição de translações
- 8 – Isometrias com papel e lápis
- 9 – Isometrias em AGD
- 10 – Propriedades das isometrias
- 11 – Dobras e furos

## Introdução

Há conhecimentos dos ciclos anteriores que não foram leccionados a estes alunos e por isso foi necessário decidir a abordagem a fazer tendo em conta que o número de aulas previstas são 6. Escolhemos uma abordagem que, deixando de fora alguns aspectos dos ciclos anteriores (por exemplo o estudo dos frisos e das rosáceas), permite aos alunos trabalhar o essencial do tópico e de forma a privilegiar o desenvolvimento do sentido espacial, da visualização e a compreensão de algumas propriedades de figuras geométricas no plano.

De acordo com os objectivos gerais de aprendizagem propostos para este tema os alunos devem:

- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- compreender e ser capazes de utilizar propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- desenvolver a compreensão das isometrias;
- ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos.

Optou-se por ter também em conta um dos objectivos de aprendizagem previstos para o 2.º ciclo:

- ser capaz de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria.

Além disso, o trabalho a realizar deve ainda contribuir para o desenvolvimento das capacidades transversais indicadas no programa, nomeadamente:

- ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos;
- formular, testar e demonstrar conjecturas.

De acordo com as propostas do programa, utilizamos alguns elementos da arte decorativa (azulejos) para explorar com os alunos aspectos relacionados com as simetrias de figuras no plano.

Optámos por não fazer a caracterização geométrica de frisos, rosáceas, e padrões, utilizando como designação genérica para todos os elementos geométricos a palavra figura.

Acetatos, réguas, esquadros, compassos e programas computacionais de geometria dinâmica (AGD), são recursos particularmente adequados ao estudo deste tópico.



PROPOSTA DE PLANIFICAÇÃO DAS ISOMETRIAS

9 Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos
1+1	Simetrias de uma figura: simetria de reflexão, simetria de rotação	No plano: <ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias de uma figura</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Propor a identificação de simetrias em figuras no plano;</li> <li>✓ Propor a construção de figuras com mais de um eixo de simetria;</li> <li>✓ Na rotação, solicitar a indicação do centro, do sentido e da amplitude do ângulo de rotação</li> <li>✓ Considerar o número de eixos de simetria na classificação de triângulos</li> </ul>	<b>Tarefa 1 + Tarefa 2</b> (em pequenos grupos)	Acetatos com as figuras das tarefas
1	Isometrias no plano: Reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Identificar, predizer e descrever uma isometria, dada a figura geométrica e o transformado;</li> <li>✓ Construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias;</li> <li>✓ Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ No estudo das isometrias recorrer à exploração de obras de arte e artesanato;</li> </ul>	<b>Tarefa 3 + Tarefa 4</b> (em pequenos grupos)	Material de desenho Papel vegetal ou espelhos ou miras
1	Translação associada a um vector	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias;</li> <li>✓ Compreender as noções de vector e de translação e identificar e efectuar translações.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Salientar a distinção entre direcção e sentido.</li> </ul>	<b>Tarefa 5 + Tarefa 6</b> (em pequeno grupo)	Material de desenho Papel e lápis



Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos
2	Propriedades das isometrias	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações.</li> <li>✓ Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vectores.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Propor aos alunos que efectuem translações em papel quadriculado (com instrumentos de medição e desenho) ou usando <i>software</i> de Geometria Dinâmica.</li> <li>✓ Propor a adição geométrica de apenas dois vectores e a determinação do simétrico de um vector.</li> </ul>	<b>Tarefa 7</b>	Papel e lápis
3		<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Reconhecer as propriedades comuns das isometrias</li> <li>✓ Reconhecer que a translação é a única isometria que conserva direcções.</li> <li>✓ Resolver problemas envolvendo a visualização</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>✓ Construção, no plano, de figuras simétricas através de dobragens e recortes e utilizando papel quadriculado.</li> </ul>	<b>Tarefa 8 ou Tarefa 9 + Tarefa 10 + Tarefa 11</b>	Computador e/ou papel e lápis Furadores e quadrados de papel

### Tarefas 1 e 2 – Simetrias de figuras (I) (II)

- Com estas tarefas pretende-se que os alunos compreendam e identifiquem simetrias em figuras limitadas do plano e desenvolvam a capacidade de visualização, tendo por recurso materiais manipuláveis.
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Simetrias de uma figura: simetria de reflexão, simetria de rotação
- Capacidades transversais:
  - Raciocínio matemático: explicar ideias e processos e argumentar.
  - Comunicação matemática: interpretar informação, ideias e conceitos.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Compreender propriedades das figuras geométricas no plano.
  - Fazer classificações
- Aprendizagens visadas
  - Compreender as noções de simetria de reflexão (ou axial) e rotacional e identificar as simetrias de uma figura no plano
- Cadeia: 1ª e 2ª tarefas de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: Acetatos ou papel vegetal com cópia das figuras e transferidor.
- Duração prevista: 1 bloco (90 minutos)
- Notas para o professor:

I. Atendendo ao número reduzido de aulas que atribuímos a este tópico optámos por trabalhar só as simetrias de reflexão e as simetrias de rotação, organizando os alunos em pequenos grupos de trabalho.

Identificar simetrias de reflexão não é uma tarefa estranha para os alunos pois a noção de simetria de uma figura é-lhes familiar e com facilidade nas figuras da Tarefa 1 encontram os eixos de simetria. Contudo a simetria de rotação é um conceito novo e que pode não aparecer como natural aos alunos. É fundamental colocar os alunos a procurar o centro e a amplitude da rotação que transforma a figura numa outra que coincidente com a figura inicial. É necessário que os alunos

assinalem para cada uma das simetrias de rotação o seu centro e a sua amplitude, pois são estes os elementos que definem cada simetria de rotação. O papel vegetal é um material auxiliar muito importante. O transferidor é também um elemento importante a que os alunos podem recorrer sempre que não visualizem o ângulo de rotação.

Pensamos que antes da tarefa 1 o professor deve introduzir, utilizando o retroprojector ou em AGD, o conceito de simetria de reflexão e o conceito de simetria de rotação, para toda a turma, exemplificando com um polígono regular, por exemplo um pentágono.

Em relação à tarefa 2 os alunos podem definir livremente os vários grupos, desde que enunciem claramente as suas características principais.

É natural que alguns alunos considerem que a figura D tem dois eixos de simetria e que outros considerem que não tem eixos de simetria. Serve a discussão para salientar as limitações das representações e das capacidades visuais de cada um. É também esperado que alguns alunos considerem, erradamente, que a figura G tem eixos de simetria paralelos aos lados.

II. Considera-se que uma figura tem uma **simetria** quando, sujeita a uma transformação, fica invariante, isto é, a figura que se obtém coincide, ponto por ponto, com a própria figura. As transformações possíveis correspondem a quatro movimentos básicos:

- uma rotação com centro em um ponto da figura e com uma determinada amplitude (amplitude do ângulo descrito por cada um dos pontos da figura) (a);
- uma reflexão segundo um eixo(b);
- uma reflexão segundo um eixo, seguida de um deslocamento com a direcção desse eixo (c);
- um deslocamento segundo um determinado vector (d).

A cada um dos movimentos básicos considerados corresponde uma simetria. Assim, existem quatro **tipos de simetrias** de uma figura plana – **simetria de rotação** (a), **simetria de reflexão** (b), **simetria de reflexão deslizante** (c) e **simetria de translação** (d).

O professor deve tornar claro aos alunos que no estudo das figuras se deve ter em conta os seus motivos decorativos.

Os motivos decorativos são importantes por que, por exemplo, um círculo tem infinitas simetrias de reflexão e de rotação, mas o elemento decorativo ao lado, apesar de ser circular, só tem 4 simetrias de rotação (90°, 180°, 270° e 360°) e não tem simetrias de reflexão.



Nas simetrias de rotação só considerámos as amplitudes entre 0° e 360°, sendo que todas as figuras têm simetria de rotação de 360° (identidade).

Nas figuras que têm motivos decorativos é importante analisar os motivos que se repetem e a forma como se repetem.

É importante que o professor associe a cada figura os movimentos do plano que a deixam invariante, isto é que a deixam a coincidir, ponto por ponto, com ela própria.

**Palavras chave:** simetria, simetria de reflexão, simetria rotacional, simetria de rotação.

## Tarefa 1 – Simetrias de figuras (I)

Considera-se que uma figura tem **simetria** quando, sujeita a uma transformação, fica invariante, isto é, a figura que se obtém coincide com a figura inicial. As transformações que vamos considerar são:

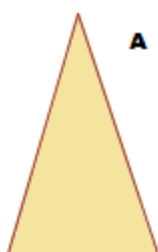
- reflexão segundo um eixo – **simetria de reflexão**
- rotação com centro em um ponto da figura e com uma determinada amplitude – **simetria de rotação**

1. Vamos identificar simetrias nos polígonos desenhados em baixo.

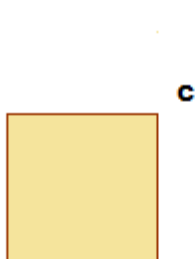
1.1 Desenha em cada um dos polígonos todos os seus eixos de simetria (caso existam).

1.2 Indica todas as simetrias de rotação de cada uma das figuras. Não te esqueças que, para cada simetria de rotação, tens de identificar o seu centro e a sua amplitude.

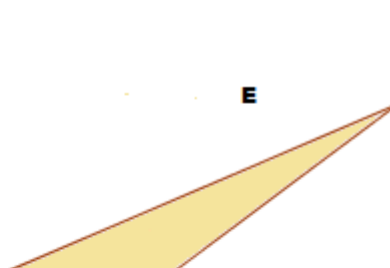
**Nota:** Para descobrires as **simetrias de rotação de uma figura** podes utilizar um bocado de acetato ou papel vegetal com a figura desenhada e rodá-lo em torno de um ponto da figura em estudo até que a figura do acetato coincida com ela.



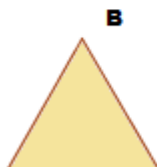
A



C



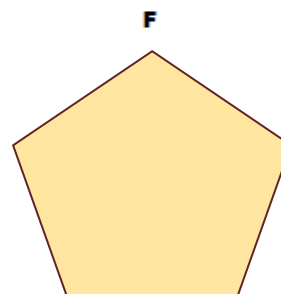
E



B



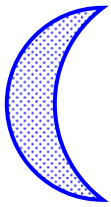
D



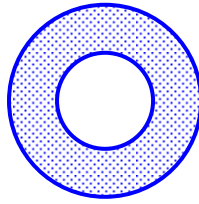
F



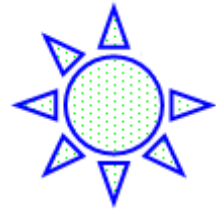
2. Em baixo estão várias figuras.



A



B



C



E



D



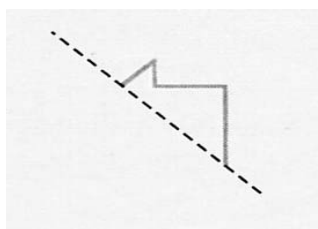
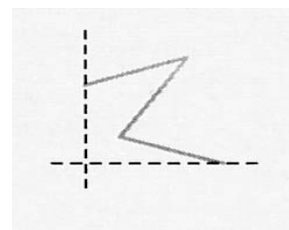
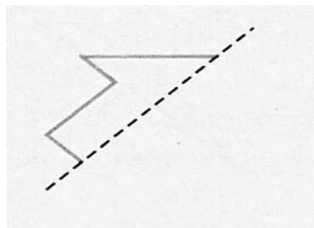
F

Sempre que existam,

2.1 regista no teu caderno **as simetrias de rotação de cada uma das figuras;**

2.2 desenha **os eixos de simetria de cada uma das figuras.**

3. Completa cada uma das três figuras, sabendo que as rectas a tracejado são eixos de reflexão.

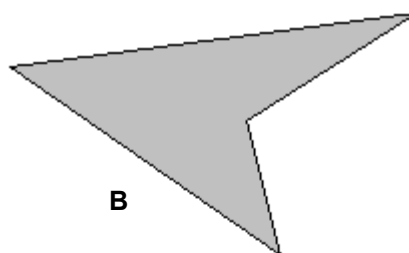


### Tarefa 2 – Simetrias de figuras (II)

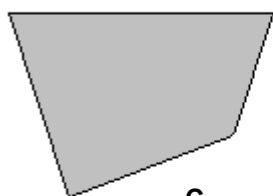
Agrupa os seguintes quadriláteros, consoante as simetrias que possuem. Explica as características dos grupos que organizaste.



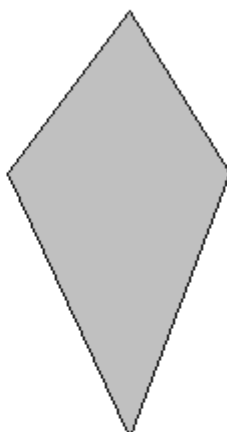
A



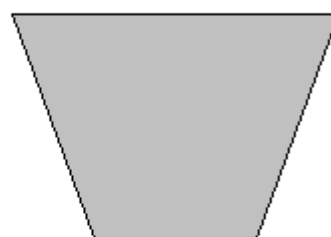
B



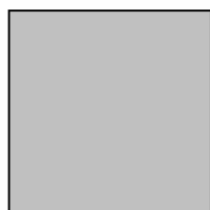
C



D



E



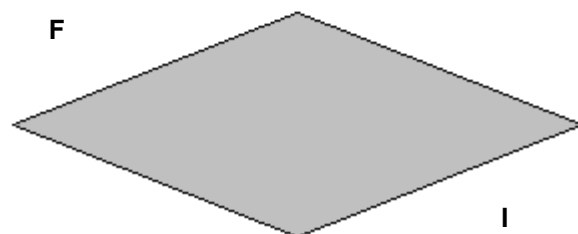
F



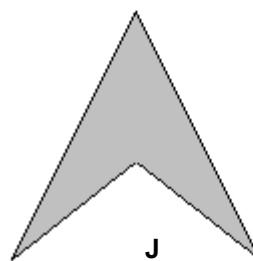
G



H



I



J

### Tarefas 3, 4, 5 e 6 – Isometrias do plano

- Com estas tarefas pretende-se que os alunos identifiquem, visualizem e descrevam rotações do plano (tarefa 3), reflexões do plano (tarefa 4), translações do plano (tarefa 5) e reflexões deslizantes do plano (tarefa 6).
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Isometrias no plano: reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante
- Capacidades transversais:
  - Raciocínio matemático: explicar ideias e processos.
  - Comunicação matemática: interpretação e discussão.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Visualizar e descrever movimentos;
  - Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais.
- Aprendizagens visadas
  - Identificar, predizer e descrever uma isometria, dada a figura geométrica e o transformado;
  - Construir o transformado de uma figura a partir de uma isometria
  - Completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias;
  - Compreender as noções de vector e de translação e identificar e efectuar translações.
- Cadeia: 3ª, 4ª, 5ª e 6ª tarefas de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: material de desenho, papel vegetal, acetatos com cópia das figuras, alfinetes, material de desenho, espelhos ou miras.
- Duração prevista: 2 blocos de 90 minutos

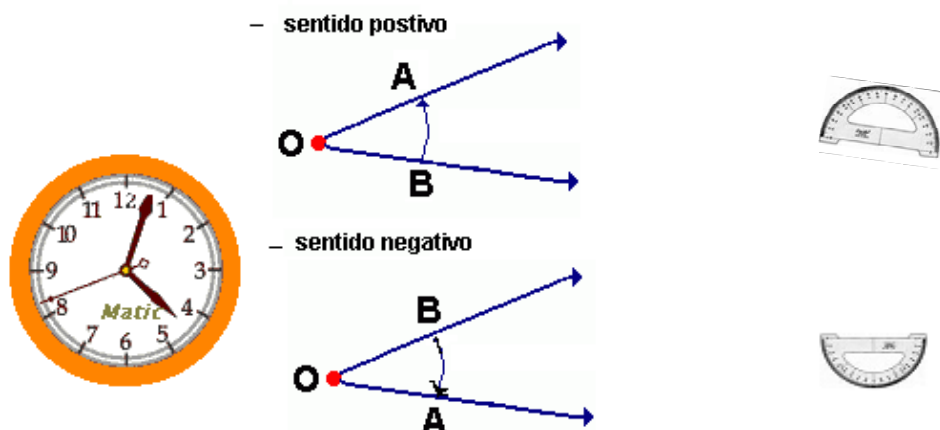
- Notas para o professor:

Apesar de no início de cada uma das tarefas que se seguem (da 3 à 6), estar definida a isometria em causa, é necessário que em alguma altura o professor identifique **isometria** como a transformação geométrica que preserva a distância entre pontos e conseqüentemente a amplitude dos ângulos. Uma isometria transforma uma figura numa outra congruente.

Uma outra ideia importante a transmitir aos alunos é que a isometria é de todos os pontos do plano, apesar de em cada caso só centrarmos a nossa atenção num determinado número de pontos, aqueles dos quais queremos conhecer o transformado.

A construção do transformado de uma figura através de uma rotação, principalmente se o centro for um ponto exterior ao centro geométrico da figura, é uma proposta de difícil realização para os alunos. Consideramos que é importante que os alunos tenham esta experiência, mas pensamos que não se deve valorizar em demasia esta tarefa já que o seu sucesso depende da destreza de utilização do transferidor, que à partida sabemos que muitos alunos não têm.

Os alunos têm que perceber que para marcar o ângulo de rotação com a ajuda do transferidor, a sua colocação depende do ângulo ter amplitude negativa ou amplitude positiva.



Outro aspecto que também pode criar alguma dificuldade é a introdução do motivo geométrico do azulejo do Alhambra, que apesar de responder a uma das solicitações do programa (*No estudo das isometrias recorrer à exploração de obras de arte e artesanato.*), é mais difícil “rodá-lo” do que qualquer polígono, por exemplo um quadrilátero. De acordo com a turma, o professor deve ou não utilizar o motivo proposto na tarefa 3.

Na tarefa 5 é introduzido o conceito de translação associada a um vector e na tarefa 6 a noção de vector é novamente utilizada na definição de reflexão deslizante. O conceito de vector aparece pela primeira vez no programa do 3.º ciclo. A translação é agora tratada utilizando uma abordagem vectorial.

Estas tarefas foram pensadas para os alunos trabalharem em pequenos grupos.

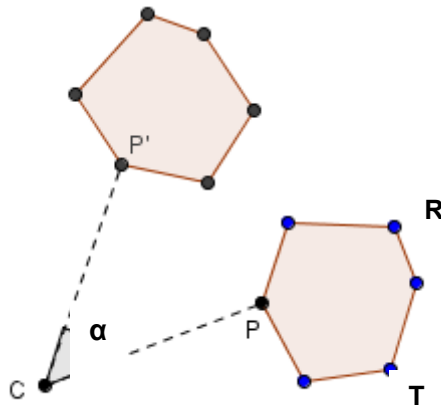
Palavras chave: [isometria](#), [rotação](#), [reflexão](#), [translação](#), [reflexão deslizante](#).

### Tarefa 3 – Isometrias do plano – Rotação

Uma **rotação** de centro em  $C$  e ângulo de rotação  $\alpha$  (por exemplo  $60^\circ$ ) transforma um ponto  $P$  do plano num ponto  $P'$  tal que o segmento  $CP$  é igual ao segmento  $CP'$  e o ângulo  $PCP'$  tem amplitude  $\alpha$ .

1. O ponto  $P'$  é o transformado de  $P$  numa rotação de centro em  $C$  e amplitude  $\alpha$ .

1.1 Observa a figura e mede a amplitude do ângulo de rotação  $PCP'$ .



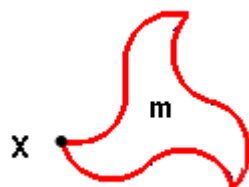
1.2 Assinala na figura o transformado dos pontos  $R$  e  $T$ .

2. A figura  $m$  é um motivo, retirado de um azulejo de uma parede do palácio do Alhambra.

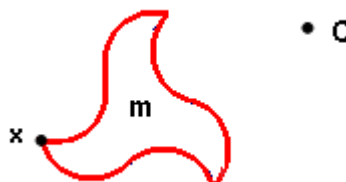
2.1 Desenha a imagem de  $m$  resultante da rotação do plano de centro em  $X$  e amplitude  $60^\circ$ .



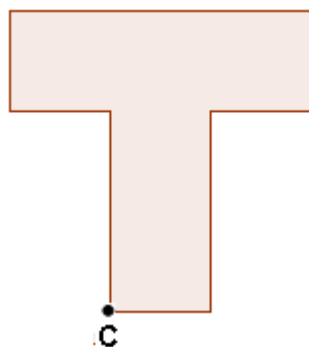
Azulejo do Palácio do Alhambra, em Granada, cidade no Sul de Espanha



**2.2** Desenha a imagem de **m** associada à rotação do plano de centro em **C** e amplitude  $70^\circ$  com o ângulo marcado no sentido dos ponteiros do relógio.



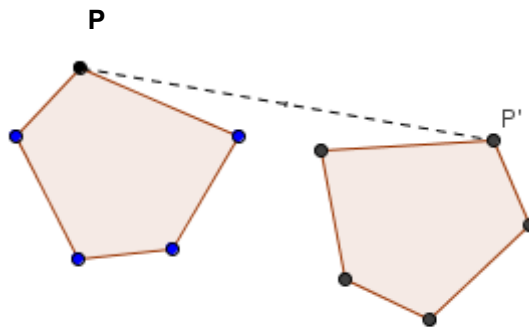
**3.** Constrói uma imagem da letra T da figura, através da rotação do plano de centro em C e amplitude  $90^\circ$  com o ângulo marcado no sentido dos ponteiros do relógio.



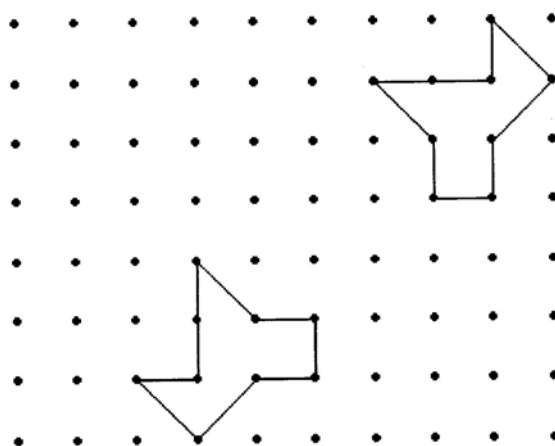
**Tarefa 4 – Isometrias do plano - Reflexão**

**A reflexão do plano** de eixo AB transforma qualquer ponto P do plano num ponto P' tal que o eixo de reflexão AB é a mediatriz do segmento PP'

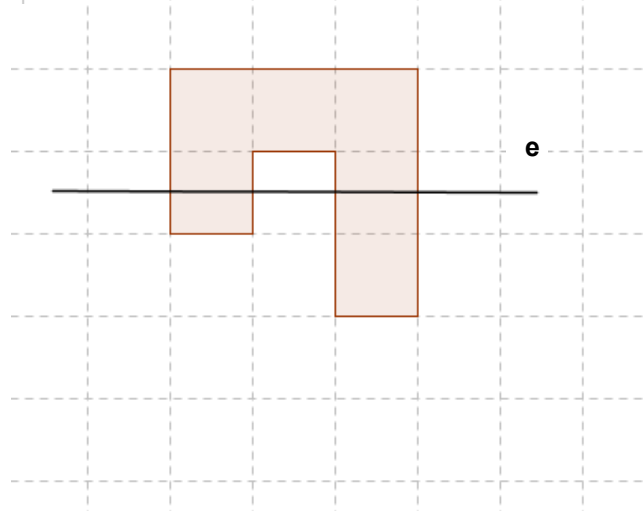
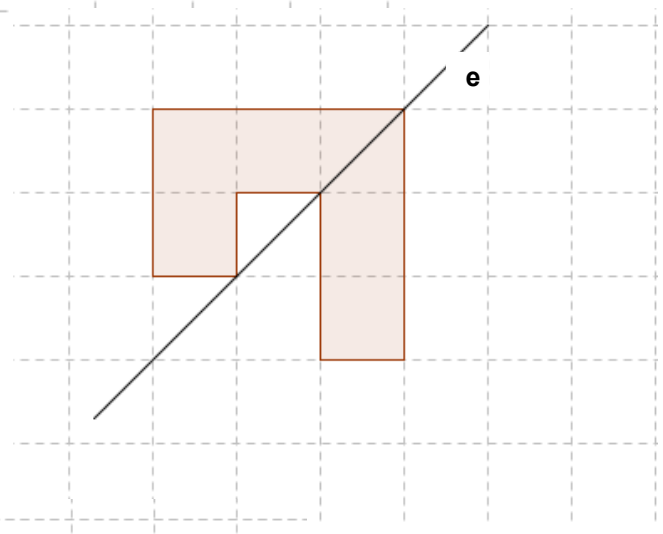
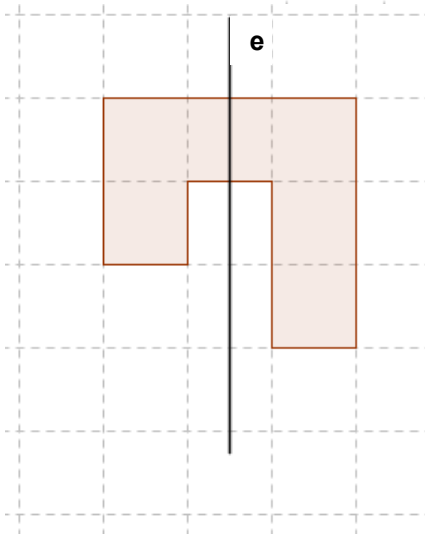
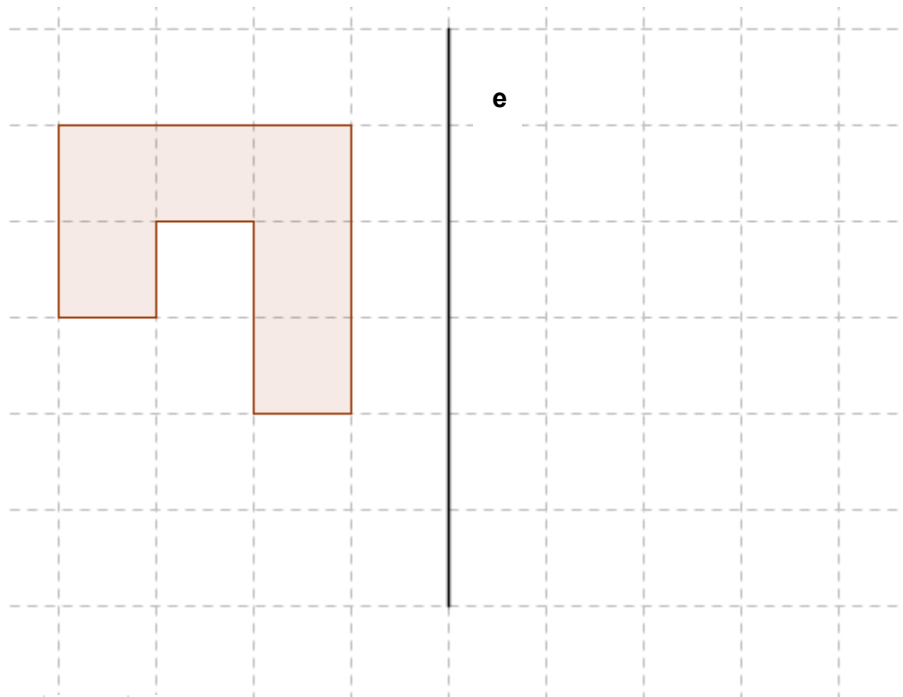
1. O vértice P' é a imagem do vértice P do pentágono da figura pela **reflexão do plano** de eixo AB. Desenha, com régua e compasso, o eixo de reflexão AB.



2. Desenha o eixo de reflexão que permite transformar um dos polígonos no outro.



3. Em cada caso, representa a imagem reflectida da figura pela reflexão de eixo  $e$ .

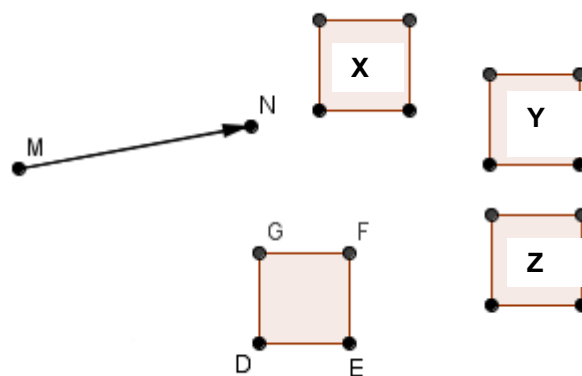




**Tarefa 5 – Isometrias do plano - Translação**

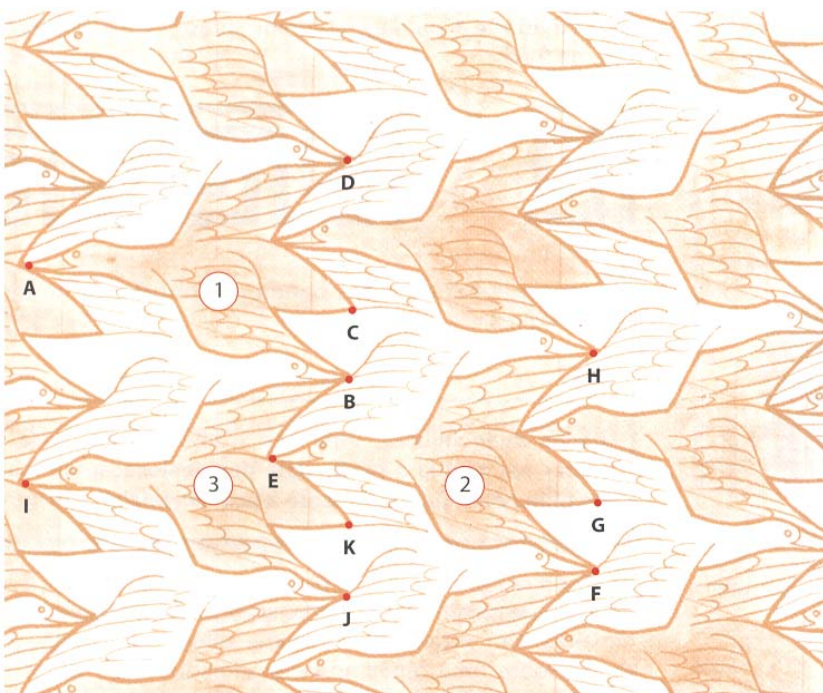
**A translação do plano** associada a um vector transforma qualquer ponto P do plano num ponto P' tal que o segmento PP' tem a mesma direcção, comprimento e sentido do vector considerado.

1. Indica o quadrado que é a imagem do quadrado DEFG na **translação do plano** associada ao vector MN.



2. A figura, em baixo, é um desenho de Maurits Cornelis **Escher**, um artista gráfico holandês cuja obra se apoiou muito em conceitos matemáticos.

Observa no desenho de M. C. Escher os pássaros brancos e os pássaros cinzentos.

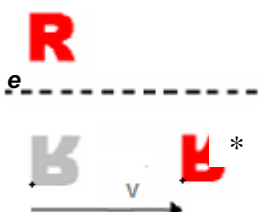


- 2.1** Na translação associada ao vector CG, qual é a imagem do pássaro 1?
- 2.2** Na translação associada ao vector CG, quais são as imagens de cada um dos pontos A, B, C e D?
- 2.3** Considera agora a translação que transforma o ponto A no ponto I. Nesta translação, qual é a imagem,
- a. do pássaro 1?
  - b. dos pontos B, C e D?

### Tarefa 6– Isometrias do plano – Reflexão deslizante

**A reflexão deslizante do plano** associada ao eixo  $e$  e ao vector  $CD$ , paralelo a  $e$ , é o resultado da reflexão associada ao eixo  $e$  seguida da translação associada ao vector  $CD$  ou vice versa.

Exemplo:



A letra assinalada com um \*, é a imagem da letra  $R$  na reflexão deslizante do plano associada ao eixo  $e$  e ao vector  $v$ .

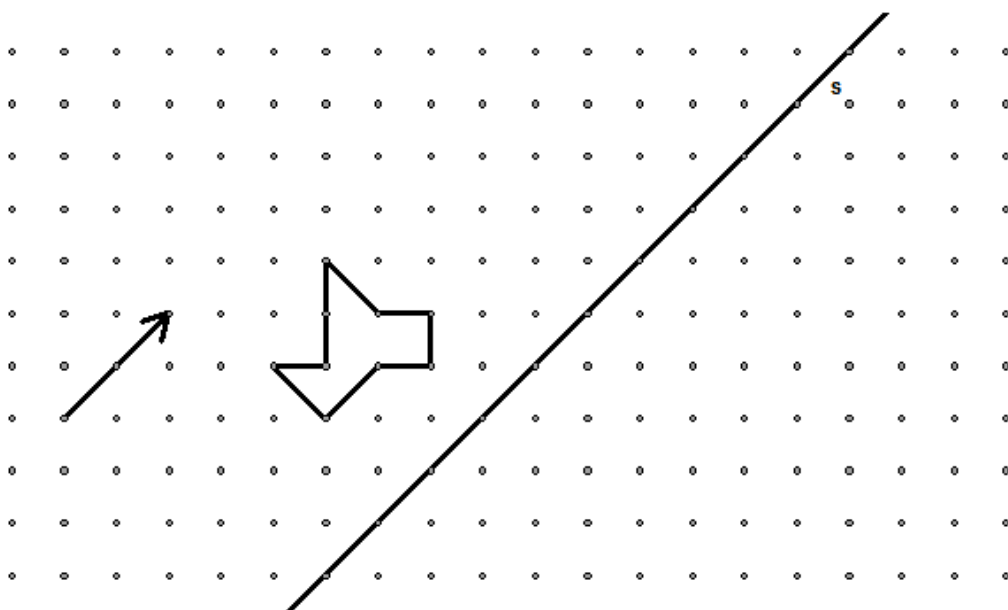
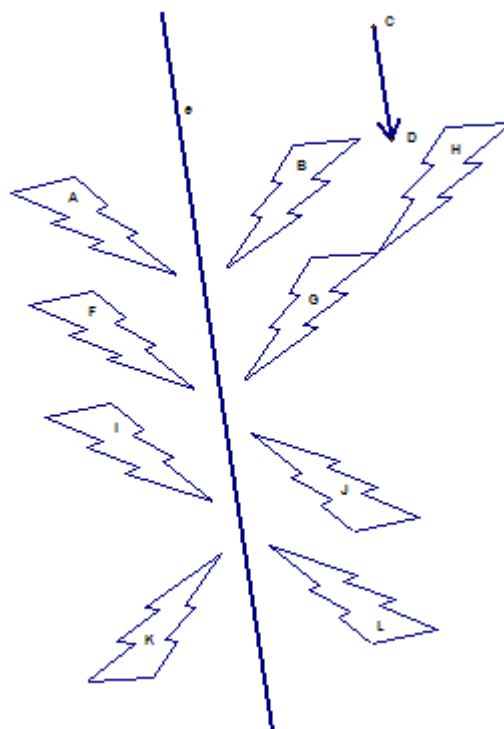
1. Observa a figura que se segue.

1.1 Indica a letra correspondente à imagem da figura  $A$  na reflexão deslizante do plano associada ao eixo  $e$  e ao vector  $CD$ .

1.2 A figura  $B$  é a imagem da figura  $F$  na reflexão deslizante do plano associada ao eixo  $e$  e a um determinado vector. Caracteriza o vector.

1.3 Indica a letra correspondente à imagem da figura  $J$  na reflexão deslizante do plano associada ao eixo  $e$  e ao vector  $CD$ .

2. Desenha o transformado do polígono na reflexão deslizante associada ao eixo  $s$  e ao vector representado.



### Tarefa 7 - Adição de vectores/composição de translações

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos tenham a possibilidade de aprofundar o estudo das isometrias através da abordagem vectorial.
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Adição de vectores e composição de translações
- Capacidades transversais:
  - Raciocínio matemático: explicar ideias e processos.
  - Comunicação matemática: interpretação e discussão.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Caracterizar um vector
  - Associar um vector à translação
  - Visualizar e descrever movimentos;
  - Resolver problemas envolvendo a visualização e a compreensão de relações espaciais.
- Aprendizagens visadas
  - Identificar e utilizar as propriedades de invariância das translações.
  - Compor translações e relacionar a composição de translações com a adição de vectores.
- Cadeia: 7ª tarefas de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: material de desenho.
- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos
- Notas para o professor:
  - Este assunto está presente em todos os manuais escolares do 8.º ano, pelo que o professor tem mais um recurso que poderá utilizar. Nos casos em que há um manual adoptado é uma oportunidade de poder recorrer ao manual do aluno

Palavras chave: translação, vector, adição de vectores, composição de translações.

**Tarefa 7– Adição de vectores /composição de translações**

1. Observa o polígono.



Figura 1

1. Copia para o teu caderno o polígono e o vector  $\vec{u}$  e obtém a imagem do polígono segundo a translação associada
  - 1.1. ao vector  $\vec{u}$ ;
  - 1.2. ao simétrico do vector  $\vec{u}$  (vector  $-\vec{u}$ );
  - 1.3. a um vector  $\vec{v}$  com a mesma direcção e sentido de  $\vec{u}$  mas comprimento diferente;
  - 1.4. a um vector  $\vec{z}$  com direcção diferente de  $\vec{u}$  mas com o mesmo comprimento.

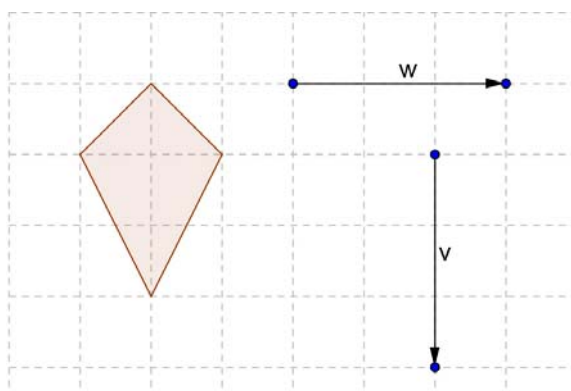
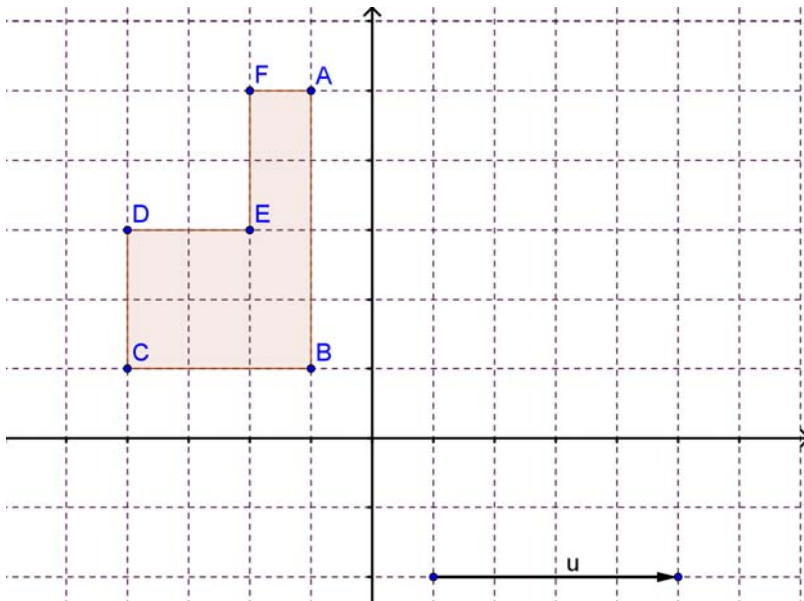


Figura 2

2. Copia para o teu caderno o quadrilátero da figura 2 e os vectores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .
  - 2.1. Determina a imagem do quadrilátero segundo a translação associada ao vector  $\vec{w}$ .
  - 2.2. Determina a imagem da figura, que obtiveste na alínea anterior, na translação associada ao vector  $\vec{v}$ .
  - 2.3. Identifica o vector que transforma directamente a figura dada na figura obtida na alínea b.

3. Observa o referencial cartesiano da figura.



será verdadeira para qualquer vector?

3.1. Indica, no teu caderno, as coordenadas dos pontos assinalados na figura 3.

3.2. Determina a imagem da figura 3 na translação associada ao vector  $u$ .

3.3. Quais são as coordenadas das imagens dos pontos assinalados.

3.4. Compara a abcissa dos pontos da figura 3 e das respectivas imagens, com o comprimento do vector  $u$  e descreve a relação que existe. A relação que descobriste

4. Observa o trapézio da figura 4.

4.1. Indica as coordenadas dos vértices do trapézio.

4.2. Desenha a imagem do trapézio pela translação associada ao vector  $\overline{u+v}$ .

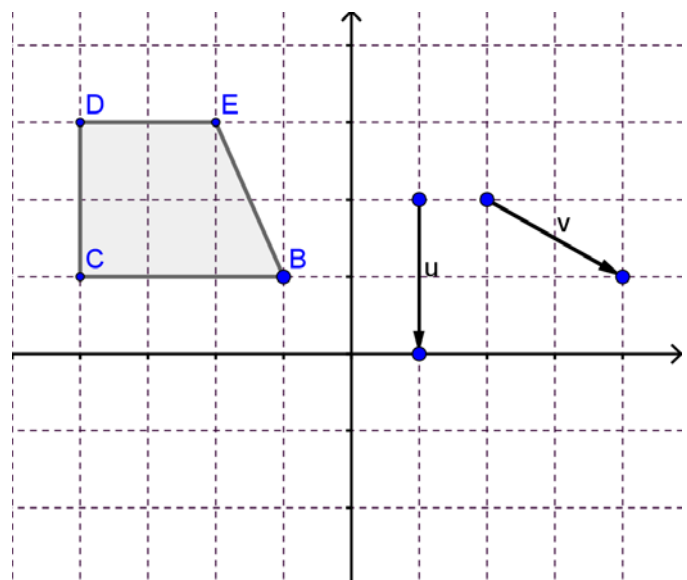


Figura 4

### **Tarefa 8 - Isometrias e simetrias com papel e lápis**

- Com esta tarefa pretende-se trabalhar com isometrias e simetrias em figuras limitadas do plano e contribuir para desenvolver a capacidade de visualização.
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Resolução de problemas envolvendo isometrias e simetrias
- Capacidades transversais:
  - Resolução de problemas: compreensão do problema e utilização de estratégias adequadas;
  - Raciocínio matemático: selecção e utilização de métodos matemáticos para resolver problemas.
  - Comunicação matemática: interpretação de enunciados, justificação de raciocínios, desenvolvimento e discussão de argumentos.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Identificar isometrias no plano e simetrias em figuras no plano.
- Aprendizagens visadas
  - Resolver problemas utilizando o conhecimento adquirido sobre isometrias e simetrias.
- Cadeia: 8ª tarefa de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: Acetatos ou papel vegetal e material de desenho e medida.
- Duração prevista: (Os problemas são para irem sendo resolvidos ao longo da leccionação do tópico)
- Notas para o professor:
  - A resolução destes problemas com papel, lápis e material de desenho deve promover a aprendizagem matemática e contribuir para que os alunos gostem da matemática. Permite reconhecer e aplicar ideias matemáticas. Espera-se que os alunos sejam capazes de resolver as situações com autonomia.
  - Para o tempo disponível, o professor deve seleccionar os problemas que considerar mais significativos, sugerindo que os restantes sejam para trabalho de casa, ou ir resolvendo os problemas ao longo da unidade.

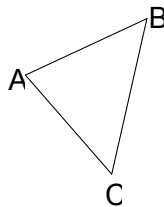
Palavras chave: isometrias, simetrias, translação, reflexão, rotação, vector, adição de vectores, composição de translações, resolução de problemas.

**Tarefa 8 - Isometrias e simetrias com papel e lápis**

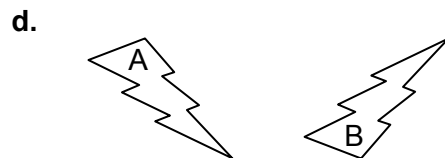
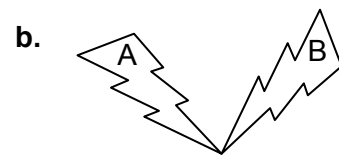
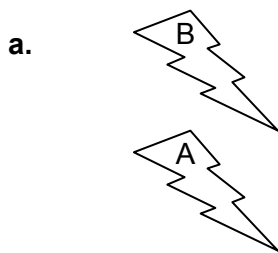
1. Para cada uma das figuras seguintes, identifica as simetrias de rotação.



2. Desenha, no teu caderno, o triângulo  $A'B'C'$ , imagem do triângulo  $ABC$  na rotação de centro  $A$  e amplitude  $180^\circ$ .

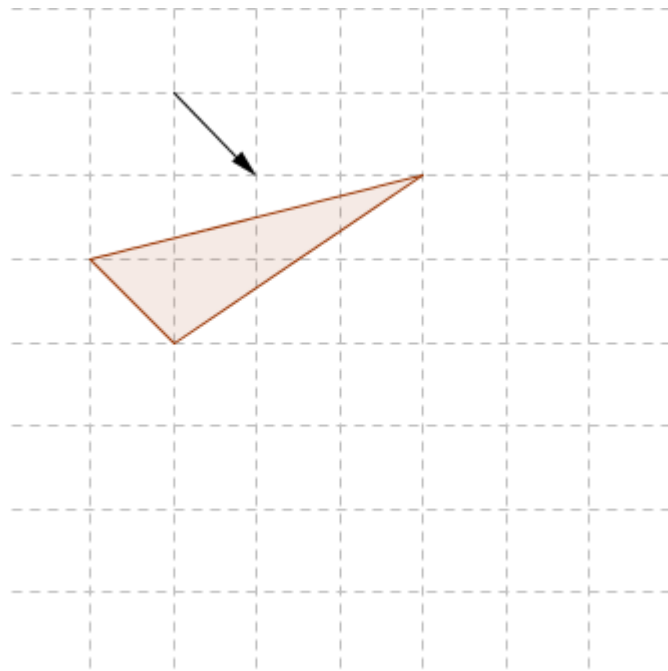


3. Em todas as alíneas, a figura B foi obtida da figura A por uma isometria. Identifica cada uma das isometrias usadas.



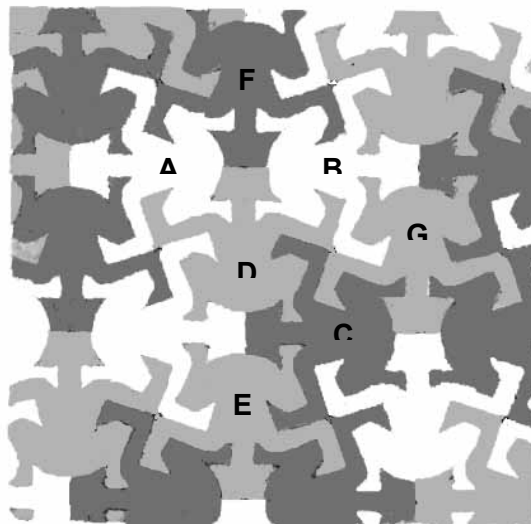
4. Desenha hexágonos com: 0 eixos de simetria, com 1 eixo de simetria, com 2...  
Investiga qual o número máximo de eixos de simetria que um hexágono pode ter.

5. Observa a figura seguinte:



Desenha o transformado do polígono apresentado pela translação associada ao vector representado.

6. O desenho seguinte é da autoria do artista M.C. Escher. No desenho há um motivo que se repete.



6.1. Em cada caso caracteriza a isometria que te permite obter:

6.1.1. o motivo B a partir do motivo A;

6.1.2. o motivo C a partir do motivo B;

6.1.3. o motivo E a partir do motivo F;

6.1.4. o motivo D a partir do motivo B.

6.2. Que posição ocupa o motivo D quando B se transforma em D? E o motivo C?



### Tarefa 9 – Isometrias e simetrias em AGD

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos trabalhem com isometrias em figuras limitadas do plano num ambiente de geometria dinâmica de modo a contribuir para desenvolver a sua capacidade de visualização.
- 
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Resolução de problemas envolvendo isometrias e simetrias
- Capacidades transversais:
  - Resolução de problemas: compreensão do problema e utilização de estratégias adequadas;
  - Raciocínio matemático: selecção e utilização de métodos matemáticos para resolver problemas.
  - Comunicação matemática: interpretação de enunciados, justificação de raciocínios, desenvolvimento e discussão de argumentos.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Identificar isometrias no plano e simetrias em figuras no plano.
- Aprendizagens visadas
  - Resolver problemas utilizando o conhecimento adquirido sobre isometrias e simetrias e um programa de geometria dinâmica.
- Cadeia: 8ª tarefa de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: computador e Geogebra.
- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos
- Notas para o professor:
  - A resolução destes problemas com papel, lápis e material de desenho deve promover a aprendizagem e o gosto pela matemática.
  - Espera-se que os alunos sejam capazes de resolver as situações com autonomia.
  - Para o tempo que tem disponível, o professor deve seleccionar os problemas que considerar mais significativos.
  - Para resolver as questões 3 e 4 o professor deve construir um ficheiro com as respectivas figuras.

Palavras chave: isometrias, simetrias, translação, reflexão, rotação, vector, adição de vectores, composição de translações, resolução de problemas.

### Tarefa 9 – Isometrias e simetrias em AGD

1. Desenha uma figura com:
  - 0 eixos de simetria
  - Só com 1 eixo de simetria
  - Só com 1 eixo de simetria e com mais de três lados
  - Só com 2 eixos de simetria
  - Só com 2 eixos de simetria e que não seja um rectângulo
  - Só com 3 eixos de simetria
  - Só com 5 eixos de simetria

Desenha um polígono só com 2 eixos de simetria e que não seja um rectângulo. Poderá este polígono ter um número ímpar de lados?

2. Desenha a figura sabendo que a amplitude do ângulo  $\beta$  é igual a  $50^\circ$ .

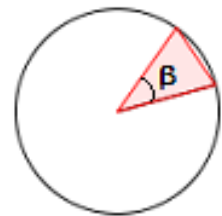


Figura 1

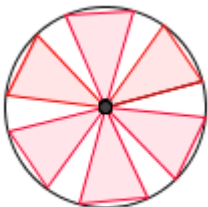


Figura 2

Usando apenas os menus referentes às **transformações geométricas** faz as transformações geométricas necessárias para chegar à figuras 2.

Vai anotando as transformações que realizas.

3. Abre o ficheiro correspondente ao azulejo da figura 3. A partir dele obtém um painel (de dois ou mais azulejos) por:

- a. Translações.
- b. Rotações.
- c. Reflexões.
- d. várias transformações.



Figura 3

4. Abre o ficheiro correspondente à figura 4.

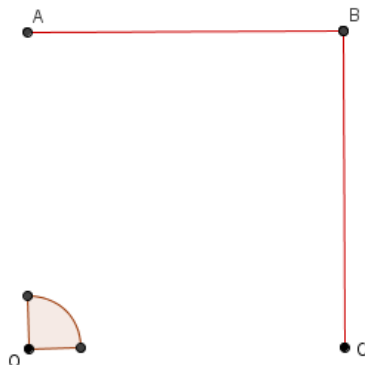


Figura 4

Os pontos O, A, B e C formam um quadrado.

A partir da figura 4 e usando o mais possível **transformações geométricas** constrói a figura 5.

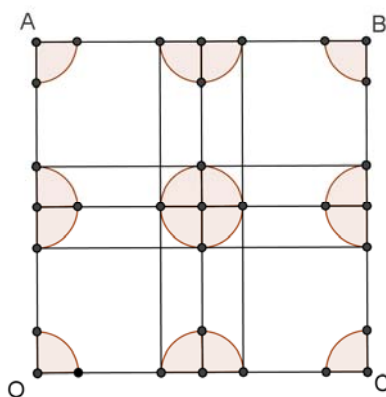


Figura 5

À medida que vais realizando o trabalho vai anotando os passos que fores fazendo no Geogebra para construíres a figura 5.

(adaptação de uma tarefa proposta na acção de formação *Transformações Geométricas e Simetria* da APM)

### Tarefa 10

- Com estas tarefas pretende-se que os alunos compreendam e identifiquem as propriedades das isometrias, que reconheçam que a translação é a única isometria que preserva as direcções e que a reflexão é a única isometria que não preserva o sentido dos ângulos.
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Propriedades das isometrias
- Capacidades transversais:
  - Raciocínio matemático: explicar ideias e processos.
  - Comunicação matemática: interpretação e discussão.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Caracterizar uma isometria.
- Aprendizagens visadas
  - Compreender os elementos geométricos que são preservados em cada uma das isometrias.
  - Compreender a relação entre as propriedades das isometrias e a preservação das distância.
- Cadeia: 10ª tarefa de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: Acetatos ou papel vegetal e material de desenho e medida.
- Duração prevista: 1 bloco (90 minutos)
- Notas para o professor:

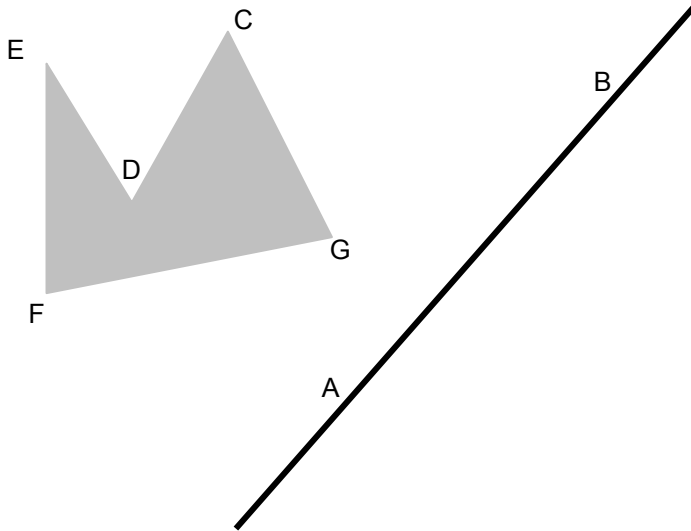
Apesar de no início de cada uma das tarefas que se seguem (da 3 à 6), estar definida a isometria em causa, é necessário que pelo menos no final destas tarefas o professor as identifique como isometrias, referindo o que isso significa ( transformação geométrica que preserva as distâncias entre pontos e conseqüentemente a amplitude dos ângulos).

Palavras chave: isometrias, simetrias, translação, reflexão, rotação, vector, adição de vectores, composição de translações, resolução de problemas.

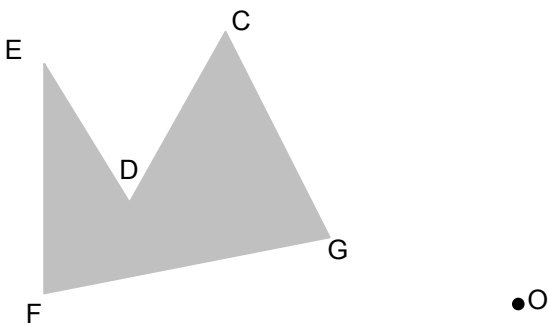
**Tarefa 10 - Propriedades das Isometrias**

1. Vais investigar as propriedades das isometrias.

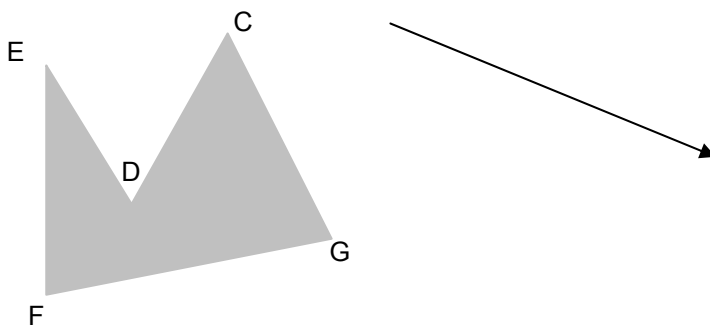
1.1. Desenha a imagem da figura na reflexão de eixo AB.



1.2. Desenha a imagem da figura na rotação de centro O e amplitude  $-60^\circ$ .



1.3. Desenha a imagem da figura na translação associada ao vector indicado.



1.4. Com o que foste aprendendo sobre isometrias, analisa cuidadosamente cada uma das transformações anteriores e preenche o quadro que se segue, indicando as afirmações verdadeiras e as falsas.

	<b>Verdadeiro</b>	<b>Falso</b>
<b>Numa reflexão a imagem de um segmento de recta é sempre um segmento de recta paralelo ao primeiro.</b>		
<b>Numa reflexão a imagem de um segmento de recta é sempre um segmento de recta de igual comprimento (congruente).</b>		
<b>Numa reflexão a distância de um ponto ao eixo de reflexão é igual à distância da sua imagem ao mesmo eixo.</b>		
<b>Numa reflexão a imagem de um ângulo é sempre um ângulo de igual amplitude.</b>		
<b>Numa reflexão o sentido dos ângulos é preservado.</b>		
<b>Toda a reflexão é uma semelhança.</b>		
<b>Numa rotação a imagem de um segmento de recta é sempre um segmento de recta paralelo ao primeiro.</b>		
<b>Numa rotação a imagem de um segmento de recta é sempre um segmento de recta de igual comprimento (congruente).</b>		
<b>Numa rotação a distância de um ponto ao centro da rotação é igual à distância da sua imagem ao mesmo centro.</b>		
<b>Numa rotação a imagem de um ângulo é sempre um ângulo de igual amplitude.</b>		
<b>Numa rotação o sentido dos ângulos é preservado.</b>		
<b>Toda a rotação é uma semelhança.</b>		
<b>Numa translação a imagem de um segmento de recta é sempre um segmento de recta paralelo ao primeiro.</b>		
<b>Numa translação a imagem de um segmento de recta é sempre um segmento de recta de igual comprimento (congruente).</b>		
<b>Numa translação a distância de qualquer ponto à sua imagem é sempre igual ao comprimento do vector associado à translação.</b>		
<b>Numa translação a imagem de um ângulo é sempre um ângulo de igual amplitude.</b>		
<b>Numa translação o sentido dos ângulos é preservado.</b>		
<b>Toda a translação é uma semelhança.</b>		

2.

2.1. Numa reflexão, em que situação é que a imagem de um segmento de recta é um segmento de recta paralelo ao primeiro? Ilustra com um desenho.

2.2. Numa rotação, em que situação é que a imagem de um segmento de recta é um segmento de recta paralelo ao primeiro? Ilustra com um desenho.

2.3. Desenha dois triângulos iguais (congruentes) em que um seja a imagem do outro por meio de uma translação.

2.4. Desenha dois rectângulos iguais (congruentes) em que um **não** seja a imagem do outro por meio de uma translação.

3. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. No caso das falsas justifica apresentando um exemplo.

3.1. Se dois pentágonos regulares são semelhantes, um deles é sempre imagem do outro por meio de uma translação.

3.2. Se dois hexágonos são iguais (congruentes) então um deles é sempre imagem do outro por meio de uma translação.

### Tarefa 11 - Dobras e furos

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade de visualização que neste tópico tem vindo a ser reforçada pelo conhecimento das isometrias.
- Tema matemático: Geometria
- Nível de ensino: 3.º ciclo
- Tópicos matemáticos: Isometrias
- Subtópicos matemáticos:
  - Propriedades das isometrias
- Capacidades transversais:
  - Raciocínio matemático: explicar ideias e processos.
  - Resolução de problemas: conceber e pôr em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados.
- Conhecimentos prévios dos alunos:
  - Caracterizar uma isometria.
- Aprendizagens visadas
  - Resolver problemas e desenvolver a capacidade de visualização
- Cadeia: 11ª tarefa de “Isometrias – 8.º ano”
- Recursos: quadrados de folhas de papel e furadores.
- Duração prevista: 1 bloco (90 minutos)
- Notas para o professor:

Esta tarefa pode ser considerada como suplementar, atendendo ao material que requer e às características da turma.

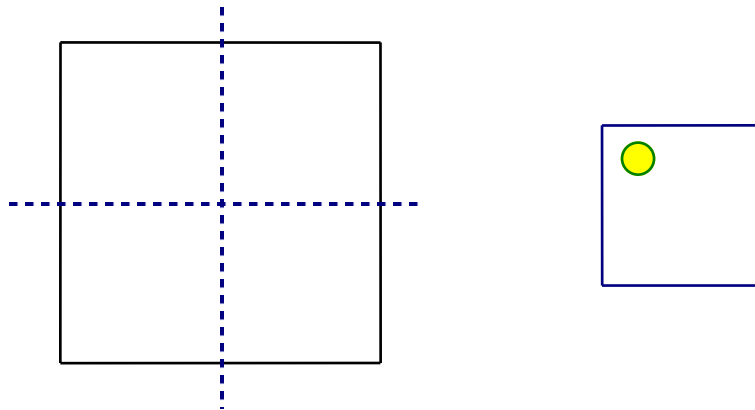
Apesar do grau de complexidade da tarefa, o facto de ter questões de diversos níveis de dificuldade permite o envolvimento de todos os alunos da turma. A discussão com a turma pode proporcionar uma troca de ideias interessante, pelo facto de se obterem diferentes soluções para a questão 4 atendendo a que se está a utilizar um furador circular e por isso com simetrias. Um bom desafio é pensar com os alunos o que acontece quando o furo é uma figura que não tem simetrias (questão 5).

**Palavras chave:** isometrias, simetrias, translação, reflexão, rotação, vector, composição de translações, resolução de problemas, visualização.



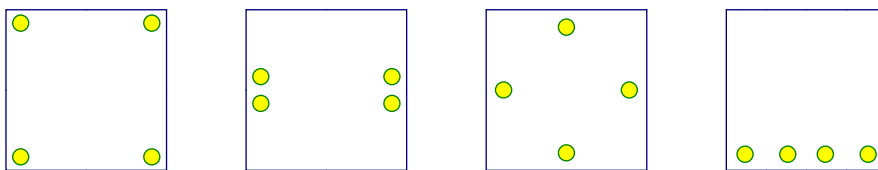
**Tarefa 11 - Dobras e furos**

1. Dobra um quadrado duas vezes como está indicado na figura. Depois faz um furo circular como também está indicado.
2. Desenha o que achas que vais ver quando abrires.



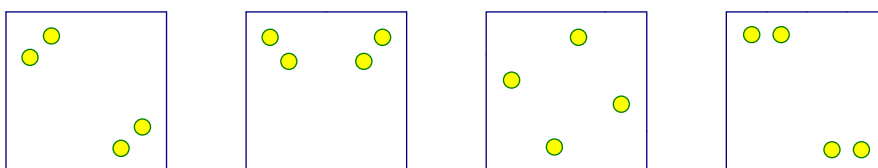
Abre e verifica.

3. Para produzir cada uma das figuras que se seguem, dobrou-se um quadrado duas vezes e depois foi feito um furo circular.



Desenha as linhas de dobragem e marca onde terá que ser feito o furo para se obter cada uma das figuras ao desdobrar.

4. Obtém, com dobragens e um só furo circular, cada uma das figuras seguintes.



5. Repete a questão anterior, mas com um furo assimétrico. Por exemplo - .

Considera um dos furos como original e os restantes como imagens desse.

Identifica a isometria que transforma o original em cada uma das suas imagens quando.

Visualização e isometrias (2008). APM. Lisboa