Semelhança

Proposta de sequência de tarefas para o 3.º ciclo

Autores:

Professores das turmas piloto do 8.º ano de escolaridade

Ano lectivo 2009/10

Dezembro de 2009

Introdução

Esta cadeia de tarefas serve o propósito principal do ensino de geometria no 3.º ciclo, previsto no programa: desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos.

E vai ao encontro dos objectivos gerais de aprendizagem da Geometria:

- desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
- compreender e ser capazes de usar as relações de congruência e semelhança de triângulos;
- desenvolver e ser capazes de utilizar as propriedades e relações relativas a figuras geométricas no plano e no espaço;
- desenvolver a compreensão das isometrias e semelhanças;
- compreender a noção de demonstração e ser capaz de fazer raciocínios dedutivos;
- ser capaz de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.

Nas primeiras tarefas colocam-se os estudantes perante situações reais, com o objectivo de introduzir o conceito de semelhança, distinguindo-o do significado que vulgarmente no dia-a-dia se dá a esta palavra. Para isso, utilizam-se alguns exemplos em que se evidenciam relações entre objectos e as suas representações à escala, tanto em ampliações como em reduções.

Numa segunda fase, pretende-se que os alunos reconheçam as relações entre figuras semelhantes e que construam ampliações e reduções de figuras, primeiramente usando o quadriculado, a régua, o compasso e o transferidor, e posteriormente usando programas de geometria dinâmica. Os alunos reconhecem propriedades de figuras complexas em que estão patentes relações de semelhança, identificando os casos de semelhança de triângulos.

A terceira fase consiste em estabelecer consequências da semelhança encontrada em relações entre comprimentos de segmentos de figuras, para relações entre áreas e volumes de figuras que foram ampliadas ou reduzidas por determinado factor de escala ou razão de semelhança.

Com a quarta fase pretende-se que os alunos resolvam problemas envolvendo o conceito de semelhança, sugerindo-se, para isso, um conjunto de situações de modo que apliquem e consolidem a aprendizagem deste conceito em situações com contexto.

Numa quinta fase, pretende-se que os estudantes ampliem a sua capacidade de aplicação do conceito de semelhança para resolver problemas da realidade na determinação de localizações que se encontram inacessíveis e que exigem o trabalho com representações da realidade. Procura-se, além disso, que os alunos construam instrumentos de medida e enfrentem alguns problemas históricos. Estes exemplos poderão servir para uma viagem pela história da matemática e pela história da tecnologia, compreendendo novas formas de trabalho de campo e de gabinete.

Finalmente, procura-se fazer uma síntese com a visualização do filme ou parte dele sobre Semelhanças (Apostol, CMAF), dirigida por um guião de visualização e de trabalho.

Esta cadeia de tarefas pretende guiar e organizar os estudantes:

- na criação e descrição do conceito de semelhança e reconhecimento de figuras semelhantes;
- na criação de materiais e experimentação de métodos para transformar aspectos da realidade ou figuras desenhadas em outras que as podem representar por transformações de semelhança;
- na determinação de elementos desconhecidos em figuras ou inacessíveis na realidade;
- no desenvolvimento das capacidades de uso de tecnologias menos e mais modernas, assentes em processos que recorrem e se sustentam em raciocínios demonstrativos e em técnicas matemáticas adequadas.

Proposta de planificação

Blocos	Subtópicos	Aprendizagens visadas	Tarefas	Recursos
1	- Noção de semelhança	- Compreender a noção de semelhança. - Relacionar os conceitos de proporcionalidade e semelhança. - Calcular distâncias reais a partir de uma representação.	1. Noção de semelhança	Fita métrica Régua graduada e Calculadora Fotografias
2	- Ampliação e redução de um polígono. - Polígonos semelhantes.	- Ampliar e reduzir um polígono dada a razão de semelhança. - Identificar e construir e polígonos semelhantes. .	2. Ampliações e reduções	Material de desenho Calculadora
2	- Polígonos semelhantes - Semelhança de triângulos	- Identificar e construir polígonos semelhantes - Compreender critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas - Relacionar o Teorema de Thales (se duas rectas paralelas intersectam duas	3A. Triângulos e quadriláteros semelhantes 3B. Triângulos e quadriláteros semelhantes	3A.Geogebra (AGD) 3B. Papel e lápis e material de desenho (PL)

		secantes, os triângulos obtidos têm os lados correspondentes proporcionais) com a semelhança de triângulos.		
1	Polígonos semelhantes	- Discutir o efeito de uma ampliação ou redução sobre o perímetro, a área e o volume.	4. Razões de semelhança – Perímetros, áreas e volumes	Peças de forma quadrada e cubos
1	Semelhança de triângulos	- Compreender os critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas. - Calcular distâncias reais a partir de uma representação. - Relacionar os conceitos de semelhança e proporcionalidade.	5. Semelhança: resolução de problemas	Calculadora
1	Noção de semelhança	- Calcular distâncias reais a partir de uma representação. - Construir instrumentos e fundamentar a sua utilidade para aplicar semelhanças à resolução de problemas.	6. Quadrante e Filme “*Semelhanças”*	Material de desenho Calculadora Quadrante Filme “Semelhanças”

Noção de semelhança

Com esta tarefa pretende-se que os alunos reconheçam e compreendam a noção de semelhança a partir de situações conhecidas, estabelecendo a diferença entre o que é "parecido" e o que é "semelhante" em Matemática. O termo semelhante, quando usado coloquialmente, tem um sentido mais abrangente do que aquele que tem quando usado matematicamente.

Numa segunda parte, pretende-se calcular uma distância real a partir da fotografia de um objecto do qual se conhece a medida de comprimento de um dos seus elementos ou a escala da fotografia. Calculam-se distâncias reais a partir de representações.

- **Tema matemátic**o: Geometria

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Semelhança

- **Subtópicos matemáticos**: Noção de semelhança

- **Capacidades transversais:**
  - Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão
  - Resolução de problemas: compreensão do problema, concepção, aplicação e justificação de estratégias.

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade directa;
  - Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões.

- **Aprendizagens visadas:**
  - Compreender a noção de semelhança;
  - Relacionar os conceitos de semelhança e proporcionalidade;
  - Calcular distâncias reais a partir de uma representação.

- **Recursos:** fita métrica, régua graduada, calculadora e fotografias.

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

Notas para o professor:

No início, há várias situações que permitem utilizar o termo semelhante em contextos do dia-a-dia. Pretende-se também que os alunos percebam que, em Matemática, dizer que duas figuras são **semelhantes** não é a mesma coisa que dizer que elas são **parecidas**. Duas figuras poderão ser parecidas mas não ser matematicamente semelhantes.

Dois rectângulos são polígonos parecidos, mas só são semelhantes se houver proporção entre as medidas dos comprimentos dos seus lados. Dois pentágonos que tenham os lados todos iguais, podem ser considerados parecidos, mas só são semelhantes se os ângulos correspondentes dos dois polígonos forem iguais.

Os alunos devem analisar e reflectir sobre a introdução da tarefa, a pares ou em pequenos grupos, gerando-se depois disso um momento de discussão conjunto que pode ser apoiado, se o professor assim o entender, pela projecção das próprias imagens.

A última imagem representa a construção de uma ampliação com um pantógrafo. Caso haja um destes instrumentos na escola é conveniente deixar os alunos usá-lo na construção de ampliações de figuras. Se não existir, explica-se aos alunos o seu mecanismo.

Com a questão 1 pretende-se que os alunos utilizem os conceitos de proporcionalidade e arranjem estratégias para determinarem as medidas reais, algumas de difícil acesso – a altura dum pavilhão ou de um edifício. A estante da biblioteca pode ser substituída por algo que esteja na sua própria sala de aula evitando que tenham de sair da sala para determinar as primeiras medidas. A altura do pavilhão A pode ser substituída pela altura da fachada da escola ou mesmo pela altura de monumentos do local onde vivem.

Nesta questão pretende-se que os alunos, em pequenos grupos de trabalho, desencadeiem um plano para responderem ao que lhes é solicitado. Porém, caso haja necessidade, o professor pode propor que se construa e preencha uma tabela como a seguinte.

Comprimentos na fotografia	Distâncias na realidade

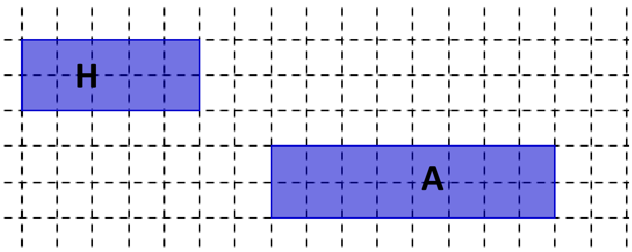
Tarefa 1 – Noção de semelhança

Introdução

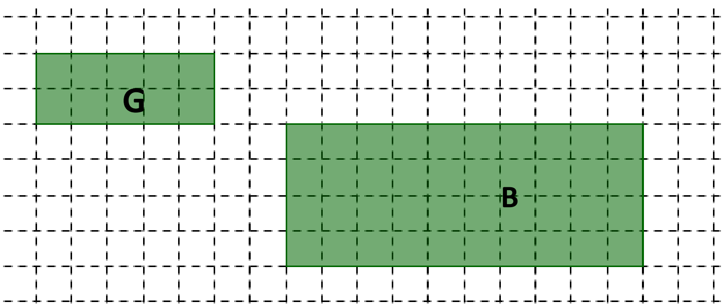
Em Matemática, dizemos que duas figuras são semelhantes quando uma é uma redução ou ampliação da outra. Por exemplo estas duas figuras são semelhantes:

Mas as figuras seguintes são parecidas e não são semelhantes.

Estes dois polígonos também são parecidos e não são semelhantes,



mas os rectângulos da figura seguinte são semelhantes.

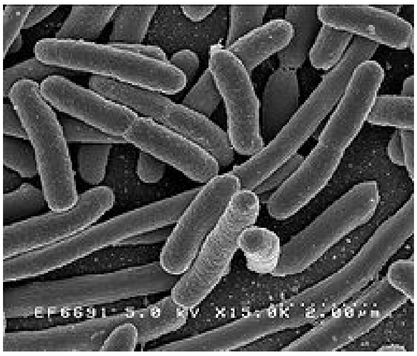


G é uma **redução** do rectângulo **B** e
B é uma **ampliação** do rectângulo **G**.

Porque não são semelhantes os rectângulos H e A?

Em várias situações do dia a dia recorremos a **ampliações** e a **reduções**:

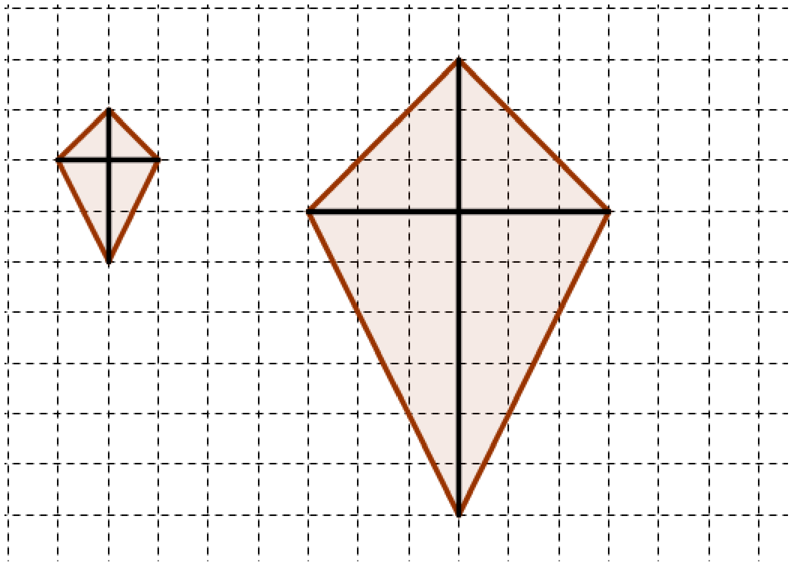
- utilizamos o microscópio para **ampliar**;



- apresentamos uma maqueta de um edifício como uma **redução**.

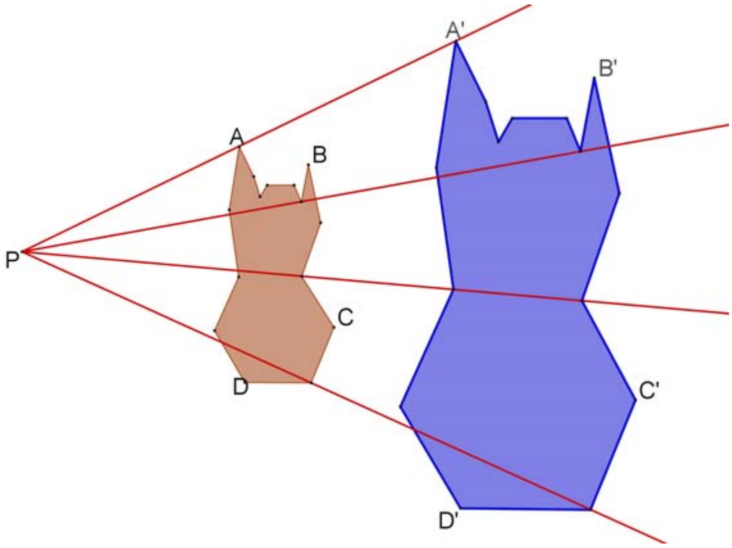
<u>**Construção de figuras semelhantes**</u>: **ampliação** de uma figura por **dois processos**:

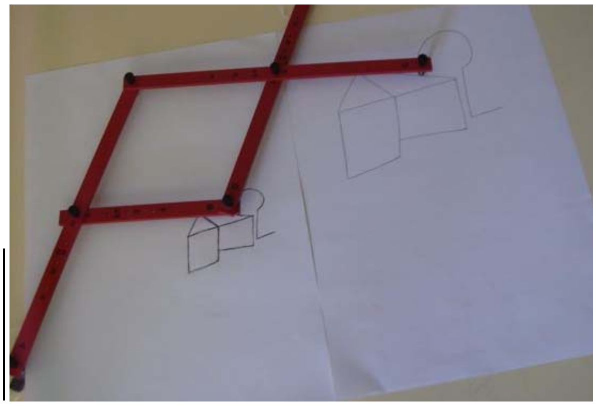
- utilizando o quadriculado.



- utilizando um ponto auxiliar.

Este processo corresponde a uma transformação geométrica chamada **homotetia**.





O pantógrafo é um instrumento que permite obter figuras semelhantes utilizando uma homotetia.

<u>Informação</u>:

- Duas **figuras** são **semelhantes** quando os ângulos correspondentes são congruentes e a medida do comprimento dos segmentos que unem quaisquer dois pontos de uma é proporcional à medida do comprimento dos segmentos correspondentes na outra. Assim, duas **figuras** são **semelhantes** se uma é ampliação ou redução da outra ou se são congruentes.
- Numa **ampliação** todos os comprimentos são multiplicados por um número maior do que 1 e numa **redução** todos os comprimentos são multiplicados por um número positivo menor do que 1.
- Para relacionar as dimensões de figuras semelhantes define-se a **razão de semelhança, r,** que é o quociente entre as medidas dos comprimentos de qualquer segmento da figura transformada e as medidas dos comprimentos do segmento correspondente da figura inicial.

  Se **r >1** a figura semelhante é uma **ampliação**.

  Se **r <1** a figura semelhante é uma **redução.**

  Se **r = 1** as figuras são **congruentes** ou geometricamente iguais.
- O factor de escala entre duas figuras semelhantes é igual ao valor da razão de semelhança.

1. Medir as alturas

Material: fita métrica, régua graduada e calculadora

Com os conhecimentos que tens sobre proporcionalidade directa determina a partir de cada uma das fotografias:

- a altura da estante da biblioteca (na Escola Secundária José Estêvão);

-a altura do pavilhão A (da Escola Secundária de Tondela).

Nota: Em cada escola terão que se tirar as fotografias necessárias.

Ampliações e reduções

O propósito desta tarefa é que se ampliem e reduzam polígonos, recorrendo ao método da quadrícula e ao método da homotetia. Pretende-se determinar o polígono semelhante ao dado conhecida a respectiva razão.

- **Tema matemático:** Geometria

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Semelhança

- **Subtópicos matemáticos:**
  - Ampliação e redução de um polígono
  - Polígonos semelhantes

- **Capacidades transversais:**
  - Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão
  - Raciocínio matemático: formulação de conjecturas.

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade directa;
  - Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões;

- **Aprendizagens visadas:**
  - Ampliar e reduzir um polígono, dada a razão de semelhança;
  - Identificar e construir polígonos semelhantes.

- **Recursos:** compasso, régua e esquadro, calculadora.

- **Duração prevista**: 2 blocos de 90 minutos

- **Notas para o professor:**

Na questão 1 da tarefa, o objectivo é que os alunos construam a ampliação da figura utilizando o método da quadrícula. Ao pedir perímetros e áreas das figuras original e da ampliada, pretende-se despertar os alunos para as possíveis relações entre os perímetros e as áreas. Podem discutir-se os valores para os perímetros e para as áreas das figuras, deixando a possibilidade de se generalizar, ou não, os resultados obtidos.

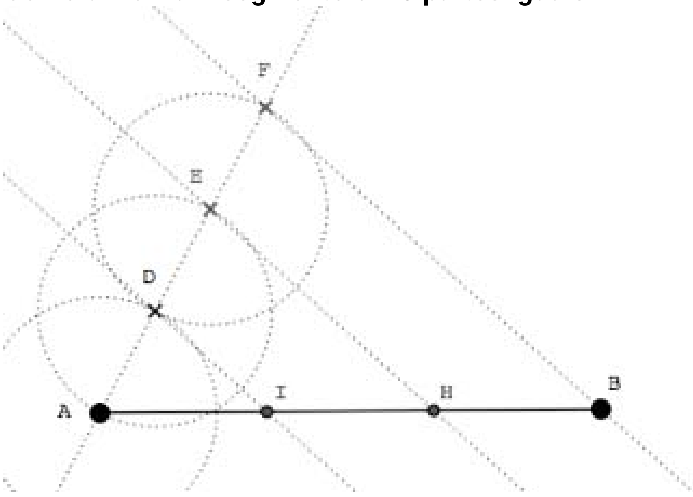
As questões 2 e 3 têm como finalidade que se adquira e utilize a noção de homotetia para a construção de figuras semelhantes. Na questão 2, constrói-se uma ampliação, de razão 2, de um pentágono, pretendendo-se que os alunos sejam capazes de transportar segmentos com o compasso. Traça-se a semi-recta OD, com origem em O, e através do compasso, marca-se D´ de forma que OD e DD´ sejam segmentos geometricamente iguais. Depois de repetir este processo para os cinco vértices, está-se em condições de construir a figura ampliada. Com a última questão, pretende-se que os alunos concluam que uma semelhança mantém as direcções, ou seja, transforma segmentos de recta noutros que lhe são paralelos. Pois quando se implementa um processo de construção de uma figura semelhante, ela tem os segmentos homólogos paralelos ao original, claro que depois de construída podem-se separar as figuras e já se perde o paralelismo, mas é sempre possível colocar duas figuras semelhantes de forma a que todos os segmentos homólogos sejam paralelos.

A questão 3 tem a novidade de se dividirem os segmentos de recta em partes geometricamente iguais. Ao solicitar a redução de razão $\frac{1}{2}$, a divisão dos segmentos de recta em duas partes iguais pode fazer-se pelo processo da construção da mediatriz dum segmento de recta ou de forma equivalente pela marcação do ponto médio do segmento de recta.

Depois de os alunos terem construído um primeiro ponto A_1 de forma que A_1O seja $\frac{1}{2}$ do segmento AO, poder-se-á utilizar a propriedade das semelhanças transformarem segmentos de recta noutros que lhe são paralelos para terminar a construção da redução da figura dada.

Se se pretender ir mais além e quiser dividir geometricamente os segmentos de recta num número de partes geometricamente iguais superior a dois fica aqui lembrado o processo de dividir um segmento de recta em três partes iguais que o professor pode disponibilizar aos próprios alunos.
Note-se que, em Educação Visual, o aluno já aprendeu a dividir um segmento em três partes iguais. Caso não se lembre pode-lhe ser facultado a ajuda seguinte:

Como dividir um segmento em 3 partes iguais



Para dividir o segmento AB em 3 segmentos de igual comprimento:

- traçamos uma recta auxiliar que passe por A;
- a partir de A, sobre a recta auxiliar, marcamos 3 segmentos iguais usando sucessivas circunferências de igual raio (qualquer), sendo AD=DE=EF, AE=2AD, AF=3AD, ...
- traçamos a recta FB e tiramos por E e D paralelas a FB, que intersectam AB em H e I;
- verifica-se que AI=IH=HB, AH=2AI, AB=3AI.

Tarefa 2 – Ampliações e reduções

Vamos utilizar dois métodos diferentes para obter ampliações e reduções: o **método da quadrícula** e o **método da homotetia**.

1. Construção de ampliações e reduções a partir de redes (grelhas quadriculadas) – Método da quadrícula

Considera a figura 1.

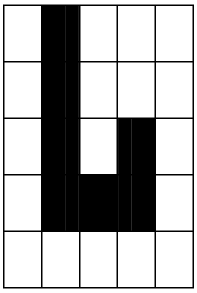


Figura 1

1.1. Utilizando o quadriculado ao lado, constrói uma ampliação da Figura 1 de razão 2.

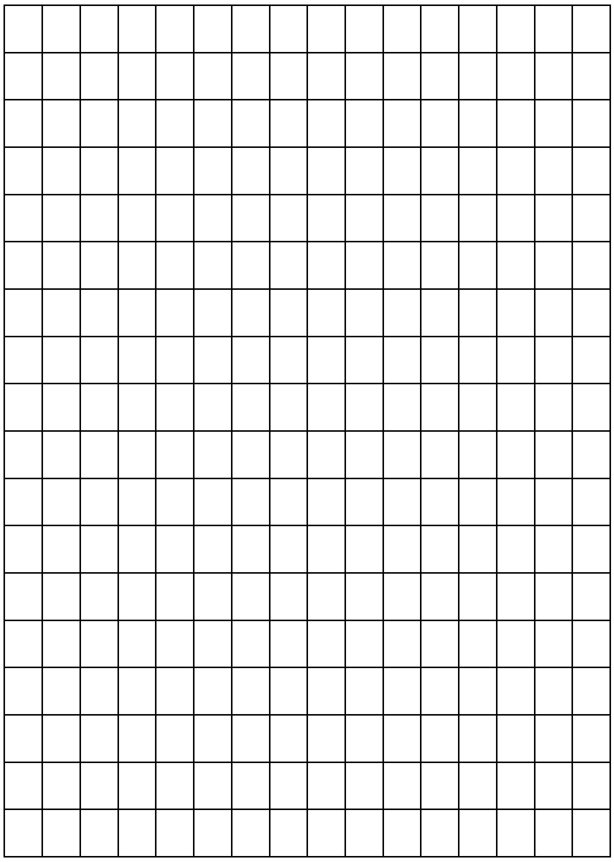


Figura 2

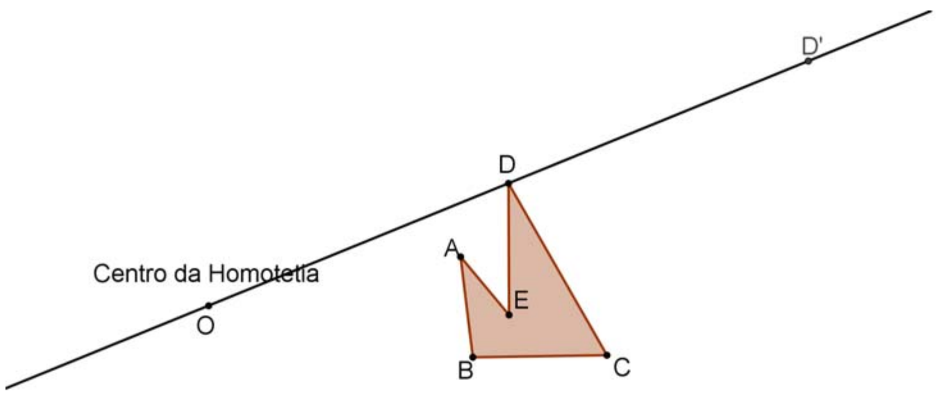
1.2. Sendo a unidade de comprimento e a unidade de área, respectivamente, o lado e a quadrícula, qual o perímetro e a área da Figura 1? E da Figura 2 (figura ampliada)?

1.3. Desenha, no teu caderno, um quadrilátero à tua escolha.
Constrói uma ampliação, do quadrilátero, de razão 0,5.

2. Construção de ampliações e reduções por homotetia

2.1. Observa a figura seguinte.

Pretende-se construir uma ampliação do pentágono ABCDE de razão 2, em que o ponto O é o centro da homotetia e, por exemplo, D é transformado em D' sendo OD'=2xOD.

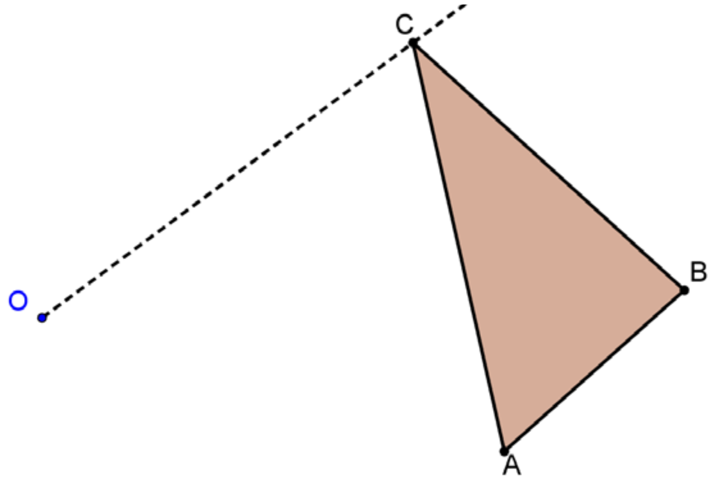


Repete o mesmo processo de construção para os outros vértices. Une os pontos encontrados de modo a obteres o pentágono ampliado.

2.2. Usa a régua graduada para determinar o perímetro das duas figuras e relaciona-os.

2.3. Identifica pares de segmentos paralelos.

3. Constrói uma redução do triângulo ABC de razão $\frac{1}{2}$, usando a homotetia de centro O.



4. Desenha no teu caderno um quadrilátero qualquer.
Escolhe um ponto para centro da homotetia e obtém:

4.1. uma redução do quadrilátero de razão 0,7;

4.2. uma ampliação do quadrilátero de razão 2,3.

Triângulos e quadriláteros semelhantes

Com esta tarefa pretende-se que os alunos reconheçam polígonos semelhantes, especialmente triângulos e quadriláteros. Na tarefa 3A pretende-se que as construções, medições e explorações sejam feitas recorrendo a um ambiente de geometria dinâmica e na tarefa 3B usando o material de desenho respectivo. Com os exemplos que se vão construir ao realizar a tarefa, evidenciam-se os vários casos de semelhança de triângulos. Pretende-se também relacionar o Teorema de Thales com a semelhança de triângulos.

- **Tema matemático:** Geometria

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Semelhança

- **Subtópicos matemáticos:**
  - Polígonos semelhantes
  - Semelhança de triângulos

- **Capacidades transversais:**
  - Raciocínio matemático: formulação e teste de conjecturas
  - Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Compreender a noção de semelhança

- **Aprendizagens visadas:**
  - Identificar e construir polígonos semelhantes;
  - Compreender critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas;
  - Relacionar o Teorema de Thales (se duas rectas paralelas intersectam duas secantes, os triângulos obtidos têm os lados correspondentes proporcionais) com a semelhança de triângulos.

- **Recursos:** GeoGebra (tarefa 3A)

- **Duração prevista:** 2 blocos de 90 minutos

- **Notas para o professor:**

Pretende-se que os alunos identifiquem e construam polígonos semelhantes, tendo por pano de fundo os vários casos de semelhança de triângulos.

Esta tarefa poderá ser resolvida a pares ou em grupos de três; no caso de se usar ambiente de geometria dinâmica dependerá do número de computadores disponíveis. É indispensável uma discussão em grande grupo sobre as várias resoluções dos alunos em todas as perguntas, mas em especial na pergunta quatro como já foi referido anteriormente.

Assim, na primeira pergunta constroem-se triângulos com os ângulos iguais, pois os lados são paralelos, na segunda com os três lados proporcionais e na terceira com dois lados proporcionais e o ângulo por eles formado igual.

Realça-se, tanto na primeira pergunta como na segunda que as condições para a construção de triângulos semelhantes, que contrariamente ao que a maior parte dos alunos poderá supor, não são extensíveis aos quadriláteros.

Na quarta pergunta solicita-se aos alunos a identificação dos vários casos de semelhança de triângulos o que pensamos poderá ser bastante enriquecido por uma discussão em grande grupo confrontando as várias resoluções que foram surgindo ao longo desta tarefa. É importante chamar a atenção dos alunos que basta haver dois ângulos iguais, cada um a cada um, para os triângulos serem semelhantes.

Na última pergunta pretende-se fazer uma ponte do estudo das semelhanças para a história da matemática, servindo-nos de um resultado desenvolvido por Thales de Mileto

Tarefa 3A – Triângulos e quadriláteros semelhantes (AGD)

1.

1.1. Constrói um triângulo ABC.

1.2. Constrói outro triângulo DEF, com os lados paralelos aos do triângulo ABC.

1.3. Mede as amplitudes dos ângulos internos desses triângulos e os comprimentos dos seus lados.
Que relações podes estabelecer entre os elementos destes triângulos que te permitam afirmar que são semelhantes?

1.4. Qual a razão de semelhança?

1.5. Arrasta um dos vértices do triângulo ABC e verifica se as relações que estabeleceste na alínea 1.3. se mantêm.

1.6. Constrói dois quadriláteros de lados paralelos.

1.7. Esses quadriláteros serão semelhantes?
Explica as medições que efectuaste e as relações que encontraste que justificam que esses quadriláteros são ou não semelhantes.

2. Considera as seguintes fracções:

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=1,5$$

2.1. Constrói um triângulo em que as suas dimensões sejam 3 numeradores destas fracções.

2.2. Constrói outro triângulo em que as suas dimensões sejam os 3 denominadores correspondentes aos numeradores que escolheste na alínea anterior.
2.3. Estes dois triângulos são semelhantes? Justifica a tua resposta.

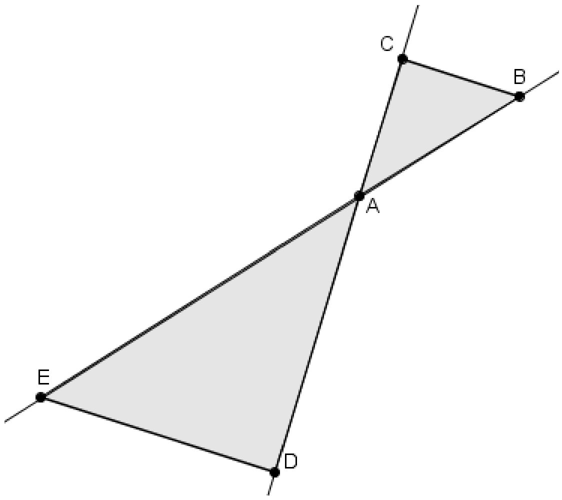
2.4. Constrói agora dois paralelogramos: um em que as suas dimensões são 2 numeradores destas fracções e outro em que as suas dimensões são os 2 denominadores correspondentes.

2.5. Estes dois quadriláteros são semelhantes? Justifica a tua resposta.

3.

3.1. Constrói uma figura como a que está ao lado, sabendo que AE tem o dobro do comprimento de AB e AD tem o dobro do comprimento de AC.

3.2. Os triângulos ABC e ADE são semelhantes? Justifica a tua resposta.



4. Imagina que tens dois amigos e queres que cada um construa um triângulo, mas com uma condição: que esses dois triângulos sejam semelhantes.

4.1. Quais as indicações mínimas que tens que dar a cada um para teres a certeza que os triângulos que vão construir são semelhantes?

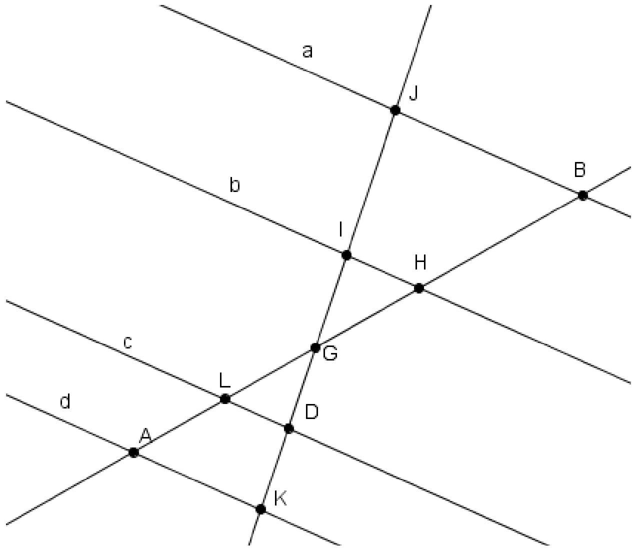
4.2. Será que tens mais do que uma possibilidade para essas indicações?

5. Thales de Mileto, que viveu entre 630 e 546 a.C., foi um matemático muito importante na Grécia clássica. Sabia coisas fantásticas tanto de Astronomia, como de Geometria, tendo contribuído para a compreensão de relações de proporcionalidade em Geometria.

Há muitas propriedades que ainda hoje são usadas no estudo da Geometria e que estão intimamente ligadas às suas descobertas, nomeadamente a seguinte:

Se duas paralelas intersectam duas secantes, os triângulos obtidos têm lados correspondentes proporcionais

5.1. Constrói uma figura como a seguinte, sabendo que as rectas a, b, c e d são paralelas.



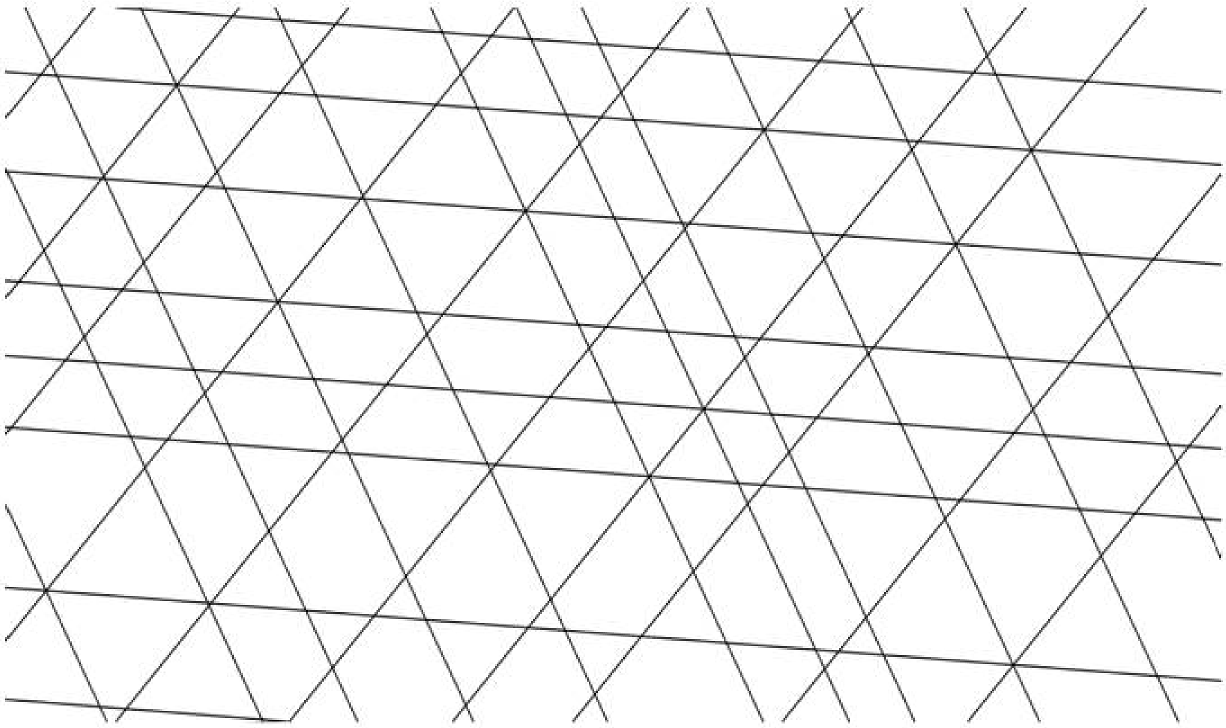
5.2. Identifica 3 pares de triângulos semelhantes e indica as suas razões de semelhança.

5.3. Completa as seguintes igualdades, tendo em conta a semelhança de triângulos e justificando a tua resposta:

$\frac{GL}{GD} = ...\frac{\square}{....}$ $\qquad$ $\frac{....}{LD} = \frac{AG}{....}$ $\qquad$ $\frac{BJ}{BG} = \frac{....}{....}$

Tarefa 3B – Triângulos e quadriláteros semelhantes (PL)

1. Na figura seguinte podes encontrar três grupos diferentes de rectas paralelas entre si.



1.1. Quantas rectas paralelas tem cada um dos grupos?

1.2. Sombreia, na folha, um triângulo ABC, em que os seus vértices são pontos de intersecção de duas rectas e os lados segmentos das rectas desenhadas.

1.3. Sombreia um triângulo DEF, com os lados paralelos aos do triângulo ABC mas de tal forma que não sejam congruentes.

1.4. Mede a amplitude dos ângulos internos do triângulo ABC e do triângulo DEF e o comprimento dos seus lados.

1.5. Que relação estabeleces entre os ângulos dos dois triângulos?

1.6. Indica os lados correspondentes dos triângulos.

1.7. Verifica que a medida do comprimento dos lados correspondentes dos triângulos são proporcionais e indica a razão de semelhança.

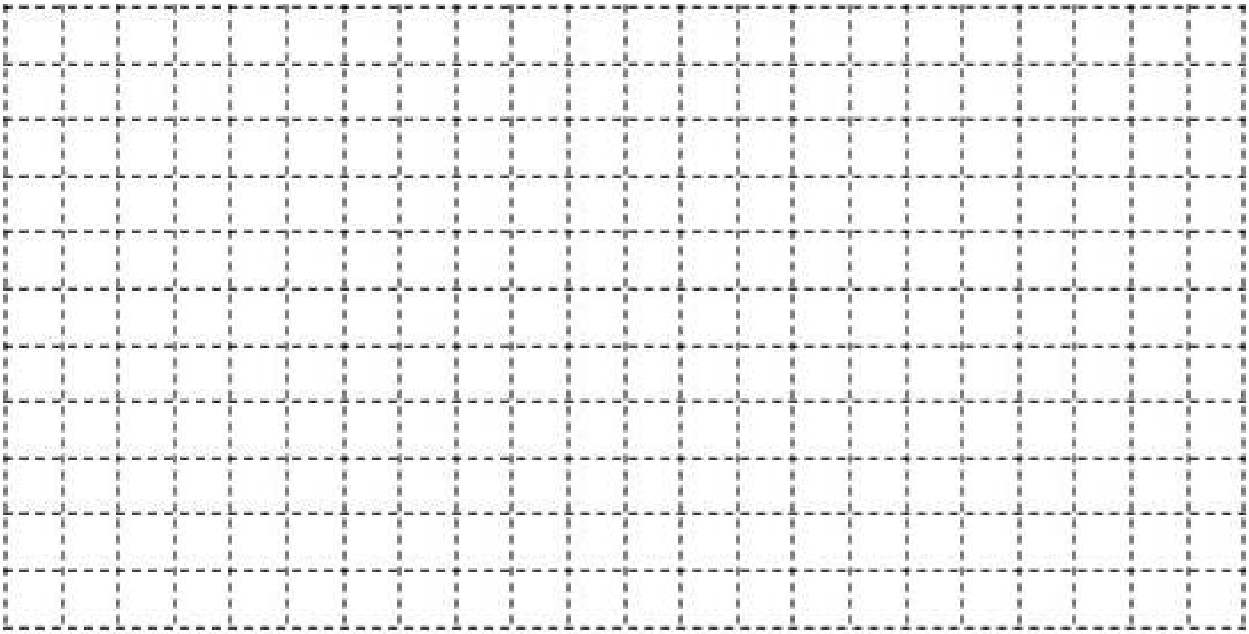
1.8. Utilizando os pontos de intersecção das rectas desenhadas constrói dois quadriláteros de lados paralelos e sombreia-os.

Verifica se os quadriláteros são semelhantes. Explica as medições que efectuaste e indica as relações que encontraste entre a medida do comprimento dos lados correspondentes e a medida da amplitude dos ângulos correspondentes.

2. Considera as seguintes fracções:

$$\frac{3}{2}=\frac{6}{4}=\frac{9}{6}=\frac{12}{8}=\frac{15}{10}=1{,}5$$

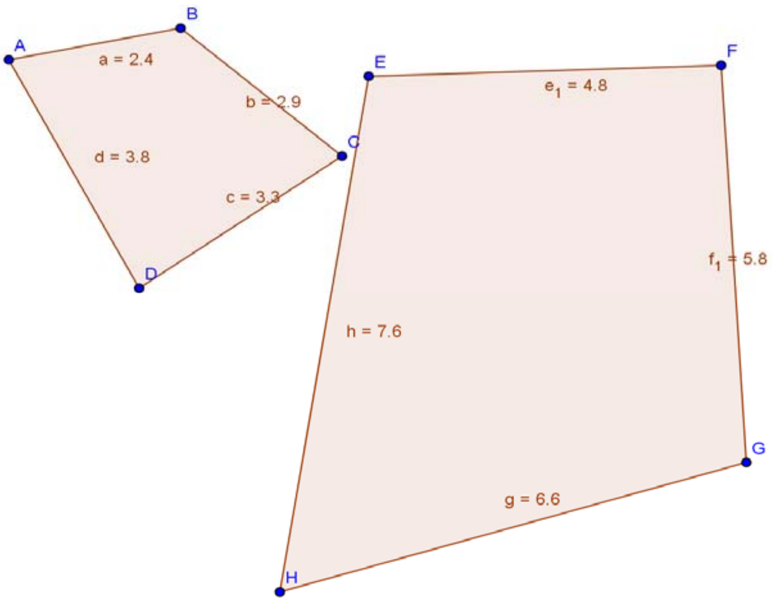
2.1. Constrói um triângulo em que as suas dimensões sejam 3 numeradores destas fracções e em que os seus vértices sejam pontos deste quadriculado.



2.2. Constrói outro triângulo que tenha como medida dos comprimentos dos lados os três denominadores correspondentes aos numeradores que escolheste na alínea anterior.

2.3. Estes dois triângulos são semelhantes? Justifica a tua resposta.

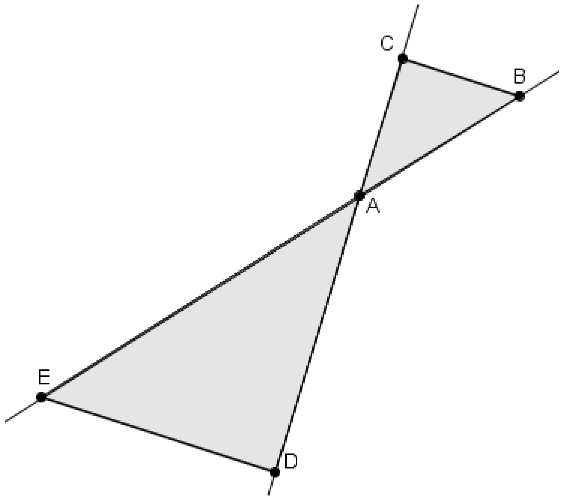
2.4. Verifica se os quadriláteros da figura são semelhantes. Justifica a tua resposta.



3.

3.1. Constrói uma figura, como a que está ao lado, sabendo que AE tem o dobro do comprimento de AB e AD tem o dobro do comprimento de AC.

3.2. Os triângulos ABC e ADE são semelhantes? Justifica a tua resposta.



4. Imagina que propões a dois dos teus amigos que cada um deles construa um triângulo, mas queres que os dois triângulos sejam semelhantes.

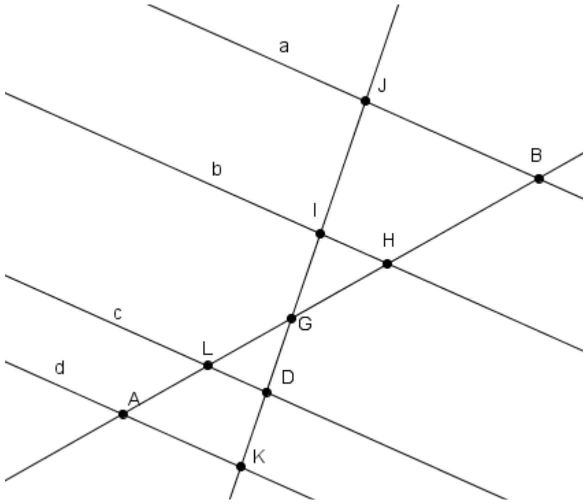
4.1. Quais as indicações mínimas que deves dar a cada um dos amigos para teres a certeza que os triângulos que vão construir são semelhantes?

4.2. Será que tens mais do que uma possibilidade para essas indicações?

5. Thales de Mileto, viveu entre 630 e 546 a.C., foi um matemático importante na Grécia clássica. Sabia coisas fantásticas de Astronomia e de Geometria. Há muitas propriedades que ainda hoje são usadas no estudo da Geometria e que estão ligadas às suas descobertas, nomeadamente a seguinte:

Se duas rectas paralelas intersectam duas rectas secantes, os triângulos obtidos têm os lados correspondentes proporcionais.

5.1. Constrói uma figura como a seguinte, sabendo que as rectas a, b, c e d são paralelas.



5.2. Identifica 3 pares de triângulos semelhantes e indica as suas razões de semelhança.

5.3. Completa as seguintes igualdades, tendo em conta a semelhança de triângulos e justificando a tua resposta:

$\frac{GL}{GB} = \frac{\dots}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{\dots}{LD} = \frac{AG}{\dots}$ $\qquad$ $\frac{BJ}{BG} = \frac{\dots}{\dots}$

Razões de semelhança – perímetros, áreas e volumes

Utilizando materiais manipuláveis, peças de forma quadrada e cubos, pretende-se discutir o efeito de uma ampliação ou de uma redução sobre a área e o volume.

- **Tema matemático:** Geometria

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Semelhanças

- **Subtópicos matemáticos:**
  - Polígonos semelhantes

- **Capacidades transversais:**
  - Raciocínio matemático: formulação e teste de conjecturas
  - Comunicação matemática: interpretação, expressão e discussão

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Ampliar e reduzir um polígono, dada a razão de semelhança.

- **Aprendizagens visadas:**
  - Discutir o efeito de uma ampliação ou redução sobre o perímetro, a área e o volume.

- **Recursos:** peças de forma quadrada e cubos

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

- **Notas para o professor:**

Com esta tarefa pretende-se discutir o efeito das ampliações e das reduções nos perímetros, nas áreas e nos volumes.

Os alunos poderão estar organizados em grupos de 3 ou de 4 na exploração desta tarefa, no entanto é desejável que no fim de cada uma das perguntas se faça uma discussão em grande grupo, para comparar e registar as várias relações encontradas pelos alunos.

Para isso, os alunos serão colocados perante duas situações:
Na primeira, utilizando peças de forma quadrada, pede-se aos alunos que construam várias ampliações de um rectângulo inicial de dimensões 2x1 e preencham uma tabela com os perímetros e as áreas encontradas. Pretende-se que os alunos relacionem a razão de semelhança com as áreas dos vários rectângulos.

Na segunda, utilizando cubos de aresta um, sugere-se a construção de cubos de vários tamanhos para levar a cabo o preenchimento de uma tabela, tendo por objectivo que os alunos estabeleçam uma relação entre a razão de semelhança e os volumes encontrados.

Tarefa 4 – Razões de semelhança – perímetros, áreas e volumes

1. Vamos construir rectângulos semelhantes utilizando peças de forma quadrada. Considera para unidade de comprimento o lado de um quadrado.

1.1. Constrói um rectângulo 1 x 2 (1 por 2), usando dois quadrados.

1.2. Quantos quadrados precisarias para construir outro rectângulo semelhante àquele numa semelhança de razão 2? E se a razão fosse 3?
Desenha-os em papel quadriculado.

1.3. Preenche a tabela abaixo em que **r** é a razão de semelhança quando ampliamos o rectângulo 1 x 2.

r (razão de semelhança)	Dimensões do rectângulo	Perímetro do rectângulo	Área do rectângulo
	1 x 2 (inicial)	6	2
2	2 x 4		
3			
4			
5			
10			
		108	
20			
			288
n			

1.4. Considera dois dos rectângulos semelhantes.
Qual a razão de semelhança? Qual a razão entre os seus perímetros?
Qual a razão entre as suas áreas? Relaciona estes três valores.
Repete este procedimento para vários pares de rectângulos.

2. Vamos agora construir cubos considerando para unidade um cubo de aresta um.

2.1. Constrói cubos de aresta 2 e de aresta 3.

2.2. Estes cubos são semelhantes ao cubo de aresta 1?
Justifica a tua resposta, indicando a razão de semelhança.

2.3. Preenche a tabela abaixo em que **r** é a razão de semelhança quando ampliamos o cubo de aresta 1 para encontrar os restantes.

Cubos	r (razão de semelhança)	Área da face	Área Total	Volume
aresta 1	1	1	6	1
aresta 2				
aresta 3				
aresta 4				
aresta 5				
aresta10				
aresta 20				
aresta n				

2.4. Considera dois cubos. Qual a razão de semelhança?
Qual a razão entre as áreas das suas faces? Qual a razão entre as suas áreas totais?
Qual a razão entre os seus volumes? Relaciona estes quatro valores.
Repete este processo para outros pares de cubos.

2.5. Qual seria a aresta de um cubo de volume 1331? E a sua área total?

Semelhança: resolução de problemas

Depois de os alunos terem trabalhado com polígonos semelhantes, e em particular com triângulos semelhantes, pretende-se que mobilizem os seus conhecimentos na resolução dos problemas que lhe são apresentados.

- **Tema matemático:** Geometria

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Semelhanças

- **Subtópicos matemáticos:**
  - Semelhança de triângulos

- **Capacidades transversais:**
  - Resolução de problemas: compreensão do problema, concepção, aplicação e justificação de estratégias.
  - Comunicação matemática: expressão

- **Conhecimentos prévios dos alunos**
  - Compreender a noção de semelhança
  - Identificar polígonos semelhantes
  - Compreender os critérios de semelhança de triângulos

- **Aprendizagens visadas:**
  - Compreender os critérios de semelhança de triângulos e usá-los na resolução de problemas;
  - Calcular distâncias reais a partir de uma representação;
  - Relacionar os conceitos de semelhança e proporcionalidade.

- **Recursos:** calculadora.

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos.

Notas para o professor:

O professor, de acordo com o nível de desempenho da sua turma, deve escolher entre os seis problemas apresentados, aqueles que considera adequados.

Os alunos devem ter cerca de 2/3 do tempo total do bloco para resolver a tarefa. O tempo restante deve ser usado para a discussão das resoluções.

Tarefa 5 – Semelhança: resolução de problemas

1. Das afirmações seguintes diz as que são verdadeiras, justificando-as, e as que são falsas dando um exemplo em que a afirmação não se verifique **(contra-exemplo)**.

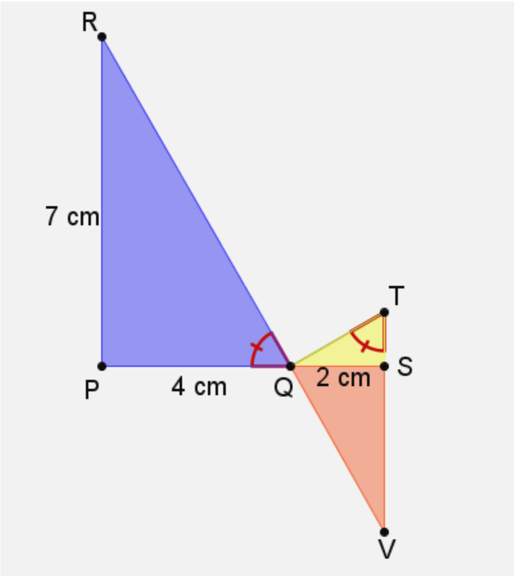
1.1. Dois quadrados são sempre semelhantes.

1.2. Dois rectângulos são sempre semelhantes.

1.3. Dois triângulos isósceles são sempre semelhantes.

1.4. Dois polígonos regulares são sempre semelhantes.

2.



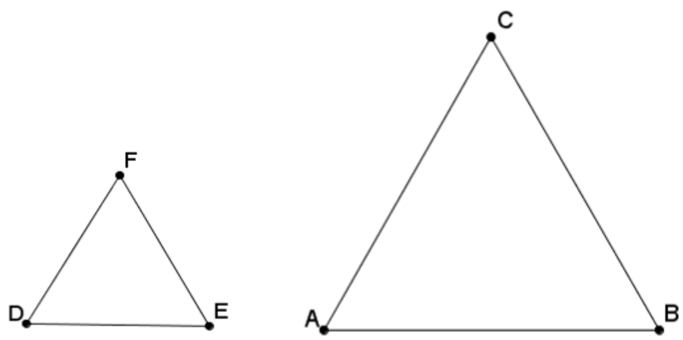
2.1. Os triângulos rectângulos PQR, SQV e STQ são semelhantes. Porquê?

2.2. Determina, em centímetros:

2.2.1. a medida do segmento SV;

2.2.2. a medida do segmento TS com aproximação às centésimas.

3. Os triângulos da figura são equiláteros.



Será que os triângulos ABC e DEF são semelhantes? Justifica.

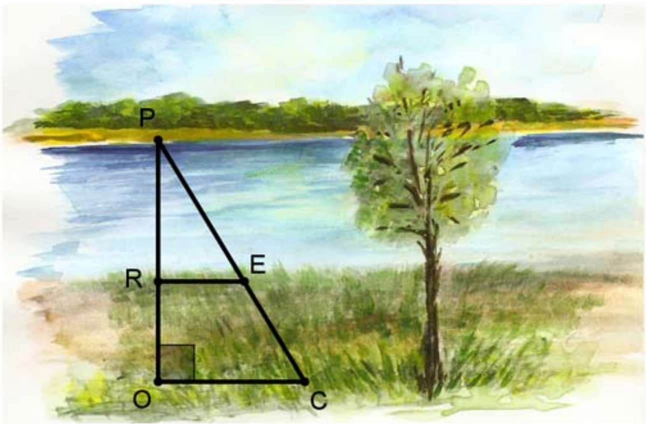
Retirado de Projecto 1000 Itens

4. Os triângulos semelhantes podem ser usados para determinar distâncias que são difíceis de medir directamente.

Para determinar a distância entre as falésias, colocou-se uma rocha no ponto R. Escolheram-se os pontos G e D de forma que GD seja perpendicular a RG. Seguidamente marcou-se o ponto N de forma que DN seja perpendicular GD. Por último, marcou-se o ponto A de intersecção de RN com GD.

Após estas marcações constatou-se que o segmento GA mede 60 metros, DA 120 metros e ND 50 metros. Nestas condições determina a distância (GR) entre as falésias.

5.



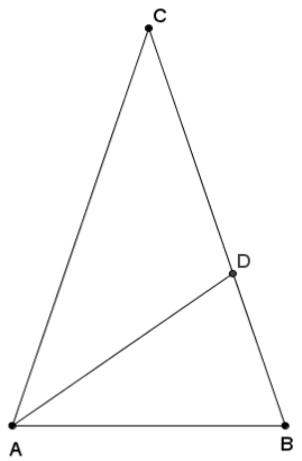
Para se medir a largura de um rio efectuaram-se três medições: RO mede 45 metros, OC 90 e RE 60 metros.

Os pontos R e O são colocados, no mesmo lado do rio, e do lado oposto encontra-se o ponto P, de forma a que os três fiquem alinhados. Qual a largura do rio (a distância de P a R)?

6. Na figura ao lado o triângulo ABC é isósceles. Os ângulos ABC e CAB têm de amplitude 72º. O segmento AD é a bissectriz do ângulo CAB.

6.1. O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ACD? Justifica.

6.2. O triângulo ABC é semelhante ao triângulo ABD? Justifica.



Retirado do projecto 1000 itens

Quadrante e filme “*Semelhanças”*

Esta tarefa é constituída por duas partes. Numa os alunos são convidados a determinar distâncias reais e inacessíveis, como por exemplo a altura da escola, usando o quadrante, um instrumento por eles construído, onde a utilização da semelhança de triângulos está bem patente. Na parte final, está planeado a visualização do filme “Semelhanças”, (Apostol, CMAF), que se pode entender como uma visão generalista e aplicada às mais diversas situações das semelhanças.

- **Tema matemático:** Geometria

- **Nível de ensino:** 3.º ciclo

- **Tópicos matemáticos:** Semelhanças

- **Subtópicos matemáticos:**
  - Noção de semelhança

- **Capacidades transversais:**
  - Resolução de Problemas
  - Comunicação Matemática

- **Conhecimentos prévios dos alunos:**
  - Relacionar os conceitos de semelhança e proporcionalidade

- **Aprendizagens visadas:**
  - Calcular distâncias reais a partir de uma representação;
  - Construir instrumentos e fundamentar a sua utilidade para aplicar semelhanças à resolução de problemas.

- **Recursos:** material de desenho, calculadora, quadrante e filme “Semelhanças” (Apostol, CMAF) – duração 24 minutos.

- **Duração prevista:** 1 bloco de 90 minutos

Notas para o professor:

A construção do quadrante deve ser atempadamente prevista, como trabalho de casa, para que na aula cada aluno disponha do seu quadrante. As primeiras medições podem ser feitas em sala de aula, como, por exemplo, a determinação da altura a que se encontra o candeeiro colocado no tecto, de forma que os alunos discutam como proceder e quais os raciocínios para obter a medida desejada.

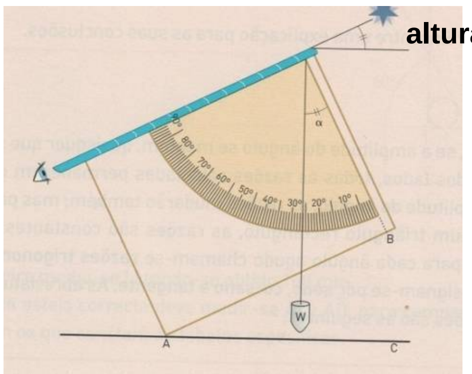
Segue-se a visualização dum filme onde são apresentados vários momentos em que se usa a semelhança para a determinação de diversos comprimentos. O filme pode e deve ser parado sempre que o professor entenda que os alunos possam estar com dúvidas. Claro que os esclarecimentos se podem juntar para o final da visualização, mas parece-nos que várias paragens e até aproveitando os segmentos em que o filme é constituído poderá resultar melhor em termos de dinâmica da aula.

Depois de serem confrontados com algumas questões deixa-se para trabalho de casa a utilização do quadrante para escolher uma distância que se queira determinar: altura do mastro da escola, altura a que se encontra uma determinada janela, …

Tarefa 6 – Quadrante e filme "*Semelhanças"*

1. Quadrante

Em Astronomia, é frequentemente necessário conhecer a altura de um astro. Considera-se a altura de um astro o ângulo formado pela horizontal e a direcção com que vemos esse astro.



Constrói o teu quadrante.

Material necessário:

- Um quadrado em cartolina (20cm de lado).
- "Quadrante" – folha anexa.
- Uma palhinha de refresco.
- Uma linha.
- Uma agulha de coser.
- Uma argola em metal ou outro objecto que dê para ser preso pela linha e que exerça algum peso.
- Uma tesoura.

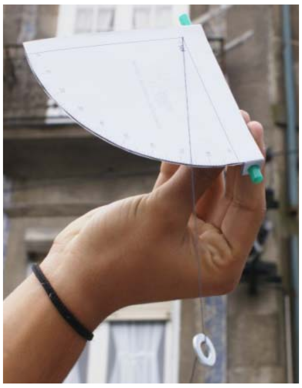
Recorta o quadrante e cola-o na cartolina. Recorta os quatro círculos pretos marcadas nas abas do quadrante.

Dobra as abas do quadrante e introduz uma palhinha de refresco pelos orifícios.

Com uma agulha faz passar uma linha de coser pelo ponto P que está marcado no quadrante. Ata as duas pontas da linha, de modo que o quadrante fique rodeado pela linha.

Prende a argola de metal na linha de modo que esta fique esticada.

O teu quadrante deverá ter o seguinte aspecto:

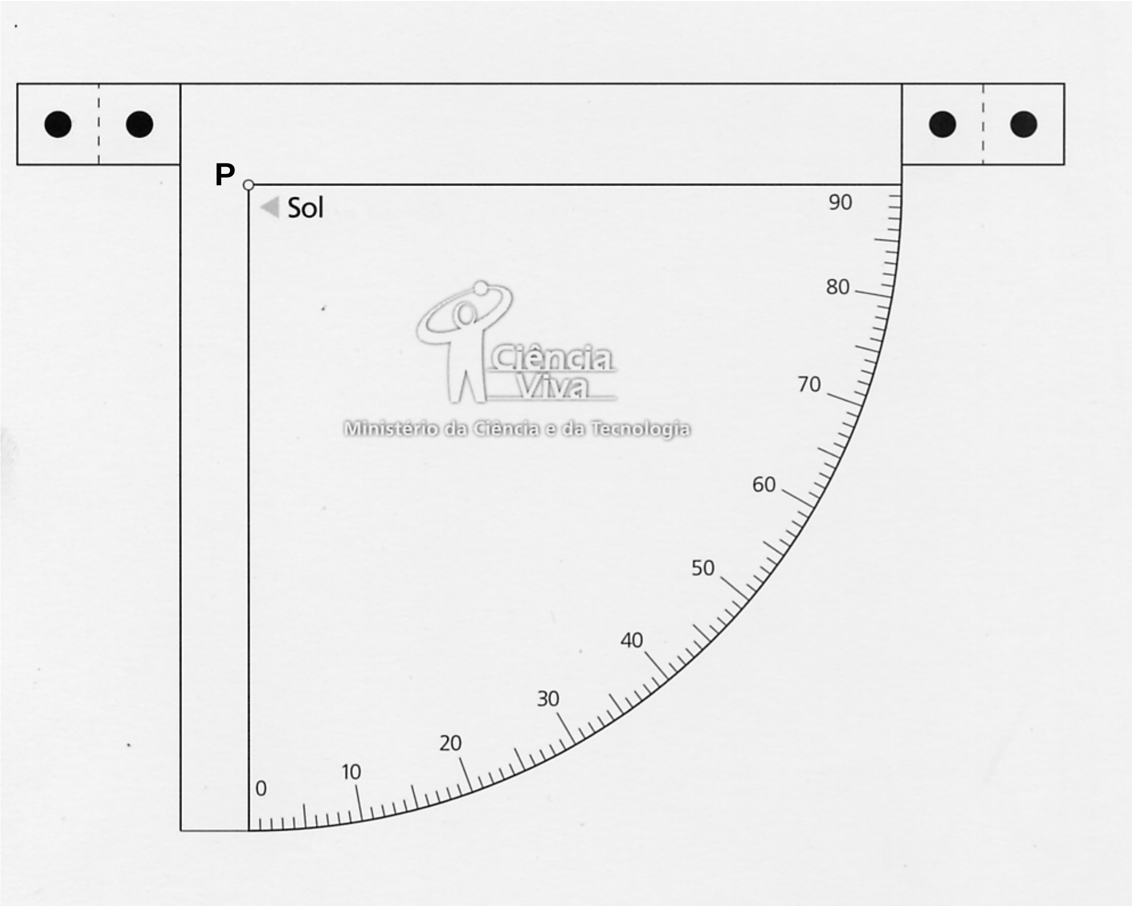


Selecciona, dentro da sala de aula, um objecto do qual pretendas conhecer a altura.

Localiza-te a 3 metros do objecto e utiliza o instrumento assegurando-te que o teu olhar é dirigido ao topo do objecto.

Lê o ângulo obtido, faz uma representação esquemática da situação e, aplicando a semelhança de triângulos, determina a distância a que o objecto está do chão.

Folha anexa - Quadrante



2. Filme: *Semelhanças*

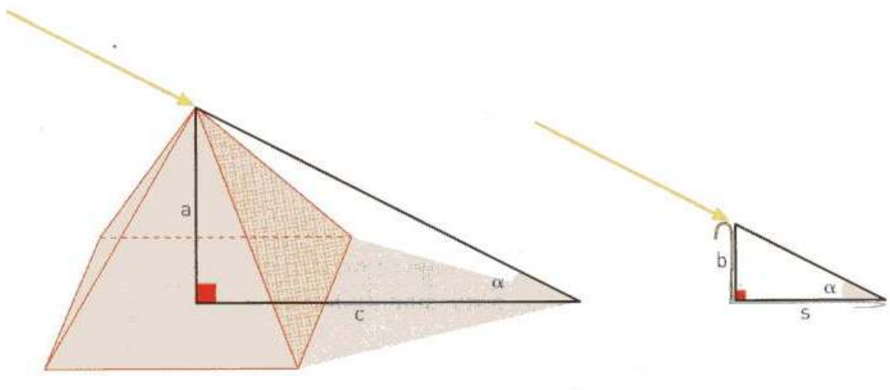
<u>Material necessário:</u>
Filme *Semelhanças* (Apostol, CMAF), Universidade de Lisboa.

Depois de teres visto o filme, responde às seguintes questões:

1. Desenha um par de:
- círculos semelhantes;
- triângulos semelhantes;
- triângulos não semelhantes;
- rectângulos semelhantes;
- rectângulos não semelhantes;
- letras semelhantes (por exemplo a letra F ou a letra M).

2. Conta-se que Thales de Mileto se ofereceu para determinar a altura da pirâmide de Quéops, sem escalar o monumento.

Segundo a lenda, a prova ter-se-á realizado na presença do Faraó Amasis.
Thales espetou perpendicularmente ao chão a sua bengala e mediu as sombras da bengala e da pirâmide. Após alguns cálculos rápidos, Thales obteve a resposta desejada.
Em que se baseou o raciocínio de Thales?



Observa cuidadosamente as figuras, supõe que a aresta da base da pirâmide de Quéops tem 230m de comprimento, a sombra da pirâmide e da bengala são, respectivamente, 323m e 2,5m e que a bengala tem 80cm de comprimento.
Qual a altura da pirâmide?

3. Gigantes com cerca de 20 metros de altura aparecem em vários livros como "O pé de feijão", "As viagens de Gulliver" e monstros enormes, como King Kong ou Godzilla, são vedetas em filmes de ficção científica.

Num trabalho publicado em 1917 o matemático D´Arcy Thompson tenta explicar que tais criaturas não podiam ter existido no nosso mundo.

Analisa esta questão tendo por base o que observaste no filme.

4. Na próxima aula, traz um relatório onde contes pormenorizadamente como procedeste para determinar a altura de um objecto utilizando o quadrante (o mastro da tua escola, a altura de um edifício alto, a altura de uma árvore do jardim ou outro objecto cuja altura seja difícil de determinar). Não te esqueças de fazer uma representação esquemática que te ajude a explicar as medições que fizeste e a altura que determinaste.