

CURSOS DE EDUCAÇÃO E FORMAÇÃO

PROGRAMA

Componente de Formação Científica

Disciplina de

Matemática Aplicada

Direcção-Geral de Formação Vocacional

2005

Parte I

Orgânica Geral

Índice:

	Página
1. Caracterização da Disciplina	2
2. Visão Geral do Programa	3
3. Competências a Desenvolver.	6
4. Orientações Metodológicas / Avaliação	8
5. Elenco Modular	11
6. Bibliografia Geral	12

1. Caracterização da Disciplina

Pelos princípios e métodos de trabalho praticados, a Matemática é uma componente essencial da formação para o exercício da cidadania em sociedades democráticas e tecnologicamente avançadas, tendo por bases a autonomia e a solidariedade. O conhecimento científico em geral, e matemático em particular, é uma ferramenta essencial da independência empreendedora de cada cidadão que tem de ser responsável e consciente do ambiente em que vive e das relações em que está envolvido.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao cidadão ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e para se sentir motivado a continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual se relaciona, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário. A Matemática contribui para uma melhor compreensão do espaço envolvente, ajudando a perceber as relações geométricas entre os diversos elementos naturais.

Os cursos de Educação e Formação pretendem contribuir para a formação de jovens em situação de abandono escolar e em transição para a vida activa, nomeadamente dos que entram precocemente no mercado de trabalho com níveis insuficientes de formação escolar e de qualificação profissional. Estes cursos procuraram dar resposta às necessidades educativas e formativas dos jovens que, não pretendendo, de imediato, prosseguir estudos no âmbito das restantes alternativas de educação e formação, preferem aceder a uma qualificação profissional mais consentânea com os seus interesses e expectativas. Segundo o ponto 2 do Despacho Conjunto nº 453/2004, de 27 de Julho, os cursos de Educação e Formação destinam-se, preferencialmente, a jovens com idade igual ou superior a 15 anos, em risco de abandono escolar ou que já abandonaram antes da conclusão da escolaridade de 12 anos, bem como àqueles que, após conclusão dos 12 anos de escolaridade, pretendam adquirir uma qualificação profissional para ingresso no mundo do trabalho.

Para estes estudantes, a disciplina de Matemática terá de assumir uma forma necessariamente muito concreta e ligada à realidade; os jovens em situação de abandono escolar tiveram muito provavelmente um historial de insucesso na disciplina de Matemática e precisam assim também de aprender a reconhecer a Matemática no mundo que os rodeia.

São finalidades desta disciplina:

- desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- desenvolver a capacidade de reconhecer regularidades e modelos matemáticos relevantes em cada aspecto da realidade, e de os utilizar para ajudar a resolver problemas, eventualmente em diálogo com especialistas;
- desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como de memória, de rigor, de espírito crítico e de criatividade;
- utilizar os conhecimentos matemáticos na resolução de problemas, decidindo sobre a razoabilidade de um resultado e sobre o uso, consoante os casos, de cálculo mental, algoritmos de papel e lápis ou instrumentos tecnológicos;
- promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
- contribuir para uma atitude positiva face à Ciência em geral, reconhecendo o seu papel no progresso e desenvolvimento social e material, ao mesmo tempo que reconhecem a necessidade do desempenho de cada um na manutenção e desenvolvimento dos sistemas;
- promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;

- criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade actual e, bem assim, pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

2. Visão Geral do Programa

A Matemática aparece, para os Cursos de Educação e Formação, em todos os tipos de cursos de 1 a 6, com uma carga horária variável conforme o tipo de curso, devendo no fim dos cursos de tipo 1, 3 e 6, ser atingidas competências e saberes correspondentes aos do 2º e 3º ciclos do ensino básico e aos do ensino secundário, respectivamente.

O programa de Matemática Aplicada está organizado em módulos independentes. Atendendo à diversidade de formações dos estudantes que se podem candidatar a estes cursos, os professores e as estruturas próprias dos cursos de Educação e Formação poderão ajustar o conteúdo dos módulos aos conhecimentos, capacidades e interesses dos estudantes; no caso dos estudantes com dificuldades podem ser mobilizados conhecimentos e problemas de módulos anteriores; no caso de estudantes com interesses em determinada área, podem procurar-se exemplos ligados a essa área e ajustar os conhecimentos necessários para resolver esses problemas.

Os estudantes que frequentem cursos de dois anos, que conferem habilitação do 2º ciclo terão, de realizar sete módulos (Tipo 1/A).

Quadro Resumo – T 1/A 2º ciclo

Tipo 1	Tipo 1
<p>Módulo 1 A Matemática no quotidiano Exploração de alguns problemas significativos do universo próximo dos estudantes.</p> <p>Módulo 2 Números inteiros e operações: algoritmos e cálculo mental Contacto progressivo com os números inteiros e as operações.</p> <p>Módulo 3 Dos sólidos às figuras planas: Perímetro, área e volume Figuras planas; sólidos geométricos; simetria. Perímetros, áreas e volumes.</p> <p>Módulo 4 Dos inteiros aos racionais Estudo dos números inteiros e fraccionários.</p>	<p>Módulo 5 Padrões e Álgebra Os padrões numéricos e a generalização – introdução ao pensamento algébrico e ao raciocínio proporcional.</p> <p>Módulo 6 Tratamento da Informação Recolha, organização e análise de dados; representação e comunicação de processos e resultados.</p> <p>Módulo 7 Oficina Contacto com algumas ferramentas informáticas e materiais que possibilitem ou catalizem o trabalho de conceitos matemáticos. Concepção e realização de um projecto.</p>

Os estudantes que frequentem cursos de um ano, que conferem habilitação do 2º ciclo, terão de realizar dois módulos (Tipo 1B), devendo os exemplos e problemas usados em cada módulo adaptar-se à experiência destes estudantes, que será necessariamente diferente da dos estudantes do Tipo 1/A.

Quadro Resumo – T1/B - 2º ciclo

Tipo 1B
<p>Módulo 1 A Matemática no quotidiano Exploração de alguns problemas significativos do universo próximo dos estudantes.</p> <p>Módulo 3 Dos sólidos às figuras planas: Perímetro, área e volume Figuras planas; sólidos geométricos; simetria. Perímetros, áreas e volumes.</p>

Os estudantes que frequentem cursos, que conferem habilitação do 3º ciclo, terão de realizar oito módulos se frequentarem o curso de Tipo 2. Se pertencerem ao curso de Tipo 3 terão apenas de realizar os módulos 14 e 15.

Quadro Resumo – T2 e T3 - 3º ciclo

Tipo 2	Tipo 2	Tipo 2 e Tipo 3
<p>Módulo 8 Geometria intuitiva Sólidos, triângulos e quadriláteros.</p> <p>Módulo 9 Das Equações aos Números Equações do 1º grau, números racionais relativos, operações.</p> <p>Módulo 10 Do plano ao espaço Semelhança de figuras geométricas. Transformações de semelhança. Rectas e planos: paralelismo e perpendicularidade.</p>	<p>Módulo 11 Estatística e Probabilidades Recolha, organização e interpretação de dados. Significado e pertinência de medidas estatísticas. Introdução ao conceito de Probabilidade</p> <p>Módulo 12 Funções e Gráficos Representação gráfica. Funções: proporcionalidade directa e inversa.</p> <p>Módulo 13 Triângulo rectângulo O teorema de Pitágoras e a trigonometria elementar. Problemas do 1º e 2º grau.</p>	<p>Módulo 14 Geometria do Círculo As propriedades do círculo e de elementos a ele ligados: suas consequências e usos.</p> <p>Módulo 15 Aproximações e inequações Números reais, estimativas e aproximações; inequações do 1º grau.</p>

--	--	--

Os estudantes do curso de Formação Complementar terão de realizar três módulos.

Quadro Resumo – Curso de Formação Complementar

F.C.
<p>Módulo 16 Geometria Prática Resolução de problemas práticos de geometria plana e sólida incluindo transformações geométricas.</p> <p>Módulo 17 Problemas numéricos Resolução de problemas práticos envolvendo números, equações, inequações e proporcionalidade.</p> <p>Módulo 18 Geometria Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço.</p>

Os estudantes do curso de Tipo 4 terão de realizar o módulo 18. Os estudantes que frequentarem o curso de Tipo 5 terão de realizar obrigatoriamente o módulo 20; deverão ainda escolher **dois** dos módulos 19, 21, 22, 23 e 24, e escolher **três** dos módulos 25, 26, 27 e 28. Os estudantes pertencentes ao curso de Tipo 6 terão de escolher **três** dos módulos 25, 26, 27 e 28.

Quadro Resumo – Cursos T4, T5, T6

Tipo 4	Tipo 5	Tipo 5 e Tipo 6
Tema Transversal: Aplicações e Modelação Matemática		
<p>Módulo 18 Geometria Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço.</p>	<p>Módulo 19 Padrões Geométricos Identificação e análise de propriedades de figuras geométricas em situações do mundo real. Regularidades e padrões associados a transformações geométricas.</p> <p>Módulo 20 Estatística Organização e interpretação de</p>	<p>Módulo 25 Probabilidade Modelos de Probabilidade.</p> <p>Módulo 26 Modelos Discretos Modelos discretos: sucessões e progressões.</p>

	<p>caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).</p> <p>Módulo 21 Funções Polinomiais Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais quadráticas e cúbicas. Efeitos de mudanças de parâmetros.</p> <p>Módulo 22 Funções Periódicas e Não Periódicas Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos e não periódicos. Breve abordagem das funções trigonométricas e das funções racionais.</p> <p>Módulo 23 Taxa de Variação Taxa de variação média num intervalo. Taxa de variação num ponto.</p> <p>Módulo 24 Estatística Computacional Tratamento exploratório de dados usando uma folha de cálculo.</p>	<p>Módulo 27 Funções de Crescimento Modelos contínuos não lineares: exponencial, logarítmico e logístico.</p> <p>Módulo 28 Optimização Problemas de optimização. Aplicações das Taxas de Variação. Programação Linear como ferramenta de planeamento e gestão.</p>
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

3. Competências a Desenvolver

A Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar que é distinto de outros ligados a diferentes áreas do conhecimento e da actividade humana. O professor proporá situações que levem os estudantes a realizar actividades matemáticas: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas e raciocinar logicamente. Ao realizar este tipo de actividades, cria-se o hábito de experimentar, procurar o que há de invariante numa situação e tentar encontrar generalizações aplicáveis noutras situações. Se o estudante compreender que não basta que uma hipótese formulada se verifique em alguns casos para poder tomar essa hipótese como uma afirmação verdadeira, sendo necessário encontrar uma argumentação lógica para a validar ou um contra-exemplo para a rejeitar, então, está a desenvolver aspectos essenciais da sua competência matemática.

Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes garantem que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida.

As competências essenciais a desenvolver na “Matemática Aplicada” no 2º e 3º ciclos do Ensino Básico são os constantes do documento “Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais”, que aqui se consideram integralmente transcritas. Refiram-se em especial:

- o gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático e a concepção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior;
- a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação;
- a predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- a aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e de usar, consoante os caso, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
- a tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstracta que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos.

No que diz respeito ao Ensino Secundário algumas competências essenciais a desenvolver no Ensino Básico também se podem ter presentes no Ensino Secundário com a respectiva adequação ao nível de desenvolvimento dos conceitos matemáticos dos estudantes. Refiram-se:

- a capacidade de utilizar a matemática para compreender e interpretar situações da vida real;
- capacidade de justificar processos de resolução, conjecturas e ... alguns teoremas;
- a capacidade de comunicar, discutir e verbalizar raciocínios argumentando em linguagem precisa;
- a compreensão da evolução de alguns conceitos;
- a capacidade para apreender o desenvolvimento do actual estado da tecnologia;
- capacidade de mobilizar os conhecimentos matemáticos para tomar decisões na vida profissional e social.

Espera-se que os estudantes se apropriem de conceitos e de técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. Pretende-se que o estudante seja capaz de formar uma opinião própria, participando nas decisões ou que consiga ele próprio tomá-las.

Para desenvolver a competência matemática consideram-se os seguintes princípios fundamentais.

1. No ensino que parte de propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes dos diversos cursos, a mediação do professor é um dos processos essenciais na estruturação de aprendizagens significativas e no desenvolvimento da competência matemática dos estudantes. Disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias, com este tipo de ensino desenvolve-se a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção na realidade. A análise de situações da vida real, a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, a selecção de estratégias para resolver problemas, a formulação de hipóteses e previsão de resultados são orientações que contribuem para a formação de estudantes que manifestem vontade de aprender e gosto pela pesquisa. Neste âmbito há oportunidade para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.
2. A aprendizagem baseada no trabalho autónomo sobre as situações apresentadas (que podem apresentar vários níveis de resolução) e em actividades que aprofundem os conceitos introduzidos no decurso dos trabalhos, contribui para o desenvolvimento da auto-confiança dos estudantes criando-lhes oportunidades para se exprimirem, fundamentarem as suas opiniões e revelarem espírito crítico, de rigor e confiança nos seus raciocínios.
3. A participação da Matemática no desenvolvimento das competências profissionais contribui para o desenvolvimento da comunicação (dos conceitos, dos raciocínios ou das ideias) com clareza e progressivo rigor lógico. A definição de trabalhos de grupo, de acordo com as motivações dos estudantes, propicia o desenvolvimento do espírito de tolerância, de cooperação, do respeito pela opinião dos outros e a aceitação das diferenças, e pode contribuir para o desenvolvimento de interesses culturais e do gosto pela pesquisa.

4. Orientações Metodológicas / Avaliação

4.1. Aplicações e Modelação

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real e das profissões estão no centro deste programa. As aplicações, integradas num contexto significativo para os estudantes, são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, sendo parte do processo de construção de conceitos matemáticos e usadas como fonte de exercícios. Sendo as actividades de modelação e resolução de problemas centrais neste programa, recomenda-se fortemente que se cumpram os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações devem estar interligadas;
- os problemas apresentados devem estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos;
- os contextos das situações problemáticas apresentadas devem integrar diferentes ideias matemáticas;
- alguns dos problemas a seleccionar devem ser abertos, obrigando os estudantes a escolher as ferramentas matemáticas mais adequadas.

A escolha de situações ricas e variadas é essencial para o cumprimento destes critérios. Recomenda-se a colaboração activa entre professores de Matemática e de outras disciplinas.

Os estudantes (individualmente ou em grupo) devem ter a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução de problemas; o facto de se poderem confrontar diferentes processos de resolução de problemas permite fomentar a aprendizagem de uma forma crítica, valorizando o trabalho efectuado.

Assim, para todos os assuntos, sem esquecer a necessidade de contacto com as ideias e os métodos fundamentais da Matemática, a um certo nível, o ensino da Matemática é organizado em volta das aplicações viradas para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais aos diferentes níveis de qualificação.

4.2. Comunicação Matemática

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica. É necessário proporcionar-lhe oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias ou outros, devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

4.3. Materiais manipuláveis

A ligação da Matemática com a realidade não pode ser feita apenas com representações e descrições abstractas de situações exteriores à sala de aula. Pelo menos nos primeiros níveis de escolaridade e no tema de Geometria, os estudantes necessitam de contactar directamente com objectos concretos. Na abordagem de cada um dos assuntos, os estudantes devem utilizar materiais manipuláveis diversos para realizar os modelos físicos que aumentem a compreensão das situações em estudo.

4.4. Tecnologia

O uso de tecnologias de cálculo e visualização é fundamental para a criação e o desenvolvimento de competências úteis a todos os desempenhos profissionais. Pelas suas especificidades, a calculadora

(básica, científica ou gráfica) e o computador completarão os meios à disposição dos professores e estudantes para executar os diferentes aspectos de uma verdadeira actividade matemática.

Não é possível atingir os objectivos deste programa, a partir dos cursos de Tipo 3 inclusive, sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores).

O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo, embora não seja exigível que se tratem todas simultaneamente e em todas as ocasiões; em particular, é fundamental a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, em algumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação.

4.4.1. Uso de calculadoras

As calculadoras básicas devem estar presentes no trabalho dos estudantes pertencentes aos cursos de Tipo 1. Nos cursos de Tipo 2 devem usar-se calculadoras científicas e a partir dos cursos de Tipo 3, inclusive, devem usar-se calculadoras gráficas. As calculadoras, ferramentas que cada vez mais se utilizam correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O uso de calculadoras é obrigatório.

Os estudantes devem aprender a utilizar os conhecimentos matemáticos na resolução de problemas, decidindo sobre a razoabilidade de um resultado e sobre o uso, consoante os casos, de cálculo mental, algoritmos de papel e lápis ou tecnologia (calculadoras ou computadores).

Quando usam calculadoras gráficas, os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade; é importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a “copiar” o que vêem.

4.4.2. Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da geometria dinâmica e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa. Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Programas de Geometria Dinâmica ou baseados na linguagem LOGO, de Cálculo Numérico e Estatístico, de Gráficos e Simulação, de Álgebra Computacional, Micromundos de diferentes tipos, fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente, havendo muito software de distribuição livre, como o editado pelo Ministério da Educação no âmbito dos projectos Minerva e Nónio Século XXI. Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os estudantes poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional. Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a maior frequência possível, de acordo com o material disponível. Nesse sentido as escolas são incentivadas a equipar-se com o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com a regularidade que o professor julgar aconselhável; para este trabalho e para um acesso mais funcional a materiais manipuláveis e jogos, recomenda-se que se constituam **Laboratórios de Matemática**.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem:

- observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas da representação gráfica;
- explorar claramente os diversos comportamentos e saber evitar conclusões apressadas;
- ser incentivados a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta e ser sistematicamente treinados na análise crítica de todas as conclusões;

- traçar sempre um número apreciável de funções, a par do traçado manual em papel quadriculado ou milimétrico;
- observar que a representação gráfica depende, de forma decisiva, do rectângulo de visualização escolhido.

Um estudante pode ser confrontado com situações em que erros de aproximação conduzam a resultados absurdos; quando isso acontecer deve saber analisar criticamente a situação, usando dados do problema em causa. Como forma de diminuir a possibilidade de ocorrência de situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de, nos cálculos intermédios, se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

4.4.3. Uso da *Internet*

Sendo hoje acessível a todas as escolas portuguesas a ligação à *Internet*, o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação, seja como fonte de informação, seja como fonte de recolha de dados realistas. É fundamental que os estudantes possam aprender a manipular as pequenas aplicações de acesso livre – “*applets*” ou apliquetas - dedicadas a um problema ou assunto muito específico que não exigem mais do que o conhecimento sobre a matemática em estudo.

A participação em actividades envolvendo estudantes de escolas diferentes é um bom meio de estimular a realização de actividades ligadas a situações reais e concretas.

4.5. Avaliação

Pretende-se que as situações de avaliação não se restrinjam ao produto final, mas atendam essencialmente ao processo de aprendizagem e permitam que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem. As actividades de aprendizagem deverão ser encaradas como tarefas de avaliação. O professor pode ficar a conhecer o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação; esses dados podem ser utilizados para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam aos estudantes oportunidade de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente.

Em cada módulo são indicadas actividades importantes a realizar, pelo que a avaliação de cada módulo deve valorizar adequadamente a actividade desenvolvida pelo estudante. Como orientação geral, são indicadas em cada módulo as formas de avaliação sumativa mais adequadas às actividades nele desenvolvidas. Entende-se que os professores poderão substituir cada prova proposta por uma ou mais provas que avaliem de forma equivalente as competências essenciais desenvolvidas em cada módulo.

5. Elenco Modular

A lista completa de módulos oferecidos nos curso de Educação e Formação é a seguinte:

Tipo 1 A e 1 B - 2º ciclo

Número	Designação	Duração de referência (horas)
1	A Matemática no Quotidiano	12
2	Números Inteiros e Operações: Algoritmos e Cálculo Mental	24
3	Dos sólidos às Figuras Planas: Perímetro, Área e Volume	24
4	Dos Inteiros aos Racionais	23
5	Padrões e Álgebra	23
6	Tratamento da Informação	18
7	Oficina	36

3º ciclo

Número	Designação	Duração de referência (horas)
8	Geometria Intuitiva	24
9	Das Equações aos Números	24
10	Do plano ao Espaço	24
11	Estatística e Probabilidades	24
12	Funções e Gráficos	24
13	Triângulo Rectângulo	24
14	Geometria do Círculo	18
15	Aproximações e Inequações	18

Curso de Formação Complementar

Número	Designação	Duração de referência (horas)
16	Geometria Prática	18
17	Problemas Numéricos	18
18	Geometria	36

T4, T5 e T6 - Ensino secundário

Número	Designação	Duração de referência (horas)
18	Geometria	36
19	Padrões Geométricos	30
20	Estatística	28
21	Funções Polinomiais	30
22	Funções Periódicas e Não Periódicas	30
23	Taxa de Variação	30
24	Estatística Computacional	30
25	Probabilidade	24
26	Modelos Discretos	24
27	Funções de Crescimento	24
28	Optimização	24

A carga horária prevista no programa não contempla a totalidade das horas de formação, existindo um crédito de horas a ser gerido pelo professor, quer a nível de cada módulo, quer a nível global, para desenvolvimento de actividades necessárias à consecução dos objectivos de aprendizagem tais como actividades de remediação, reorientação, aprofundamento ou para aquisição de pré-requisitos.

6. Bibliografia Geral

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Estas publicações do Departamento de Educação Básica constituem importantes fontes de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessárias para quem lecciona.

PONTE, J. P. (coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1997). *Didáctica: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES.

PONTE, JOÃO PEDRO (coord.), BRUNHEIRA, L., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1998). *Projectos Educativos: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário contêm numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que são de consulta indispensável.

ABRANTES, P.; PONTE, J.P. et al.(1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo Matemática para todos -- investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática

ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J.P. et al.(1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo Matemática para todos – investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Estes livros reúnem um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto Matemática para Todos à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes, as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática. De acordo com os organizadores dos livros o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas.

PALHARES, PEDRO (coord.) (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Lisboa: Lidel.

Um livro muito completo que se recomenda a todos os professores do Ensino Básico.

STRUİK, D. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Este livro é uma referência clássica na História da Matemática, recomendando-se a segunda edição por conter um anexo relativo à História da Matemática em Portugal.

ESTRADA, M.F., SÁ, C.C., QUEIRÓ, J.F., SILVA, M.C., COSTA, M.J. (2000). *História da Matemática* (Universidade Aberta, Vol.210). Lisboa: UA.

Este livro é o único que, em língua portuguesa, nos apresenta ao mesmo tempo uma panorâmica da História da Matemática e muitos exemplos concretos da matemática do passado. Contém perspectivas pouco usuais em livros de História da Matemática sobre a Matemática na China, em África, na Índia Medieval e na Civilização Islâmica. Inclui ainda um apanhado da História da Matemática em Portugal. Um excelente livro de consulta e fonte de exemplos que todos os professores de Matemática devem usar com frequência.

PONTE, J.P.; CANAVARRO, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol 128). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

GUZMÁN, M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometria*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

Este livro apresenta algumas propostas inovadoras para o trabalho em geometria, contendo numerosos exemplos que incluem o recurso ao software DERIVE.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (2002). *Funções no 3º ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Estas publicações contêm actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras

necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A primeira publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria - Temas actuais — Materiais para professores*. Col. "Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário", vol. 11. Lisboa: Instituto de Inovação Educativa.

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manual de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc." Este livro tem já um "prolongamento" na Internet no endereço

<http://www.iie.min-edu.pt/inovbasic/edicoes/livros/cdces/cdces11/>

PRECATADO, A.; GUIMARÃES, H. (org.), (2001) *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas muito variadas de actividades para a sala de aula, juntamente com um CD contendo os textos das actividades.

SEBASTIÃO E SILVA, J.; SILVA PAULO, J. *Compêndio de Álgebra*, 2 tomos, Livraria Cruz. Braga: 1968.

Estes Compêndios de Álgebra de Sebastião e Silva e Silva Paulo são referências para grande parte dos conceitos de Álgebra e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados na disciplina de Matemática Aplicada.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-78). *Compêndio de Matemática* (5 vols) Lisboa: MEC - GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975--77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC - GEP.

Estes livros são o ponto de referência de muitos aspectos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho dos professores. As "Normas Gerais" contidas no 1º volume do Guia devem ser objecto de reflexão por parte dos professores. Na primeira dessas Normas pode ler-se: "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

STEWART, IAN (1996). *Os Problemas da Matemática*. Ciência Aberta, Vol. 72, 2ª ed. Lisboa: Gradiva

O que é a Matemática? Segundo Ian Stewart a Matemática é sobre ideias não sobre símbolos e contas que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a obtenção da resposta certa, mas sobretudo com o perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. Ainda segundo Ian Stewart há, pelo menos, cinco fontes distintas de ideias matemáticas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. Os problemas são a força motriz da Matemática,

sendo os exemplos outra fonte importante de inspiração da Matemática, conforme assinala o mesmo autor.

VALADARES, J.; GRAÇA, M. (1998) *Avaliando ... para melhorar a aprendizagem* Lisboa: Plátano.

Este livro, de muito interesse para qualquer professor de Matemática, analisa diversos aspectos teóricos e práticos da avaliação, sem esquecer uma perspectiva histórica. Contém numerosos exemplos de construção de variados tipos de itens de avaliação (e não só para a Matemática). Analisa com bastante pormenor as diferentes fases do processo de avaliação e as características fundamentais dos instrumentos de avaliação (como a validade e a fidelidade).

CD-ROM

FIOLHAIS, C; PAIVA, J. (coord).(1998). *CD-ROM — Omniciência 98* Coimbra: SoftCiências.

Este CD contém dois programas de Matemática (relacionados com trigonometria e fractais), vários programas de Física com interesse para a Matemática (como o programa Kepler que simula o movimento de estrelas e planetas) e vários textos relacionados com a História da Matemática.

TEODORO, V. et al. *CD-ROM — Software Educativo para Física e Matemática*. Lisboa: DEP-GEF/ME.

Este CD contém 10 programas para ambiente "Windows", quase todos com muita relevância para o ensino da matemática no secundário. Destacamos um programa de Estatística, um de Geometria Descritiva (o GD) que, com uma linguagem simples, permite construir sólidos e rodá-los no espaço, o programa Thales e vários programas com interesse para o estudo das funções (envolvendo situações de modelação com funções).

INTERNET (Funcionais em Setembro de 2005)

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática no Secundário: — <http://www.dgidec.min-edu.pt/mat-no-sec>

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário, as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de actividades a desenvolver na sala de aula e de actividades interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis.

PROF. MIGUEL DE GUZMÁN OZÁMIZ: — <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/>

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática, o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso "Laboratório de Matemática", as actividades e os textos de divulgação matemática.

MOCHO - Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências" — <http://www.mocho.pt/>

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa, assim como um consultório sobre temas de Matemática.

NRICH — <http://nrich.maths.org/public/index.php>

Projecto da Universidade de Cambridge contendo propostas de problemas para estudantes do ensino básico e secundário. Os diferentes temas disponíveis estão ordenados aqui:

<http://nrich.maths.org/public/leg.php>

e os problemas do mês (ordenados por nível) estão aqui:

<http://nrich.maths.org/public/monthindex.php>

DESCARTES – Matemáticas interactivas — <http://descartes.cnice.mecd.es/>

Uma página do Ministério da Educação e Ciência de Espanha contendo lições, actividades e apliquetas relativas a todos os temas usuais de Matemática do Básico e Secundário.

MODELLUS WEB PAGE - Vítor Teodoro (SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL) - <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais e ficheiros de actividades que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática do secundário.

VIAJE GEOMÉTRICO AL ESPACIO
<http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/web3d/espanyol/indexesp.htm>

Página da responsabilidade de Claudi Alsina contendo descrições de inúmeros poliedros (poliedros estrelados, antiprismas, policubos, deltaedros, etc.) e superfícies (esferas, cilindros, cones, hélices, bandas de Moebius, etc.), assim como questões sobre cada um dos modelos (e respectivas soluções).

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA — <http://www.apm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que APM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA - <http://www.spm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que SPM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO – VÍDEOS: Os Primórdios da História da Matemática (e outros)
http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes e podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

Parte II

Módulos

Índice:

	Página
Módulo 1 A matemática no quotidiano	18
Módulo 2 Números inteiros e operações: algoritmos e cálculo mental	22
Módulo 3 Dos sólidos às figuras planas: perímetro, área e volume	26
Módulo 4 Dos inteiros aos racionais	30
Módulo 5 Padrões e Álgebra	34
Módulo 6 Tratamento da Informação	39
Módulo 7 Oficina	44
Módulo 8 Geometria intuitiva	47
Módulo 9 Das equações aos números	52
Módulo 10 Do plano ao espaço	55
Módulo 11 Estatística e probabilidades	59
Módulo 12 Funções e gráficos	62
Módulo 13 Triângulo rectângulo	66
Módulo 14 Geometria do círculo	69
Módulo 15 Aproximações e inequações	72
Módulo 16 Geometria prática	75
Módulo 17 Problemas numéricos	78
Módulo 18 Geometria	81
Módulo 19 Padrões geométricos	85
Módulo 20 Estatística	89
Módulo 21 Funções polinomiais	93
Módulo 22 Funções periódicas e não periódicas	97
Módulo 23 Taxa de variação	102
Módulo 24 Estatística computacional	106
Módulo 25 Probabilidade	110
Módulo 26 Modelos discretos	114
Módulo 27 Funções de crescimento	119
Módulo 28 Optimização	123

MÓDULO 1

A Matemática no Quotidiano

Duração de Referência: **12 horas**

1 | Apresentação

Neste módulo os estudantes exploram alguns problemas que devem ser significativos e do seu universo próximo. Pretende-se, por um lado, obter um diagnóstico sobre os seus conhecimentos e capacidades com vista a determinar o grau de aprofundamento dos temas subsequentes, e por outro dar aos estudantes uma perspectiva globalizante sobre a utilidade da Matemática no seu dia-a-dia que possa constituir uma motivação para o estudo desta disciplina. Os problemas devem estabelecer conexões entre vários tópicos e mobilizar conceitos matemáticos do âmbito do primeiro ciclo, que poderão ser trabalhados em contexto com maior aprofundamento; é o caso das grandezas e medidas e suas relações, das figuras geométricas e das operações. Além destas finalidades procurar-se-á, em última análise, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a predisposição para raciocinar matematicamente, designadamente para explorar situações problemáticas;
- o gosto e a confiança pessoal em realizar actividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático;
- a predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução;
- a aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua e adequada à situação.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são:

- ler e interpretar dados;
- traduzir uma situação em diferentes representações;
- escolher e implementar uma estratégia adequada de resolução de um problema;
- utilizar diferentes estratégias de resolução num problema;
- interpretar e criticar resultados no contexto de um problema.

4 | Conteúdos

1. Este tema, sendo transversal, aborda conteúdos já conhecidos e/ou que serão tratados em diferentes módulos. Deste modo, pretende-se que os estudantes, face a um problema, sejam progressivamente capazes de:

- Ler e compreender
- Fazer e executar um plano de resolução
- Verificar a resposta obtida.

2. Para fazer e executar o plano, os estudantes devem familiarizar-se com algumas estratégias de resolução de problemas.

5 | Orientações metodológicas

Sugere-se a exploração e resolução de problemas que recorram à utilização de estratégias diversificadas, tais como:

- experimentação
- simulação/dramatização
- organização de dados em tabelas, listas ou esquemas
- tentativa e erro
- descoberta de um padrão.

Os estudantes devem ser incentivados a confrontar ideias com os colegas e a explicitar oralmente os seus raciocínios e processos de resolução.

Apresentam-se como exemplo os seguintes problemas:

1. *Uma cabra está presa a uma argola na parede de um grande armazém de fruta por uma corda de 5m. A argola dista 2m da esquina do armazém, que é um edifício quadrado com 10m de lado. Identifique a região em que a cabra pode movimentar-se para pastar.*

Este problema pode ser simulado, perspectiva o trabalho ulterior com círculos, o uso de instrumentos de desenho e a exploração de grandezas e medidas.

2. *Construa uma caixa cúbica em cartolina com 10cm de aresta. Investigue, por enchimento, que volume de água contém.*

Este problema, utilizando a experimentação, associa conceitos geométricos (cubo, planificação do cubo) com medidas de capacidade e de volume, tendo como objectivo último a identificação do dm^3 com o litro. Deve ser usada, para enchimento com água, uma vasilha graduada.

3. *O Carlinhos, que era finório e sabia de contas, pediu ao pai que, durante as férias, lhe desse 2 cêntimos no primeiro dia, 4 cêntimos no segundo dia, 8 cêntimos no terceiro dia, e assim sucessivamente até ao fim das férias. O pai, achando o pedido razoável, concordou. Mas ao fim de 15 dias rompeu o contrato. Descubra porquê.*

Este problema incentiva à descoberta de um padrão e à construção de uma tabela para a organização da informação. Mobiliza a operação de multiplicação e perspectiva o trabalho futuro com potências. Permite ainda o relacionamento de várias quantias em dinheiro de ordens muito diferentes.

4. *Lance um pionés ao ar vinte vezes. De que forma caiu? Recolha os dados e junte-os com os dos seus colegas. Registe os dados do conjunto da turma e apresente-os de forma clara. Tire conclusões sobre a experiência.*

Este problema sugere uma abordagem informal dum acontecimento aleatório e simultaneamente uma experiência de recolha, apresentação e análise de dados. É natural e interessante o seu relacionamento com fenómenos semelhantes (e.g. lançamento de uma moeda)

6 | Sugestões de avaliação

Para além da avaliação contínua que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho, estão previstas três horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos.

Prova 1 – Resolução, por escrito, de um problema. Este, mais do que exigir conhecimentos matemáticos (que os estudantes podem ainda não possuir) deve mobilizar o raciocínio e a escolha de estratégias.

Prova 2 – Apresentação oral do problema à turma (para o efeito, podem ser dados problemas diferentes aos diferentes estudantes).

7 | Bibliografia / Outros recursos

MASON, J. et al. (1982). *Thinking Mathematically*. Wokingham, Addison-Wesley Publishing Company.

Este livro trata dos processos que estão no coração da matemática, tendo várias propostas práticas de questionamento que produzem uma consciencialização da natureza do pensamento matemático.

NCTM (1989). *Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Nestas duas obras há vários exemplos de situações problemáticas adequadas a estudantes de vários níveis de ensino.

POLYA, G. (2002). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Obra de referência sobre processos e métodos de resolução de problemas, apresenta um modelo de resolução próprio e vários exemplos práticos.

VALE, I. E PIMENTEL, T. (2004). Resolução de Problemas. Em Pedro Palhares (coord.) *Elementos de Matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.

Trata-se de um capítulo especialmente dedicado à resolução de problemas onde é discutida a sua importância e várias formas de abordagem. É também uma boa fonte de problemas.

STEVENSON, F. W. (2001). *Exploratory problems in mathematics*. Reston: NCTM.

Obra que constitui uma excelente fonte de problemas e tarefas de investigação matemática.

OUTROS RECURSOS

Material de desenho (régua, esquadro, compasso, transferidor).
Material de desgaste (cartolina, cola, tesouras, pioneses).
Vasilhas graduadas.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

WORD PROBLEMS FOR KIDS - <http://www.stfx.ca/special/mathproblems/welcome.html>

Problemas de palavras para estudantes de diferentes níveis.

ONLINE MATH COLLECTION - <http://sln.fi.edu/math/index.html>

Sítio contendo uma enorme variedade de problemas para vários níveis, incluindo um conjunto de problemas inspirados por diferentes culturas à volta do mundo.

MATH FUNDAMENTALS PROBLEM OF THE WEEK - <http://mathforum.org/funpow/>

Fórum para professores de matemática de todos os graus de ensino contendo, entre outros, o problema da semana.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

MÓDULO 2

Números inteiros e operações: algoritmos e cálculo mental

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

Neste tema o estudante deve tomar contacto progressivamente com os números inteiros e as operações. Estas devem surgir da resolução de situações problemáticas do dia-a-dia. Na procura dos resultados deve privilegiar-se sempre que possível o cálculo mental. Os algoritmos são trabalhados ou lembrados na medida em que as necessidades o exigem, não como um fim em si mas como uma ferramenta útil na resolução de problemas. A calculadora deve ter um papel fundamental como instrumento facilitador quer de cálculos mais complicados (e.g. divisões em que o divisor tem mais que um algarismo) quer de exploração e pesquisa de regularidades.

2 | Competências Visadas

Neste módulo, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a compreensão do sistema de numeração de posição e do modo como este se relaciona com os algoritmos das quatro operações;
- a aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação;
- a sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- a aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados;
- o reconhecimento dos números inteiros e de formas diferentes de os representar e relacionar, bem como a aptidão para usar as propriedades das operações em situações concretas, em especial quando estas facilitam a realização de cálculos.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Ao longo deste módulo devem ser dadas aos estudantes oportunidades de:

- explicar o funcionamento do sistema posicional;
- comparar e ordenar números;
- utilizar as operações básicas na resolução de problemas;
- estimar ordens de grandeza de um resultado recorrendo ao cálculo mental;
- traduzir em linguagem matemática uma situação dada em linguagem corrente e vice-versa;
- calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações;
- utilizar uma calculadora no cálculo de expressões numéricas, designadamente na análise da prioridade dada às operações nos diversos modelos.

4 | Conteúdos

1. Representação dos números naturais: sistema posicional.
2. Marcação de números numa recta graduada.
3. Ordenação.
4. Adição, subtracção, multiplicação e divisão: (re)descoberta progressiva face a situações problemáticas.
5. Verificação intuitiva das propriedades das operações.
6. Algoritmos das quatro operações.
7. Operadores numéricos “dobro de”, “triplo de”, “metade de”, “terça parte de”, etc. e sua composição.
8. Descoberta das regras para multiplicar por 10, 100 e 1000.
9. Expressões numéricas: regras de prioridade e relacionamento com a calculadora.

5 | Orientações metodológicas

Devem ser utilizados materiais (e.g. material comum, material multibase), para a compreensão do valor posicional e do significado das operações. Também deve dar-se especial importância à utilização de representações adequadas (e.g. modelo da recta numérica para a adição e a subtracção, modelo de área para a multiplicação).

Os estudantes devem explorar uma grande diversidade de situações problemáticas que traduzam a combinação, comparação, separação e partição de resultados para se irem progressivamente apropriando dos conceitos ligados às operações básicas, e devem ser incentivados a fazer registos tais como desenhos, esquemas, tabelas que facilitem a interpretação e organização dos dados.

A construção de tabelas de duas entradas para a adição e a multiplicação pode proporcionar um contexto interessante para a exploração das propriedades das operações e sua relação com as operações inversas.

Deve sempre e em todas as situações ser valorizada a estimativa recorrendo ao cálculo mental; para isso devem ser utilizados jogos e quebra-cabeças numéricos (e.g. jogo do vinte e quatro). O recurso a jogos tradicionais como as cartas e o dominó pode fornecer oportunidades para o reforço desta competência.

Poderá ser trabalhado, a título de curiosidade, o sistema de numeração romana.

Os algoritmos de papel e lápis têm também o seu papel na aprendizagem; a desmontagem do funcionamento dos algoritmos, que se baseia no sistema posicional decimal, pode ser uma oportunidade para desenvolver a sua compreensão e a do próprio significado das operações. Poderão ser apresentados como motivação alguns algoritmos alternativos como, por exemplo, o método da gelosia para a multiplicação. No entanto, deve atender-se às características e à idade dos estudantes e nunca perder de vista que o essencial na aprendizagem da matemática não é o domínio de técnicas mecanizadas mas o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de resolução de problemas. A calculadora deve ser usada como complemento dos algoritmos de papel e lápis quando estes se tornam demasiado morosos ou complicados e se reconhece o risco de o estudante se desinteressar da sua actividade por se enredar nas dificuldades de cálculo.

Módulo 2: Números inteiros e operações: algoritmos e cálculo mental

Deverão ser feitas explorações e investigações que desenvolvam no estudante o sentido do número, ou seja, a intuição e a percepção das relações entre os números de modo a flexibilizar o pensamento numérico.

6 | Sugestões de avaliação

Para além da avaliação contínua que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho, devem ser previstas três horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos:

Prova 1 – Teste escrito.

Prova 2 – Resolução, em pares, de uma tarefa de investigação sobre números. Apresenta-se como sugestão a seguinte:

Jogo do trinta e um de boca – O primeiro estudante a jogar diz alto um dos três primeiros números; o colega pode dizer, por seu turno, um dos três números seguintes e assim sucessivamente (exemplo: 2 – 5 – 7 – 8 – 10 – 13 - ...). Ganha o que conseguir dizer 31. Os estudantes devem, inicialmente, jogar diversas vezes; pretende-se, numa segunda fase, que investiguem e descubram uma estratégia que permita ganhar o jogo.

7 | Bibliografia / Outros recursos

BLUM, R. (1998). *Brincando com a Matemática*. Lisboa: Replicação.

Uma boa colecção de truques, quebra-cabeças, testes de memória e outras experiências interessantes.

DANTZIG, T. (1970). *Número, a Linguagem da Ciência*. Lisboa: Editorial Aster.

Esta é uma obra que apresenta de uma forma cativante e acessível curiosidades históricas sobre os números.

ENZENSBERGER, H.M. (1998) *O Diabo dos Números*. Porto: Edições Asa.

A história de um rapaz que, não gostando de Matemática, aprende em sonhos com um diabinho os segredos e os mistérios dos números.

TAHAN, M. (1973). *As Maravilhas da matemática*. Rio de Janeiro: Edições Bloch.

Trata-se de um texto romaneado sobre factos relacionados com a história da Matemática. Apresenta episódios e problemas que podem ser utilizados no ensino da matemática elementar.

VALE, I. E PIMENTEL, T. (2004). Números e Operações. Em Pedro Palhares (coord.) *Elementos de Matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.

Trata-se de um capítulo especialmente dedicado aos números e operações, onde se apresentam alguns sistemas de numeração, os conceitos de base e valor posicional e as definições das quatro operações básicas e suas propriedades. São referenciadas várias estratégias de cálculo mental.

Módulo 2: Números inteiros e operações: algoritmos e cálculo mental

OUTROS RECURSOS

Ábacos, material multibase, jogo do vinte e quatro, calculadoras, cartas, dominós.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://www.apm.pt/recursos/ciclo2/streze/index.html>

Na página da Associação de Professores de Matemática, esta actividade envolve o conceito de padrão numérico.

<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/pt/>

Página do Instituto Freudenthal, na Holanda, apresentando uma grande variedade de apliquetas para o ensino da matemática elementar, algumas delas traduzidas para português. Em particular, o jogo Broken calculator possibilita o cálculo mental de operações com números inteiros.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

<http://www.321know.com/fra64ax2.htm>

Permite que os estudantes de modo interactivo reconheçam, representem, modelem e utilizem os números reais e operações em cálculos e na resolução de problemas.

MÓDULO 3

Dos sólidos às figuras planas: perímetro, área e volume

Duração de Referência: 24 horas

1 | Apresentação

A aprendizagem de aspectos relacionados com a geometria é importante para que os estudantes desenvolvam o conhecimento do espaço que os rodeia. O conhecimento, as relações e as ideias geométricas tanto são úteis por estarem presentes em situações do dia-a-dia, como relacionadas com outros tópicos da matemática. A aprendizagem da geometria deve estar intimamente relacionada com a realidade. O desenvolvimento nos estudantes de uma intuição geométrica e de raciocínio espacial, bem como da capacidade de visualizar, devem ser preocupações permanentes do professor. Para além disso, os estudantes necessitam de desenvolver a capacidade de experimentar, explorar, avaliar, recomeçar, conjecturar, generalizar e argumentar. Deve ainda desenvolver-se a capacidade de organização e comunicação. Por isso, os estudantes devem ser confrontados com tarefas no âmbito da resolução de problemas, que lhes permitam passar do espaço ao plano e do geral ao particular. Estas tarefas devem favorecer o gosto pela geometria e permitir o desenvolvimento do raciocínio matemático.

2 | Competências Visadas

Neste módulo a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;
- a aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas de geometria e em outras áreas de matemática;
- a compreensão dos conceitos de comprimento, perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;
- a compreensão do processo de medição e a aptidão para fazer medições e estimativas em situações diversas do quotidiano utilizando instrumentos apropriados;

3 | Objectivos de Aprendizagem

Ao longo deste módulo, devem ser dadas aos estudantes oportunidades de:

- identificar e descrever sólidos geométricos, tais como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas;
- construir modelos de sólidos a partir de planificações dadas e descobrir planificações de sólidos;
- identificar ângulos rectos, agudos, obtusos e rasos. Medir, em graus, a sua amplitude;
- identificar figuras planas. Calcular o perímetro de figuras planas;
- descobrir e traçar eixos de simetria de figuras geométricas simples;
- construir em papel quadriculado a figura simétrica de outra em relação a uma recta;
- distinguir perímetro de área;
- obter experimentalmente as fórmulas das áreas do rectângulo e do quadrado;
- calcular a área de figuras planas simples por decomposição em quadrados e rectângulos;
- indicar valores aproximados da área de uma figura desenhada em papel quadriculado, através do seu enquadramento;
- reconhecer que a medida de um comprimento, de uma área e de um volume depende da unidade escolhida;

4 | Conteúdos

1. Prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.
2. Ângulo - diferentes tipos. Amplitude de um ângulo.
3. Figuras planas. Polígonos. Perímetro.
4. Simetria. Eixo de simetria de uma figura. Figuras simétricas.
5. Área. Áreas por decomposição e enquadramento.
6. Área do rectângulo e do quadrado.
7. Volume. Volume do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

5 | Orientações metodológicas

Para o estudo da geometria é importante que os estudantes observem e identifiquem as formas geométricas que surgem no meio ambiente, bem como manipulem objectos do dia-a-dia e modelos geométricos correspondentes. Devem descrever por palavras suas essas formas.

Os estudantes devem construir modelos de sólidos e essa oportunidade deve ser aproveitada para que possam aperceber-se que os padrões estão subjacentes em muitas questões da matemática. Assim, é importante que investiguem, por exemplo, relações entre o número de vértices e o número de lados do polígono da base de uma pirâmide ou de um prisma e entre o número de faces, vértices e arestas. Em vez de serem fornecidas aos estudantes planificações de certos sólidos, deve pedir-se-lhes que planifiquem um pacote de leite, uma caixa de cereais, uma caixa de perfume, etc., cortando as caixas pelas arestas e assentando a caixa num plano. Os estudantes devem ser colocados perante diferentes possibilidades de obter uma planificação e, de entre possíveis configurações, devem identificar, justificando, as planificações de um cubo e um paralelepípedo. Por exemplo, perante os diferentes pentaminós os estudantes devem explicar quais representam a planificação de uma caixa aberta.

O trabalho com a simetria pode tirar partido da observação de animais, plantas, objectos de arte e decoração. As dobragens, o geoplano, o papel quadriculado, os espelhos, o mira, bem como os ambientes de geometria dinâmica, podem permitir aos estudantes o reconhecimento da existência de eixos de simetria de uma dada figura, bem como a construção da figura simétrica de uma dada figura em relação a um eixo.

O conceito de perímetro pode ser trabalhado com base em problemas concretos, adequados aos estudantes, como por exemplo, o problema de colocar franja em toalhas de formas diferentes: circular, oval, quadrada, rectangular. Os estudantes devem explicar como se pode saber, exactamente, que porção de franja comprar. O cálculo de áreas por decomposição e enquadramento pode tirar partido da utilização do geoplano e de papel quadriculado diversificado, que permita aos estudantes concluir sobre a possibilidade de obterem valores mais precisos para a área de uma figura. Para a exploração destas situações é aconselhável utilizar exemplos concretos do dia-a-dia, como seja uma situação de uma fábrica de roupa onde se pretenda calcular a área de tecido gasto para produzir um determinado modelo.

Para ajudar a distinguir perímetro de área, os estudantes podem investigar relações em figuras, por exemplo, se rectângulos com a mesma área também têm o mesmo perímetro e vice-versa.

Para que os estudantes possam perceber que a medida de um comprimento, uma área ou um volume depende da unidade escolhida para comparação, devem ter a possibilidade de realizar experiências concretas e de explicar, com algum detalhe, os resultados obtidos, desenvolvendo assim a capacidade de comunicar matematicamente

6 | Sugestões de avaliação

Para além da avaliação contínua que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho, estão previstas quatro horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos:

Prova 1 – Um teste escrito com a duração de uma hora.

Prova 2 – Apresentação oral de um problema, escolhido pelo estudante e preparado com antecedência necessária, de entre os problemas resolvidos durante a aprendizagem do módulo. Por exemplo: pode pedir-se ao estudante que construa uma caixa para embalar um determinado produto; pode propor-se aos estudantes a investigação da variação do volume do paralelepípedo rectângulo mantendo constante a área da superfície lateral, usando, por exemplo, folhas de papel A4. A realização do trabalho deve ser orientada pelo professor que apresentará, sempre que necessário, propostas de reformulação.

7 | Bibliografia / Outros recursos

BASSAREAR, T. (1997). *Mathematics for Elementary School Teachers*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Nesta obra é possível aprofundar os temas abordados. A obra apresenta referências históricas, bem como aplicações dos conceitos referidos. Contém muitas propostas de trabalho destinadas ao leitor, bem como orientações metodológicas.

FONSECA, L. (2004). Geometria no plano. Em Pedro Palhares (Coord.), *Matemática para a Educação Básica*, pp. 251-302. Lisboa: Lidel.

Neste capítulo desta obra é possível aprofundar os temas abordados. São apresentadas várias propostas de trabalho destinadas ao leitor.

GOMES, A. E RALHA, E. (2004). Geometria no espaço e noções topológicas. Em P. Palhares (Ed.), *Matemática para a Educação Básica*, pp. 303-332. Lisboa: Lidel.

Neste capítulo desta obra é possível aprofundar os temas abordados. São apresentadas várias propostas de trabalho destinadas ao leitor.

JACOBS, H. (1974). *Geometry*. San Francisco: Freeman.

Nesta obra é possível aprofundar os temas abordados. A obra realça a geometria como sistema lógico, apresenta referências históricas, bem como aplicações dos conceitos referidos. Contém muitas propostas de trabalho destinadas ao leitor.

JUNQUEIRA, M. E VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Nesta obra é possível encontrar propostas de tarefas de sala de aula com recurso a uma aplicação de geometria dinâmica (AGD).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.[Tradução portuguesa: Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM/IIIE, 1991].

Módulo3: Dos sólidos às figuras planas

Nesta obra é possível encontrar reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino da matemática, sugestões sobre o modo de trabalhar diferentes conteúdos, bem como propostas de trabalho variadas para os estudantes.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1992). *Geometry in the middle grades. Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Addenda series. Reston: NCTM. (Tradução portuguesa: Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Coleção de adendas – Geometria dos 2º e 3º ciclos. Lisboa: APM, 2001].

Obra com propostas de trabalho sobre geometria, para adaptar ou utilizar directamente com estudantes.

OUTROS RECURSOS

Para o desenvolvimento da capacidade de visualização e raciocínio espacial sugere-se o trabalho com material manipulável, tal como palhinhas e clips, palitos e plasticina, tiras finas de cartolina e ataches, tangram, pentaminós, *polydron*, cubos coloridos, blocos padrão, geoplano, papel quadriculado, espelhos, mira.

Sugere-se também o recurso a uma aplicação de geometria dinâmica que poderá permitir aos estudantes experimentar, testar e avaliar as suas ideias.

Vídeos

REGO, F., CASTANHEIRA, I., CALDEIRA, J. (1994). *Geometria*. Departamento da Educação Básica. Estrutura de Projecto do Ensino Básico Mediatizado.

Projecto Matemática em Acção (2000). *A história do π* .

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

<http://www.math.okstate.edu/mathdept/symmetry>

Propostas de trabalho com simetrias.

<http://www.apm.pt/apm/menumat/menu4.html>

<http://www.hipernet.ufsc.br/foruns/ine/documentos/geoexerc.doc>

Propostas de trabalho com o geoplano.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

MÓDULO 4

Dos inteiros aos racionais

Duração de Referência: **23 horas**

1 | Apresentação

Os números fraccionários surgem naturalmente de situações reais que impliquem operações de medição ou repartição às quais os inteiros já não dão resposta. Os estudantes já tomaram contacto com alguns destes números, tendo aqui oportunidade para desenvolver a sua compreensão, utilizar diferentes representações e resolver problemas simples do dia-a-dia. Faz-se também aqui a extensão ao conjunto dos números inteiros relativos, seguindo a mesma linha de apresentação de situações reais que já não podem ser traduzidas pelos conjuntos numéricos conhecidos.

2 | Competências Visadas

Neste módulo, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- o reconhecimento do conjunto dos números racionais, das diferentes formas de representação dos seus elementos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações e a aptidão para usá-las em situações concretas;
- a sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- a aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados;
- a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Ao longo deste módulo devem ser dadas aos estudantes oportunidades de:

- comparar e ordenar números racionais representados de diversas formas;
- escrever fracções equivalentes a uma fracção dada;
- modelar, recorrendo a material concreto, as operações com racionais sob a forma de fracção;
- utilizar as operações básicas com números racionais na resolução de problemas;
- estimar ordens de grandeza de um resultado recorrendo ao cálculo mental;
- utilizar correcta e criticamente uma calculadora no cálculo de operações com racionais;

4 | Conteúdos

1. Fracções; fracções equivalentes.
2. Marcação de números racionais numa recta graduada.
3. Comparação e ordenação.
4. Adição e subtracção.

5. Verificação intuitiva das propriedades das operações.
6. Multiplicação e divisão.
7. Verificação intuitiva das propriedades das operações
8. Expressões numéricas: regras de prioridade e relacionamento com a calculadora.

5 | Orientações metodológicas

No estudo das fracções têm importância as suas várias interpretações: parte-todo, quociente, razão e operador. Para a compreensão das duas primeiras, os estudantes devem fazer representações esquemáticas, por exemplo em papel quadriculado, e construir materiais simples como dobragens e recortes, utilizando modelos rectangulares ou circulares. Podem ser usadas tiras de papel unitárias divididas em meios, terços, quartos, ..., permitindo construir, por dobragem, famílias de fracções $\left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right)$, o que conduzirá às fracções equivalentes e à comparação e ordenação de racionais na recta numérica. Poderão também usar modelos discretos, como conjuntos de objectos a representar o todo e fazer a sua partição em partes iguais. Sugere-se ainda, como actividade, procurar o maior número possível de modos de dividir um rectângulo em metades e em seguida, em oitavos, não necessariamente geometricamente iguais.

As operações de adição e subtracção poderão ser introduzidas através de um modelo rectangular ou da utilização da recta numérica. Deverá ter-se em atenção as dificuldades dos estudantes por forma a evitar que a complexidade dos cálculos relativos às operações com racionais na forma de fracção os impeça de “atacar” e resolver problemas, por se perderem e desmotivarem nos procedimentos algorítmicos; nestes casos será preferível privilegiar o uso da representação decimal e da calculadora. Sugere-se que sejam trabalhadas situações numéricas não mais complicadas que:

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} - \frac{4}{5}; \quad \frac{1}{3} + \frac{7}{6}; \quad \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}; \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{12}; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{2}$$

As propriedades das operações serão referidas apenas como um meio de facilitar os cálculos. Deve continuar-se a valorizar a importância da estimativa e do cálculo mental.

6 | Sugestões de avaliação

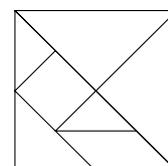
Para além da avaliação contínua, que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho, devem ser previstas três horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos:

Prova 1 – Teste escrito.

Prova 2 – Exploração de uma tarefa envolvendo números racionais. Apresenta-se como sugestão a seguinte:

Na pastelaria Geométrica, os bolos têm forma quadrada e as fatias são em “tangram”. Precisamos de determinar que parte do bolo representa e quanto deverá custar cada fatia sabendo que o bolo, no seu todo, custa 10 euros.

Os estudantes poderão desenhar e recortar o tangram para facilitar a exploração da tarefa.



7 | Bibliografia / Outros recursos

DANTZIG, T. (1970). *Número, a Linguagem da Ciência*. Lisboa: Editorial Aster.

Esta é uma obra que apresenta de uma forma cativante e acessível curiosidades históricas sobre os números.

NCTM (1994). Understanding rational numbers and proportions. *Addenda Series Grades 5-8*. Reston: NCTM.

Documento que apoia as Normas do NCTM no tema dos números racionais. São sugeridas várias actividades para utilizar na sala de aula que fazem uso de números racionais e suas interpretações.

VALE, I. E PIMENTEL, T. (2004). Dos Inteiros aos Reais. Em Pedro Palhares (coord.) *Elementos de Matemática para professores do ensino básico*. Lisboa: Lidel.

Neste capítulo estuda-se a evolução histórica do conceito de número, dos naturais aos reais. Realçam-se as operações e propriedades do conjunto dos números racionais, com destaque para os números decimais.

NIVEN, I. (1984). *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Esta é uma obra para professores que permite esclarecer algumas questões relativas aos universos numéricos.

CONWAY, J. E GUY, R. (1999). *O Livro dos Números*. Lisboa: Gradiva/Universidade de Aveiro.

Esta obra apresenta factos, figuras e histórias à volta dos números e das regularidades numéricas.

OUTROS RECURSOS

Papel quadriculado, círculos em papel divididos em sectores, material Cuisenaire, barras de fracções, fracções de encaixe, geoplano, tangram.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://www.apm.pt/apm/menumat/menu12.html>

É um jogo para duas pessoas que permite comparar e ordenar fracções.

<http://www.fi.uu.nl/rekenweb/pt/>

Página do Instituto Freudenthal, na Holanda, apresentando uma grande variedade de apliquetas para o ensino da matemática elementar, alguns deles traduzidos em português.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

Módulo 4: Dos inteiros aos racionais

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

<http://www.321know.com/fra64ax2.htm>

Permite que os estudantes de modo interactivo reconheçam, representem, modelem e utilizem os números reais e operações em cálculos e na resolução de problemas.

http://descartes.cnice.mecd.es/ingles/3rd_year_secondary_educ/Fract_dec_ptges/

Tutorial sobre números racionais.

http://my.nctm.org/eresources/view_article.asp?article_id=2071&page=4#

A arte de fracções é disponibilizada neste sitio do NCTM de forma interactiva e permite aos estudantes representar fracções de vários modos e estudar fracções equivalentes.

MÓDULO 5

Padrões e álgebra

Duração de Referência: **23 horas**

1 | Apresentação

Desde os primeiros anos de escolaridade, os estudantes podem e devem ser encorajados a observar padrões, a representá-los tanto geométrica como numericamente, começando a estabelecer conexões entre a geometria e a aritmética. O estudo dos padrões proporciona, motiva e dá significado à matemática que os estudantes aprendem.

O contacto com o raciocínio proporcional surge muito cedo na vida dos estudantes. Apercebem-se que se, por exemplo, o número de lápis duplica também duplica o preço correspondente. No entanto, os estudantes precisam de entender que nem sempre que duas grandezas aumentem ou diminuam o fazem proporcionalmente.

A Álgebra é um tema que apenas começa a ser tratado de modo explícito na fase final da educação básica e, em geral, a um nível ainda introdutório. Contudo, os estudantes começam a contactar desde muito mais cedo, de maneira intuitiva, com ideias que estão na base da álgebra e das funções. Deste modo, o ensino deve apontar também no sentido de se iniciar o seu estudo de um modo fortemente intuitivo e informal. Com efeito, tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas podem ser relacionadas com padrões numéricos, representações geométricas e métodos algébricos.

2 | Competências Visadas

Neste módulo as competências matemáticas que todos devem desenvolver são:

- a predisposição para procurar padrões e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- a aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras;
- a aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- a sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas;
- a compreensão de padrões, relações e representações algébricas elementares.
- o reconhecimento de situações de proporcionalidade directa e a aptidão para usar o raciocínio proporcional em problemas diversos;
- a aptidão para trabalhar com percentagens e para compreender e utilizar as suas diferentes representações.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Ao longo deste módulo devem ser dadas aos estudantes oportunidades de:

- identificar, descrever, traduzir, continuar e criar padrões numéricos e não numéricos, de repetição e de crescimento, recorrendo a acções, objectos, formas, palavras e números;
- identificar um padrão que envolva conceitos numéricos (números pares e ímpares, múltiplos, potências, ...) e a lei que o gera, usando essa informação para resolver problemas;
- representar e usar a ideia de variável em expressões numéricas usando letras ou símbolos;
- formular generalizações baseadas em padrões (e.g. cor, forma, tamanho) de modo a fazer previsões;
- descrever, continuar e generalizar padrões numéricos e não numéricos usando tabelas, gráficos, palavras e símbolos;
- reconhecer situações de proporcionalidade directa;
- descobrir experimentalmente a propriedade fundamental das proporções;
- calcular mentalmente, em casos simples, o resultado da aplicação de uma percentagem;
- interpretar uma percentagem num dado contexto, designadamente, em gráficos circulares;
- resolver equações simples, decorrentes de situações de proporcionalidade directa, usando as propriedades das proporções;
- resolver problemas que envolvam o conceito de proporcionalidade directa, em particular, com percentagens e escalas.

4 | Conteúdos

1. Padrões numéricos e não numéricos.
 - Números pares e ímpares.
 - Múltiplos e divisores de um número.
 - Potências.
 - Noção de variável.
2. Proporcionalidade directa.
 - Constante.
 - Proporção.
 - Percentagens.
 - Escalas.

5 | Orientações metodológicas

No seu quotidiano, os estudantes encontram padrões com muita facilidade, no papel de embrulho, nos lenços, nos tapetes, nos azulejos, no ferro forjado ou em figuras. Também a observação de sequências numéricas permite a procura e o reconhecimento de padrões e de diversas relações entre os números. Reconhecer padrões envolve conceitos como a forma, a cor, o tamanho, o número. O professor deve proporcionar aos estudantes o contacto com situações que permitam a reprodução e continuação de padrões, como os que a seguir se apresentam, por exemplo, padrões de repetição e padrões de crescimento, usando material concreto, mas também através de movimentos ou sons.

A B A B A B A B ...

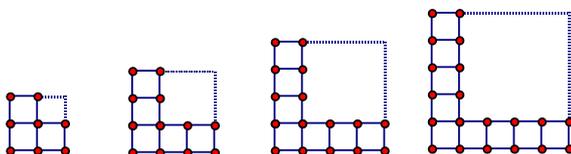
Levantar sentar levantar sentar levantar sentar ...

Bater 1 palma *silêncio* Bater 2 palmas *silêncio* Bater 3 palmas *silêncio* ...



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

1, 2, 4, 8, 16, 32, ...



O reconhecimento de padrões em sequências numéricas e a generalização através de regras que os próprios estudantes podem formular, recorrendo à simbologia – primeiro passo para o uso de variáveis — permitem que a aprendizagem da álgebra se processe de um modo gradual e ajudam a desenvolver a capacidade de abstracção. Esta capacidade é essencial para o desenvolvimento da competência matemática. Antes de se entrar na manipulação algébrica formal (usando expressões literais, resolvendo equações, etc.), é importante todo um percurso que inclua um grande número de experiências algébricas informais — o desenvolvimento do pensamento pré-algébrico. Esta noção envolve pensar nas relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, recorrendo ao uso de símbolos.

A procura de padrões em sequências numéricas pode ser uma boa oportunidade para introduzir ou relembrar números e relações numéricas, por exemplo, números pares e ímpares, múltiplos e potências.

As actividades de tipo exploratório e investigativo, que apelem à descoberta e comunicação de generalizações, podem desempenhar um papel central no desenvolvimento de capacidades ligadas ao pensamento algébrico.

Para que os estudantes reconheçam situações de proporcionalidade directa devem ser-lhes apresentadas outras situações que o não sejam, para que possam detectar semelhanças e diferenças. Também devem ser solicitados aos estudantes exemplos de situações do dia-a-dia que sejam de proporcionalidade directa, devendo ser-lhes pedidas explicações para essa classificação.

Por vezes são entendidas como directamente proporcionais duas grandezas cuja diferença é uma constante. Uma tarefa interessante é a da ampliação ou redução de um puzzle (tangram, pentaminós, etc), usando papel quadriculado. Ao resolver esta tarefa, adequada para trabalho em pares ou grupo, os estudantes podem deparar-se com dificuldades e erros cometidos durante o trabalho. A discussão e o(s) modo(s) encontrados para tentarem ultrapassar as dificuldades podem permitir perceber por que razão cometeram erros.

Relativamente ao cálculo mental de percentagens referimo-nos a situações simples como 50%, 25%, 75% e 10%. Para outras situações, a utilização da tecla da percentagem da calculadora pode ser um meio de auxiliar os cálculos, deixando mais tempo para o desenvolvimento de actividades complementares de estimativa e de resolução de problema.

Os estudantes devem trabalhar e analisar situações do dia-a-dia relacionadas com empréstimos, juros, compras a crédito, saldos, impostos, etc, comparando diferentes propostas, como as que diariamente surgem no mercado e invadem as nossas casas. Este tipo de trabalho pode ajudá-los a tornarem-se cidadãos mais conscientes e atentos à publicidade.

6 | Sugestões de avaliação

Para além da avaliação contínua que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho, estão previstas três horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos.

Prova 1 – Um teste escrito com a duração de uma hora.

Prova 2 – Um trabalho, individual ou de grupo, que pode constar da elaboração de uma planta. Esta deve ser construída a uma escala escolhida pelos estudantes. Pode focar-se, por exemplo, na sala de aula ou em objectos nela existentes, tais como a mesa, cadeira e armários.

7 | Bibliografia / Outros recursos

DEVLIN, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Esta é uma obra interessante que apresenta a matemática como sendo a ciência dos padrões através de diversos temas matemáticos.

FIOL, M. LUISA, FORTUNY, J. (1990). *Proporcionalidade directa. La forma y el número*. Madrid. Síntesis.

Esta obra apresenta uma série de propostas estruturadas para explorar com os estudantes situações relativas à proporcionalidade directa, por interligação com outras áreas disciplinares.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM.[Tradução portuguesa: Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. Lisboa: APM/IIE, 1991].

Nesta obra é possível encontrar reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino da matemática, sugestões sobre o modo de trabalhar diferentes conteúdos, bem como propostas de trabalho variadas para os estudantes.

ORTON, A. (1999) (ed). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell.

Esta obra é um conjunto de artigos sobre a exploração de conceitos matemáticos recorrendo aos padrões, com exemplos variados e experiências de ensino.

OUTROS RECURSOS

Para o desenvolvimento da capacidade de visualização e deteção de padrões sugere-se o trabalho com instrumentos musicais e material manipulável, tal como pandeiretas, bombos, ferrinhos, castanholas, blocos padrão, geoplano, papel quadriculado, espelhos, mira, tangram e pentaminós, etc.

Para explorar a proporcionalidade directa sugere-se o trabalho com puzzles, mapas, maquetas.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

http://www.ies.co.jp/math/java/geo/lin_line/lin_line.html

Neste sítio pode encontrar-se uma simulação de um gráfico de proporcionalidade directa. Uma torneira debita água numa vasilha e o gráfico mostra a variação do volume de água.

<http://www.fc.up.pt/atractor/>

Página dedicada ao Atractor, Centro Interactivo dedicado à Matemática, encontra informação sobre o projecto, módulos interactivos, etc

<http://archives.math.utk.edu/>

O principal interesse deste sítio é o acesso organizado a uma grande variedade de recursos matemáticos disponíveis na Internet, com particular ênfase nos materiais utilizados no ensino da Matemática, incluindo software.

<http://www.dapp.min-edu.pt/nonio/softeduc/soft3/escher.htm>

Existem muitos programas de geometria na Internet para todos os sistemas operativos. O programa Escher permite (além de outras coisas) ilustrar a simetria. Pode ser ainda usado para uma composição artística na base da repetição e manipulação de polígonos escolhidos pelo utilizador.

<http://www.ccsf.caltech.edu/~roy/vermeer/>

Páginas sobre pintores que trabalharam e usaram a proporção.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

MÓDULO 6

Tratamento da Informação

Duração de Referência: 18 horas

1 | Apresentação

A actividade humana exige cada vez mais fazer previsões e tomar decisões com base em informação organizada através de métodos estatísticos e probabilísticos. Neste sentido, é importante que os estudantes desenvolvam capacidades associadas à recolha, organização e análise de dados, assim como à representação e comunicação de processos e resultados. Sem se pretender ir muito longe na aquisição formal dos conceitos por parte dos estudantes, deve procurar-se que o foco do ensino deste tópico esteja na compreensão das ideias e no sentido crítico.

Todos somos bombardeados diariamente com resultados de estudos, inquéritos e sondagens feitos por outrem. Apesar de os fenómenos aleatórios estarem presentes na sociedade, a escola orientou tradicionalmente o pensamento para explicações deterministas. Ao longo da vida, tomamos decisões baseadas num conjunto informal de dados que cada um de nós possui, isto é, baseadas na percepção que temos de probabilidade de um acontecimento. Uma das vantagens do ensino da probabilidade é que os estudantes têm algum entendimento intuitivo do tema a partir de experiências da vida real, o que constitui um aspecto importante da formação que a escola deve proporcionar.

As actividades que envolvem tratamento de informação são especialmente propícias ao estudo de situações de natureza interdisciplinar, dada a sua relevância tanto nas ciências naturais como nas ciências sociais e humanas. Os estudantes devem aprender conceitos e desenvolver capacidades relevantes no contexto das aplicações e com conexões a outros tópicos, matemáticos ou não.

2 | Competências Visadas

Neste módulo, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões;
- a compreensão das noções de frequência absoluta e relativa e de moda e média aritmética, assim como a aptidão para determiná-las em situações concretas simples;
- a sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção;
- a aptidão para usar processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples;
- o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Ao longo deste módulo devem ser dadas aos estudantes oportunidades de:

- recolher dados segundo propósitos bem definidos;
- recolher e organizar informação para estudar uma situação da vida real;
- apresentar os dados recolhidos em tabelas de frequência, gráficos e pictogramas a partir de dados fornecidos ou recolhidos pelos estudantes de modo a comunicar as suas conclusões;
- ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos, assim como formular questões a partir da informação disponível;
- identificar a moda e calcular a média aritmética;
- interpretar a média aritmética num dado contexto;
- fazer conjecturas a partir da interpretação da informação;
- descrever acontecimentos usando termos tais como certo, possível e impossível, provável e improvável, sempre, nunca, às vezes, ... ;
- prever o resultado de experiências simples e testar essas previsões;
- fazer previsões a partir de um conjunto de dados;
- tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade;
- usar a Internet como uma fonte de dados e como uma ferramenta para representar dados.

4 | Conteúdos

1. Recolha, organização e interpretação de dados
2. Representação da informação: tabelas, pictogramas e gráficos de barras
3. Frequências absolutas e relativas
4. Moda e média aritmética
5. Conceito intuitivo de probabilidade

5 | Orientações metodológicas

A iniciação às técnicas de recolha, organização e representação de dados estatísticos deverá ser feita a partir de actividades ligadas aos interesses dos estudantes, a temas de actualidade e a outras disciplinas. Quando são os próprios estudantes a recolher os dados, a informação recolhida torna-se-lhes familiar. Apenas passando por todo o processo é que os estudantes podem desenvolver competências de raciocínio crítico e questionar, analisar e interpretar dados vindos de fontes externas.

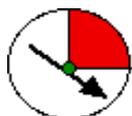
A interpretação da informação estatística deve limitar-se a casos simples, pretendendo-se que os estudantes desenvolvam uma atitude crítica em relação á informação que recebem directamente através dos meios de comunicação, designadamente jornais, revistas, televisão, publicidade, *Internet*, e, em particular, aos apelos ao consumo. Torna-se também importante alertá-los em relação aos dados estatísticos obtidos a partir de amostras não significativas e ao modo como as informações são utilizadas, em particular na publicidade.

O ensino deve ser fortemente experimental, mas apelando às capacidades de raciocínio e comunicação. As experiências, as simulações e as sondagens constituem formas de recolher dados que os estudantes devem utilizar. É desejável partir de questões que interessem os estudantes, provocando um maior envolvimento destes e tornando a aprendizagem mais significativa.

Este tema é uma excelente oportunidade para se realizarem projectos em grupo onde os estudantes desenvolvam o espírito de iniciativa e de análise crítica, dentro e fora da sala de aula. Também é uma oportunidade para os estudantes falarem de ocorrências familiares, como por exemplo, “é possível que amanhã chova”, “a minha casa estará de certeza na mesma rua amanhã”, “é improvável estar na escola no domingo”, etc.

Os estudantes são capazes de atribuir significado a situações que envolvem noções probabilísticas, manifestando intuições que podem ser desenvolvidas com a ajuda do professor através de experiências reais ou simuladas.

Através de experiências com jogos simples, como atirar uma moeda ao ar, tirar uma bola de um saco, lançar um dado ou usar uma roleta, os estudantes tomam contacto com conceitos de probabilidade usando palavras como certo, provável, impossível, etc.



Os estudantes podem, por exemplo, utilizar uma roleta e fazê-la rodar 100 vezes. Os estudantes devem prever quantas vezes sai vermelho.

O computador poderá ser um ótimo recurso para o estudo deste tema.

6 | Sugestões de avaliação

Para além da avaliação contínua que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho, estão previstas três horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos.

Prova 1 – Trabalho de grupo.

Os estudantes podem, em grupo, recolher dados sobre determinado tópico à escolha como, por exemplo, as alturas dos estudantes da sua turma por idades, e apresentar os dados em gráficos diferentes. Calcular valores médios e modais para essa variável. De seguida estimar a altura de um estudante desconhecido do qual sabem a idade e discutir as razões para essa escolha. Por fim, apresentar as suas conclusões oralmente à turma, recorrendo aos gráficos.

Este exemplo permite ao professor avaliar nos estudantes a capacidade para recolher informação e organizá-la em apresentações diferentes; determinar a média e moda; e fazer e justificar conjecturas em contexto.

Prova 2 – Trabalho de grupo.

Experiência simples de probabilidade, como, por exemplo, obter uma aproximação da probabilidade de uma moeda cair dentro de um quadrado numa grelha quadrada.

Esta tarefa pode ser completamente aberta, cabendo aos estudantes desenhar a malha quadrada, ou então o professor fornecerá a malha. Os estudantes prevêem o resultado e decidem o número de tentativas a realizar. Registam os resultados das experiências realizadas em tabelas e gráficos e apresentam as suas conclusões incluindo a justificação para o número de tentativas usadas.

Este exemplo permite ao professor avaliar a capacidade de cada estudante para determinar a probabilidade baseada na observação de frequências relativas; para escolher e utilizar os meios adequados de apresentar os dados (tabelas, gráficos); e para comunicar aspectos significativos dos dados recolhidos.

7 | Bibliografia / Outros recursos

GODIÑO, J., BATANERO, C. E CAÑIZARES, M^a (1991). Azar y probabilidad. *Matemáticas: cultura y aprendizaje*, 27. Madrid: Editorial Synthesis.

Este livro constitui um bom suporte para o professor aprofundar os seus conhecimentos sobre o tema das probabilidades onde são expostas as principais ideias como devem ser tratados os fenómenos de azar e as noções de probabilidades elementares na educação básica, incluindo também os aspectos conceptuais, históricos e psicológicos do tema.

NCTM (2001). Lidar com dados e probabilidades. *Normas - Coleção Adendas*. Lisboa: NCTM.

Documento que apoia as Normas do NCTM no tema de tratamento de dados. Aqui são sugeridas várias actividades para utilizar na sala de aula sobre experiências de aprendizagem informal envolvendo dados e probabilidades para os níveis elementares

PORTELA, J. E FERNANDES, J. (2004). Elementos de Estatística descritiva — a folha de cálculo no estudo da estatística. Em Palhares (Coord.). *Elementos de Matemática*, pp.53-111. Lisboa: Lidel.

Este capítulo constitui um bom suporte para o professor aprofundar os seus conhecimentos sobre o tema da estatística em particular se pretende usar a folha de cálculo.

OUTROS RECURSOS

Jornais, revistas.
Dados, cartas, rapas, roletas, sacos com bolas, moedas.
Folha de cálculo.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://www.nctm.org/>

Esta é a página da Associação de Professores de Matemática dos EUA. Entre várias informações sobre a actividade da associação, pode encontrar uma descrição detalhada das suas publicações, assim como o acesso a documentos curriculares.

<http://archives.math.utk.edu/>

O principal interesse deste sítio é o acesso organizado a uma grande variedade de recursos matemáticos disponíveis na Internet, com particular ênfase nos materiais utilizados no ensino da Matemática, incluindo software.

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página do Projecto ALEA, apesar de conter documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do secundário, contém várias páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, jogos didácticos, fórum de discussão e uma galeria virtual com trabalhos realizados em escolas.

<http://www.mste.uiuc.edu/reese/buffon/bufjava.html>

Nesta página pode-se fazer uma simulação sobre o problema das agulhas de Buffon.

<http://www.dartmouth.edu/~chance/welcome.html>

Módulo6: Tratamento da Informação

Projecto Chance um bom recurso para o estudo da estatística

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

<http://www.ine.pt>

Instituto Nacional de Estatística onde é possível aceder a um sem número de dados estatísticos.

MÓDULO 7

Oficina

Duração de Referência: 36 horas

1 | Apresentação

O estudo da Matemática isolado e compartimentado por assuntos empobrece a compreensão dos estudantes acerca da natureza da Matemática e da sua utilidade e aplicação no mundo em que vivemos.

Neste plano de estudos torna-se particularmente importante que os estudantes possam relacionar os diversos tópicos e aprendam a aplicar a Matemática que estudam.

Este módulo surge na fase final, numa perspectiva de unificação de todos os temas trabalhados, e compõe-se de uma primeira parte em que os estudantes tomarão contacto com algumas ferramentas informáticas que possibilitem ou catalizem o trabalho de conceitos matemáticos, tais como uma folha de cálculo, um programa de geometria dinâmica, um programa de linguagem Logo, *Internet*. Deverão também contactar com alguns materiais e jogos com os mesmos objectivos como, por exemplo, poliminós (dominós, triminós, pentaminós), roletas, tangram, geoplano, blocos padrão, torres de Hanoi, Ouri, etc.

A segunda fase consta da concepção e realização de um projecto, individual ou em grupo, em que os estudantes deverão recolher dados ou outra informação, experimentar, investigar, construir, de acordo com a sua curiosidade, interesses e gostos, por sua iniciativa ou por sugestão do professor, mas sempre numa filosofia de trabalho autónomo.

2 | Competências Visadas

Neste módulo, os estudantes desenvolvem as competências matemáticas de concepção e realização de um projecto (eventualmente mais do que um) que se quer rico e diversificado e que inclua:

- a mobilização de saberes culturais, científicos e tecnológicos para compreender a realidade e para abordar situações e problemas do quotidiano;
- a utilização das tecnologias;
- actividades de investigação;
- jogos;
- a exploração de conexões.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Ao longo deste módulo devem ser dadas aos estudantes oportunidades de:

- utilizar aplicações informáticas que permitam tratamento da informação ou situações de exploração e descoberta;
- recolher e organizar dados para estudar uma situação da vida real;
- explorar e construir materiais diversificados ou jogos;
- fazer pesquisa bibliográfica;
- usar a Internet como uma fonte de pesquisa e informação.

4 | Conteúdos

1. A folha de cálculo: elaboração de tabelas e gráficos, cálculo de somas e médias.
2. Programa de geometria dinâmica e programa de linguagem Logo: traçado e exploração de elementos geométricos simples, simetrias, descoberta de propriedades, construção de figuras geométricas.
3. A *Internet* na educação matemática como fonte de pesquisa e de recolha de informação.
4. Metodologia do trabalho de projecto.

5 | Orientações metodológicas

As aplicações informáticas com que os estudantes vão tomar contacto deverão ser apresentadas numa perspectiva muito prática, de eventuais ferramentas para a realização de projectos, e não deverão tomar muito tempo (não ultrapassar seis aulas) para que reste tempo para a segunda fase e mais importante, em que os estudantes devem ser encorajados a desenvolver projectos, individuais ou em grupo, que podem ser de naturezas bem diversas. Apenas a título de exemplo apresentam-se alguns projectos de diferentes tipos:

- Pesquisar no INE, ou noutra fonte, uma variável estatística, ou fazer um inquérito, e apresentar os dados organizados em tabelas e gráficos usando a folha de cálculo.
- Fazer uma pesquisa bibliográfica e/ou na Internet sobre um jogo ou quebra-cabeças e fazer a sua apresentação e eventualmente a sua construção em material convencional.
- Realizar um vitral com elementos geométricos construídos com base em software dinâmico, linguagem Logo ou recortes.
- Construir materiais para o ensino da geometria (que possa ficar posteriormente ao serviço da escola) como, por exemplo, geoplano de malha quadrada e/ou triangular e explorar um conteúdo matemático com esse material.
- Construir uma maquete a uma escala escolhida pelo estudante representando, por exemplo, um jardim ou um espaço polivalente da escola.

6 | Sugestões de avaliação

A avaliação deverá ser feita com base na realização e apresentação do projecto à turma ou à escola. Sugerem-se os seguintes parâmetros de avaliação transversais que poderão ser complementados com outros de acordo com a natureza do trabalho:

1. Estética
2. Apresentação e correcção linguística
3. Funcionamento em termos técnicos / Qualidade da pesquisa
4. Criatividade

7 | Bibliografia / Outros recursos

BOLT, B. E HOBBS, D. (1991). *101 projectos matematicos*. Barcelona: Labor.

Livro com inúmeras sugestões de projectos de investigação matemática relacionados com o mundo real, nos quais os estudantes podem aplicar os seus conhecimentos matemáticos em matérias tão diversas como a arte, a biologia, os desportos, a música, etc.

FISHER, R. E VINCE, A. (1990). *Investigando las Matematicas*. Madrid: Akal.

Obra em três volumes que apresenta uma enorme variedade de tarefas de investigação para estudantes de níveis elementares, proporcionando uma visão aplicada e desafiadora da matemática.

SEYMOUR, D. E BEARDSLEE, E. (1990). *Critical Thinking Activities in Patterns, Imagery, Logic*. New Jersey: Dale Seymour Publications.

Este livro apresenta tarefas que permitem desenvolver nos estudantes três importantes elementos do pensamento crítico: a capacidade de reconhecimento de padrões, para usar imagens visuais e para raciocinar logicamente.

LOPES, A.V. et al. (1990). *Actividades matemáticas na sala de aula*. Lisboa: Texto Editora.

Neste livro apresenta-se uma grande diversidade de tarefas sobre vários temas da matemática que podem ser trabalhadas com alunos do ensino básico.

PAPPAS, THEONI (1998). *Fascínios da Matemática – a descoberta da matemática que nos rodeia*. Lisboa: Replicação.

Neste livro dá-se conta da relação entre a matemática e o mundo que nos rodeia, com numerosos exemplos culturais, históricos e do quotidiano.

VANCLEAVE, J. (1994). *Matemática para jovens*. Lisboa: Dom Quixote.

Nesta obra apresentam-se muitos problemas práticos do dia-a-dia que poderão constituir a base para projectos ligados à matemática.

APM (1999). *Investigações matemáticas na sala de aula – propostas de trabalho*. Lisboa: APM.

Pasta contendo diversas propostas de trabalho relativas aos temas da geometria, números e regularidades.

OUTROS RECURSOS

Poliminós (dominós, triminós, pentaminós), roletas, tangram, geoplano, blocos padrão, torres de Hanoi, Ouri, software (LOGO, Geometria Dinâmica).

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://mathforum.org/>

Forum de Matemática onde se podem encontrar projectos interessantes.

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

MÓDULO 8

Geometria Intuitiva

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

O professor deverá propor neste módulo problemas ou actividades aos estudantes que permitam consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 2º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas de Geometria como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o 3º Ciclo. Poderá partir de uma determinada situação, de uma determinada experiência de aprendizagem, procurando evidenciar todas as conexões da Geometria com outros temas tomando como meta o desenvolvimento das competências matemáticas transversais, isto é, daquelas que atravessam todos os temas (a exploração de conexões, a comunicação matemática, a prática compreensiva de procedimentos, a exploração de situações que envolvam cálculo, a estimação e a exploração de situações abertas que envolvam simulações de vivências do quotidiano) e devem constituir os grandes objectivos de um currículo de Matemática.

Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o estudante vê as conexões, quando se apercebe que se está a falar da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os estudantes estão a explorar um problema de geometria poderão estar a desenvolver a sua capacidade de visualizar, de fazer conjecturas e de as justificar, mas também poderão estar a trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, a trabalhar com simetria.

Pretende-se que as experiências de aprendizagem a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas.

Algumas experiências de aprendizagem podem estar ligadas ao mundo real, podem ser propostas e planificadas por um grupo de professores do conselho de turma de modo a integrar na sua resolução conhecimentos de várias disciplinas.

Durante este módulo de Geometria Intuitiva, se o professor detectar lacunas de aprendizagem nos estudantes, deverá delinear estratégias de superação dessas dificuldades. Deve fazer com que os estudantes tomem consciência clara das responsabilidades que também lhes cabem no desenvolvimento das suas aprendizagens. Superar dificuldades exige estudo e esforço e os estudantes devem entender bem o seu papel neste processo.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Geometria Intuitiva, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;
- a aptidão para realizar construções de poliedros cujas faces sejam triângulos e quadriláteros;
- capacidade de classificar, a partir das propriedades comuns, e definir poliedros de uma mesma família (prismas, antiprismas, deltaedros, pirâmides e bipirâmides);
- a compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e a identificação de propriedades geométricas;

- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e de poliedros, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;
- a sensibilidade para apreciar a geometria do mundo real e o reconhecimento de ideias geométricas em diversas situações nomeadamente na comunicação.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Geometria Intuitiva, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- construir modelos de poliedros das famílias dos prismas, antiprismas, deltaedros, pirâmides e bipirâmides com recurso a materiais manipuláveis, identificando características invariantes dos poliedros pertencentes a uma mesma família;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- mobilizar resultados matemáticos básicos necessários apropriados para simplificar o trabalho na resolução de problemas e actividades de investigação;
- planificar uma embalagem com um determinado fim em vista (produtos de 1ª necessidade ou outros);
- reflectir acerca dos diferentes tipos de embalagens poliédricas.

4 | Conteúdos

1. Realização de actividades de investigação de geometria no plano e no espaço como forma de diagnóstico e recuperação de conceitos geométricos básicos - trabalhar os polígonos ou os polidiamantes (construções realizadas com quadrados e triângulos equiláteros unidos pelos lados, respectivamente).
2. As famílias de poliedros cujas faces são triângulos ou quadriláteros: deltaedros, prismas, antiprismas, pirâmides e bipirâmides
 - poliedro e poliedro regular
 - dual de um poliedro
 - lei de Euler

5 | Orientações metodológicas

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no estudante uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no estudante capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes realizem pequenas investigações e façam depois relatórios utilizando linguagem matemática rigorosa. Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar. As actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos (no plano e no espaço) e o professor deve insistir para que o estudante exprima correctamente os seus raciocínios, oralmente e por escrito, através de pequenas composições.

Dentre as propriedades e relações geométricas trabalhadas neste módulo surgirão com naturalidade propriedades dos triângulos e dos quadriláteros, perímetros, áreas e volumes, que deverão ter sido abordados anteriormente; contudo, é normal os estudantes apresentarem dificuldades ou desconhecimento nalgum destes assuntos; o professor poderá, caso ache necessário, insistir nisso, podendo ir até à obtenção experimental das fórmulas das áreas do triângulo, do paralelogramo ou das fórmulas dos volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

As experiências de aprendizagem a propor aos estudantes não devem ser numerosas. Devem ser ricas e não se reduzir a propostas fragmentadas. É mais importante uma experiência de aprendizagem bem explorada do que muitas tratadas apressadamente.

Aconselha-se que o professor privilegie, se possível através de pequenas investigações, o estudo de alguns poliedros e da possibilidade dos seus duais.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo duas horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por uma prova

Prova única — apresentação da planificação de uma embalagem na forma de um poliedro, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que construiu durante a aprendizagem deste módulo. Nesta apresentação deve haver a explicitação da relação da forma da embalagem com os fins sociais a que se destinam. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). O fim a que se destina o poliedro pode ser diverso (produtos de 1ª necessidade (leite, cereais, etc.) ou outros (chocolates, amêndoas, perfumes, etc.).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

ALSINA, C.; *et al* (1986). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis

ALSINA, C.; *et al* (1991). *Materiales para construir la geometría*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis

ALSINA, C.; *et al* (1997). *Por qué geometría? – propuestas didácticas para la ESO*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis

APM. (2000). Pasta de actividades - Pavimentações. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

APM. (1994). Pasta de actividades - Pentaminós. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, com recurso aos pentaminós.

GERDES, P. (2003). *Sipatsi - Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchoukwé de Angola - os (lu)sona.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM (1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa:APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

Guzmán, M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometria*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

Este livro apresenta alguns aspectos da geometria elementar com recurso ao DERIVE.

JUNQUEIRA, M; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas* Lisboa: APM.

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usados com o Cabri-Géomètre mas podem ser usados com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência, mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME -- DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática Aplicada, pelo que é de consulta indispensável.

RAWSON, W.; CHAMOSO, J. (2004). *Contando la geometria – diálogos de matemáticos*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Este livro apresenta um diálogo de dois cidadãos que partiram pelas ruas da cidade à procura de aspectos geométricos com o objectivo de observar o contexto envolvente como se fosse um laboratório matemático.

RECIO, A. MARTINEZ et al (1989). *Una metodología activa y ludica para la enseñanza de la geometria*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro apresenta e fundamenta uma metodologia activa e lúdica, de aprendizagem da Geometria elementar por descoberta, baseada no jogo psicomotor.

SOLER, G. (1997). *El mundo de los poliedros*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro fornece uma excelente panorâmica do "mundo dos poliedros" na Geometria. Através da comparação de uns com outros permite aceder ao processo matemático da sua classificação.

VIEIRA, A.; VELOSO, E.; LAGARTO, M. J. (org.)(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

OUTROS RECURSOS

Tecnologias na aprendizagem da matemática:

- software dinâmico

Materiais estruturados e não estruturados

- Palhinhas
- Papel quadriculado
- Papel de malha triangular (triângulos equiláteros)
- Pentaminós
- Políedron
- Polígonos de pestanas
- Quadrados e triângulos equiláteros

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. *O Teorema de Pitágoras*, 2. *Semelhanças*, 3. *O Túnel de Samos*

— http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_acciao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

MÓDULO 9

Das Equações aos Números

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

Os problemas constituem desafios para os estudantes. Ao resolver problemas os estudantes envolvem-se em situações de aprendizagem desenvolvendo o raciocínio e a comunicação. As equações surgem como uma ferramenta útil na procura de soluções para os problemas. Os diferentes tipos de números (inteiros, racionais, positivos, negativos, ...) podem ser apresentados como soluções de problemas.

Os números são usados não só para fazer cálculos ou para representar medidas, mas também para localização, para ordenação e para identificação. A compreensão global do número e das operações deve ser uma aquisição contemplada na educação e formação básicas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Números e Equações, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- a aptidão para usar equações como meio de representar situações problemáticas, assim como para as resolver e realizar procedimentos algébricos simples;
- o reconhecimento dos conjuntos dos números inteiros e racionais, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles;
- a aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados;
- a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números racionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Números e Equações, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- traduzir enunciados de problemas por simbologia matemática;
- interpretar situações reais usando números racionais;
- utilizar a estimativa na resolução de problemas e na avaliação da plausibilidade dos resultados;
- comparar e operar com números racionais relativos apresentados sob diferentes formas;
- utilizar as propriedades das operações na simplificação de cálculos;

- seleccionar a forma numérica mais adequada (dízima, fracção ou valor aproximado) na resolução de problemas segundo os contextos;
- seleccionar o método de cálculo e/ou recurso apropriado a cada situação;
- analisar e criticar a solução de uma equação no contexto de um problema.

4 | Conteúdos

1. Resolução de problemas que recorram a equações do 1º grau e sua resolução usando a reciprocidade das operações e as operações simples com polinómios.
2. Extensão do conceito de número aos racionais relativos.
3. Operações com números racionais relativos nas suas diferentes formas.
4. Resolução de problemas que envolvam sistemas simples de equações a duas incógnitas

5 | Orientações metodológicas

Os diferentes tipos de números apresentam-se aos estudantes como soluções de diversos problemas. Os números racionais são soluções de problemas que se traduzem por equações de coeficientes inteiros. Através da reciprocidade das operações procuram-se as soluções das equações simples, aparecendo os diferentes tipos de números: fraccionários, inteiros negativos, ...

Ao abordar os números e as equações abrem-se perspectivas de curiosidades e abordagens históricas. A evolução dos símbolos usados para escrever e resolver equações em diversas épocas mostra aspectos de diferentes fases do conhecimento científico e evidencia o papel que o uso de símbolos desempenhou no avanço da matemática.

O uso de materiais manipuláveis e de modelos de representação deve ser um meio a ter em conta na aquisição do conceito de número e na compreensão das operações e das relações entre elas. As conexões com a geometria, decompondo polígonos (caso do tangran) ou dividindo-os em partes iguais constituem uma ferramenta a ter em conta.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo três horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas com igual peso que a seguir se enumeram:

Prova I — um teste escrito com a duração de uma hora.

Prova II - apresentação oral de um problema e sua resolução, escolhido pelo estudante e preparado com antecedência necessária, de entre os problemas propostos durante a aprendizagem do módulo.

6 | Bibliografia / Outros Recursos

PÉREZ, JULIA C. (1988). *Números Decimales - Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis.

Módulo9: Das equações aos números

ALFONSO, BERNARDO G. (2000). *Numeración y cálculo - Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis.

CISCAR, SALVADOR L.; GARCIA,VICTORIA, GARCIA S. (2000). *Fracciones - Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial

ROBAYNA, MANUEL M. S.; MACHIN, MATIAS C.; MEDINA, MERCEDES; DOMÍNGUEZ, JOSEFA (2000). *Iniciación al álgebra - Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (2002). *Making Sense of Fractions, Ratios and Proportions*.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1997). *Standards: Curriculum and Evaluation for School Mathematics – Understanding Rational Numbers and Proportions*.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1997). *Standards: Curriculum and Evaluation for School Mathematics – Developing Number Sense*.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1997). *Standards: Curriculum and Evaluation for School Mathematics – Number Sense and Operations*.

NIVEN, I. (1984). *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Esta é uma obra para professores que permite esclarecer algumas questões relativas aos universos numéricos.

CONWAY, J. E GUY, R. (1999). *O Livro dos Números*. Lisboa: Gradiva/Universidade de Aveiro.

Esta obra apresenta factos, figuras e histórias à volta dos números e das regularidades numéricas.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://www.ticensino.com/fichas/fichas3.htm>

Página com uma folha de cálculo que permite testar a adição de números inteiros relativos.

“QUE QUANTIDADE DE ÁGUA DESPERDIÇAMOS?”

http://www.apm.pt/recursos/ciclo2/q_agua/index.html

Tarefa que pretende levar os alunos a fazer e verificar estimativas e conjecturas que envolvam números elevados, a sensibilizar-se pela problemática da economia dos recursos naturais e a compreender a importância de pequenos esforços para a conservação de recursos essenciais.

REDEMATIC: Números racionais

<http://www.malhatlantica.pt/mat/racionais7.htm>

Um interessante conjunto de actividades que inclui algumas que recorrem ao uso de uma folha de cálculo e a software de Geometria Dinâmica.

MÓDULO 10

Do Plano ao Espaço

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

Na formação geral dos cidadãos e, em especial, para os que se dedicam a algumas profissões é fundamental desenvolver o raciocínio geométrico e a capacidade de visualização também no que respeita às transformações geométricas e às suas propriedades.

Os estudantes deste módulo já tiveram contacto com um ensino da Geometria que lhes desenvolveu a intuição geométrica e o raciocínio espacial, para além de os ter ajudado a explorar, conjecturar, raciocinar logicamente.

É preciso que os estudantes abordem as noções de ampliação, redução e isometria num contexto de resolução de problemas recorrendo a programas de geometria dinâmica, computadores, modelos e materiais manipuláveis.

Devem ser abordadas as posições relativas de pontos e rectas no plano e de pontos rectas e planos no espaço.

A leccionação deste módulo deve levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Geometria, “Do Plano ao Espaço”, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação, para fazer conjectura e justificar os seus raciocínios;
- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para identificar e utilizar as transformações geométricas;
- a tendência para procurar propriedades comuns em figuras geométricas e para utilizar modelos geométricos na resolução de problemas reais;
- a aptidão para resolver problemas através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, semelhança de figuras, assim como para justificar os processos utilizados;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio geométrico, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e de sólidos, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Geometria, “Do Plano ao Espaço”, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- identificar as vantagens e reconhecer a importância do uso transformações geométricas na resolução de problemas que envolvam comprimentos, áreas ou volumes;
- mobilizar resultados matemáticos básicos necessários apropriados para simplificar o trabalho na resolução de problemas e actividades de investigação;
- identificar características invariantes nas figuras obtidas por uma transformação geométrica;
- aplicar critérios de paralelismo e perpendicularidade entre os diferentes entes geométricos;
- identificar a posição relativa entre diferentes entes geométricos;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;

4 | Conteúdos

1. Transformações geométricas: ampliações, reduções, isometrias.
2. Semelhança de figuras, relações entre comprimentos, áreas e volumes;
3. Rectas e planos: paralelismo e perpendicularidade.

5 | Orientações metodológicas

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no estudante intuição geométrica e raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no estudante capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. É aconselhável que os estudantes utilizem linguagem matemática rigorosa para explicarem as estratégias de resolução de problemas, para descreverem os seus raciocínios e registarem as conclusões.

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. É aconselhável que os estudantes manipulem, observem, comparem, descubram, construam, passando do espaço ao plano e do plano ao espaço durante a aprendizagem.

A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo três horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas com igual peso que a seguir se enumeram:

Prova I — a resolução de um problema referente a uma situação do dia a dia em que estejam envolvidas transformações geométricas e as suas propriedades, com a duração de 60 minutos;

Prova II — defesa oral da resolução do problema da prova I. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação

se necessário). As duas horas previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

7 | Bibliografia / Outros Recursos

ALSINA, C.; et al (1986). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis

ALSINA, C.; et al (1991). *Materiales para construir la geometría*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis

ALSINA, C.; et al (1997). *Por qué geometría? – propuestas didácticas para la ESO*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis

GERDES, P. (2003). *Sipatsi - Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchoukwe de Angola - os (lu)sona.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM (1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa:APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

Guzmán, M. (2002). *La experiencia de descubrir en geometria*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S. L.

Este livro apresenta alguns aspectos da geometria elementar com recurso ao DERIVE.

JUNQUEIRA, M; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas* Lisboa: APM.

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usados com o Cabri-Géomètre mas podem ser usados com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência, mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME -- DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o programa de Matemática Aplicada, pelo que é de consulta indispensável.

Módulo10: *Do plano ao espaço*

RAWSON, W.; CHAMOSO, J. (2004). *Contando la geometria – diálogos de matemáticos*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Este livro apresenta um diálogo de dois cidadãos que partiram pelas ruas da cidade à procura de aspectos geométricos com o objectivo de observar o contexto envolvente como se fosse um laboratório matemático.

RECIO, A. MARTINEZ *et al* (1989). *Una metodología activa y ludica para la enseñanza de la geometria*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro apresenta e fundamenta uma metodologia activa e lúdica, de aprendizagem da Geometria elementar por descoberta, baseada no jogo psicomotor.

ROMERO, M. *et al* (1993). *Superficie y volumen – algo más que el trabajo con fórmulas?* Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

SOLER, G. (1997). *El mundo de los poliedros*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro fornece uma excelente panorâmica do “mundo dos poliedros” na Geometria. Através da comparação de uns com outros permite aceder ao processo matemático da sua classificação.

VIEIRA, A.; VELOSO, E.; LAGARTO, M. J. (org.).(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

OUTROS RECURSOS

Tecnologias na aprendizagem da matemática:

- software dinâmico

Materiais estruturados e não estruturados

- Modelos de sólidos geométricos e de polígonos, conjuntos de cubos, espelhos, Mira,...
- Instrumentos de medição e desenho (régua graduada, esquadro, transferidor e compasso)
- Geoplano
- Papel quadriculado
- Polígonos de pestanas

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

— http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

Descobrir as transformações geométricas

<http://www.apm.pt/apm/enumat/menu8.html>

Página que permite explorar de forma simples as transformações geométricas e as suas propriedades.

MÓDULO 11

Estatística e Probabilidades

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

O objectivo deste módulo é proporcionar aos estudantes momentos de compreensão e uso da estatística descritiva e iniciá-los numa primeira reflexão sobre o conceito de probabilidade.

A estatística descritiva já iniciada anteriormente, permite agora envolver os estudantes em actividades matemáticas de natureza investigativa: formular questões, recolher dados, organizá-los, interpretá-los e tirar conclusões relativamente ao problema de partida.

Na vertente da probabilidade é importante proporcionar experiências que permitam desenvolver intuições percursoras da aquisição dos conceitos desta área.

2 | Competências Visadas

Neste módulo, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a predisposição para organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para representá-los de modos adequados, nomeadamente, recorrendo a tabelas e gráficos;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a compreensão das noções de moda, média aritmética e mediana, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas;
- a sensibilidade para decidir qual das medidas de tendência central é mais adequada para caracterizar uma dada situação;
- o sentido crítico face à apresentação tendenciosa de informação sob a forma de gráficos enganadores ou a afirmações baseadas em amostras não representativas;
- a sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção;
- a compreensão da noção de probabilidade e a aptidão para calcular a probabilidade de um acontecimento em casos simples;
- a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são:

- analisar e interpretar dados apresentados em tabelas de frequência ou gráficos;
- calcular medidas de tendência central para caracterizar uma distribuição;
- analisar e comparar distribuições, recorrendo a medidas de tendência central;

- analisar criticamente a validade de argumentações elaboradas a partir de indicadores estatísticos;
- distinguir situações aleatórias de situações deterministas;
- identificar resultados possíveis numa situação aleatória;
- identificar, para uma situação dada, casos possíveis e casos favoráveis;
- calcular, em casos simples, a probabilidade de um acontecimento como quociente entre número de casos favoráveis e número de casos possíveis;
- analisar e interpretar uma probabilidade dada ou calculada;
- utilizar e interpretar escalas de 0 a 1 ou de 0% a 100%;
- conhecer e usar adequadamente expressões como “impossível”, “improvável”, “pouco provável”, “muito provável”, “certo”;
- conhecer a frequência relativa como aproximação da probabilidade;
- analisar criticamente a validade de argumentações elaboradas a partir de indicadores de probabilidades.

4 | Conteúdos

1. Medidas de tendência central: média, moda e mediana.
2. Distribuições de frequências. Comparação de distribuições.
3. Espaço de resultados de experiências aleatórias.
4. Classificação de acontecimentos.
5. Probabilidade de um acontecimento como quociente entre casos possíveis e casos favoráveis.
6. Definição frequentista de probabilidade.
7. Escalas de probabilidade.

5 | Orientações metodológicas

Os órgãos de informação – jornais, revistas, televisão – lançam informação onde a estatística e as probabilidades estão presentes. Ao longo de todo o módulo devem-se procurar exemplos de notícias e de artigos para serem analisados, interpretados e criticados. A capacidade dos cidadãos para interpretar uma grande quantidade de dados quantitativos assume uma grande importância. Ser competente em estatística é fundamental para entender os julgamentos que os meios de comunicação social veiculam com base na estatística e nas probabilidades.

Neste módulo é importante que os estudantes recolham, organizem e analisem dados. Uma característica que queiram analisar pode ser um ponto de partida se permitir levantar questões, levar a decidir sobre o tipo de informação a recolher, como organizá-la e interpretá-la. A apresentação dos resultados constitui uma oportunidade de pôr à prova a comunicação matemática.

Os jogos de azar são familiares aos estudantes. O lançamento da moeda ao ar, a extracção de bolas de um saco, o lançamento de um dado n , entre outros, podem ser usados como ponto de partida para o desenvolvimento da noção de probabilidade. As simulações, a realização de experiências concretas, a resolução de problemas em contexto apropriado são os contextos em que podem decorrer as aprendizagens deste módulo.

As actividades a propósito do conceito de probabilidade permitem propor conexões matemáticas relativas às noções de fracções, percentagens, proporções e números decimais.

6 | Sugestões de avaliação

Para além da avaliação contínua que ajudará o estudante a manter-se informado do seu progresso e das necessidades de ajustamento, e ajudará o professor a adequar as suas propostas de trabalho,

estão previstas três horas para avaliação sumativa final. Este tempo deve ser repartido por dois momentos.

Prova 1 – Apresentação final dos resultados de um trabalho que deverão ter realizado durante a leccionação do módulo. Organizados em grupos de trabalho, os estudantes organizam-se no sentido de analisar uma ou mais características de uma certa população: as alturas dos estudantes da escola, de um determinado ano de escolaridade ou apenas da turma à qual pertencem. Recolhem os dados e tratam-nos com vista à caracterização do estudo que elaboraram e sabendo que têm uma apresentação final a realizar.

Prova 2 – Tratamento crítico de uma notícia de um jornal, ou de outro meio de divulgação, onde figurem dados estatísticos ou probabilísticos.

7 | Bibliografia / Outros recursos

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1997). *Standards: Data Analyses and Statistics*.

LOUREIRO, C.; OLIVEIRA, F.; BRUNHEIRA, L. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Estatística*. IIE.

GODINO, JUAN D.; BERNABÉU, CARMEN B.; CASTELLANO, M. JESÚS C. (1987). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Editorial Síntesis.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

<http://www.dartmouth.edu/~chance/welcome.html>

Projecto Chance um bom recurso para o estudo da estatística Matemática, incluindo software.

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página do Projecto ALEA, apesar de conter documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do secundário, contém várias páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, jogos didáticos, fórum de discussão e uma galeria virtual com trabalhos realizados em escolas.

<http://www.dartmouth.edu/~chance/welcome.html>

Projecto Chance um bom recurso para o estudo da estatística

FEBRUARY PROBLEMS - <http://sln.fi.edu/school/math2/feb.html>

Sítio com propostas de problemas abertos divididos por categorias: números; medida; geometria; padrões, álgebra e funções; estatística e probabilidades.

E-LAB - <http://www.harcourtschool.com/elab/>

Laboratório virtual que tem várias apliquetas para diferentes níveis e permite trabalhar conteúdos matemáticos de forma interactiva, desde simulação de lançamento de moedas, dados ou roletas, até descobrir eixos de simetria em figuras ou resolver equações.

<http://www.ine.pt>

Instituto Nacional de Estatística onde é possível aceder a um sem número de dados estatísticos.

MÓDULO 12

Funções e Gráficos

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

A sociedade da informação vive da comunicação escrita e oral a partir do contacto físico próximo ou à distância. As representações gráficas, tabelas, esquemas e pictogramas são usados de forma regular para, de forma sintética, proporcionarem uma grande quantidade de informação e as relações entre as variáveis implicadas.

Quando se pretende descrever a evolução (normalmente ao longo do tempo) de uma determinada grandeza, é comum apresentar um gráfico de uma função cujo modelo melhor descreva o gráfico. Tal modelo ajuda a perceber o que aconteceu nesse período e a prever o que será necessário fazer.

É por isso importante que todos os profissionais (se calhar todos os cidadãos) consigam ler e interpretar informação contida em gráficos e retirar daí conclusões. Assim, os estudantes a quem se destina este módulo não precisarão de ser grandes especialistas do estudo das funções, nem realizar estudos muito completos sobre funções, precisando apenas de saber lidar com tabelas e gráficos associados a modelos dados ou que se possam obter por meio de ensaios simples. Neste módulo apenas serão objecto de estudo os modelos de funções de proporcionalidade directa e de proporcionalidade inversa.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções e Gráficos, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- o reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas;
- a compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;
- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas do tipo $y = kx$ e $y = \frac{k}{x}$;
- a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade directa e inversa.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções e Gráficos os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- interpretar informação contida em gráficos usados em jornais, revistas e outro tipo de edições;

- determinar quais os modelos de funções (proporcionalidade directa ou proporcionalidade inversa) que melhor se adequam a tabelas de valores dadas;
- desenvolver o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada quer seja através de gráfico, tabela, ou modelo funcional;
- usar modelos de funções para explicar e prever propriedades das situações a que se tentam aplicar os modelos;
- desenvolver a capacidade de comunicação matemática quer escrita quer oral a partir de pequenas composições matemáticas (obtidas a partir da resolução de um problema, da interpretação de uma dada situação representada por um gráfico ou tabela de valores).

4 | Conteúdos

1. Leitura e interpretação de representações gráficas em diferentes contextos e situações problemáticas;
2. Estudo intuitivo, em contexto, da monotonia, zeros, máximos, mínimos, sinal, a partir de representações gráficas de determinadas situações problemáticas;
3. Diferentes formas de representação de correspondências: tabelas de valores, representações gráficas e expressões analíticas;
4. Resolver problemas usando modelos de funções (proporcionalidade directa e inversa): diferentes formas de representação, constante e expressão analítica.

5 | Orientações metodológicas

A ênfase do trabalho neste módulo está na interpretação gráfica das representações gráficas que aparecem em publicações escritas. As representações gráficas devem estar devidamente contextualizadas e corresponderem a situações problemáticas que podem ser recolhidas de jornais, revistas e outras publicações. A leitura, interpretação e comunicação das ideias matemáticas fundamentais devem proporcionar o desenvolvimento de espírito crítico e de competências de cidadania dos estudantes. Os modelos de funções de proporcionalidade directa e inversa devem aparecer em situações devidamente contextualizadas para que sejam significativas para os estudantes. As expressões analíticas dos modelos de funções a estudar devem aparecer como uma forma sintética e suficientemente poderosa de exemplificar realidades muito diversas e completamente diferentes. Nas experiências de aprendizagem seleccionadas devem ser trabalhadas as diferentes formas de representação.

As experiências de aprendizagem a propor devem ser cuidadosamente escolhidas de forma a serem significativas e diversificadas, permitindo o desenvolvimento dos aspectos transversais da aprendizagem matemática: comunicação matemática, prática compreensiva de procedimentos e a exploração de conexões com outros temas da matemática, e de outras áreas a serem trabalhadas nas áreas de formação dos estudantes.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo três horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por uma prova única:

Prova I — Elaboração de um relatório escrito acerca da interpretação de uma notícia de um dado grupo de notícias (de jornais, revistas, previamente coligido pelo docente) em que os conceitos e procedimentos matemáticos sejam usados como ferramenta de interpretação e intervenção social num dado contexto problemático.

7 | Bibliografia / Outros Recursos

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

— <http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html> —

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

GORDON, S. P.; GORDON, F. S. et al. (2004). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, Second Edition*. Rio de Janeiro: LTC (1997)

GORDON, S. P. (1997). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, The Math Modeling/Precalculus Reform Project*. On-Line Proceedings of AMATYC 1997, Atlanta, Geórgia.

<http://www.amatyc.org/Proceedings/Atlanta23/Gordon/HTML/Gordon.html>

O projecto "Math Modeling/PreCalculus Reform" foi desenvolvido para ser uma alternativa ao ensino tradicional, valorizando aspectos inovadores como a análise de dados, o ajustamento de funções a dados da vida real e a modelação com um uso adequado da tecnologia; o projecto pretende que os estudantes olhem a matemática segundo a perspectiva simbólica, geométrica e numérica, tendo muita preocupação com a compreensão dos conceitos.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs*. Addison-Wesley.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

Modelação em Recursos Naturais (ISA-UTL)

<http://www.isa.utl.pt/def/gimref/disciplinas/modelacao.htm>

Modelação Matemática

<http://pagina.de/modelacao>

APM-Matemática e Natureza

<http://www.apm.pt/natureza/>

DreamCalc Pro 2 - Scientific Calculator (em inglês, com tradução em português)

<http://www.dreamcalc.net/>

Demana-Waits Mathematics Education

<http://emptweb.mps.ohio-state.edu/dwme/>

Mathematical Models with Applications (em inglês)

<http://www.tenet.edu/teks/mmacd/mma.htm>

Function Models of Light Decay (em inglês)

http://illuminations.nctm.org/index_o.aspx?id=137

Rational Function Models (em inglês)

<http://www.statlets.com/nist/pmd/section6/pmd642.htm>

Módulo12: Funções e gráficos

RIT Department of Mathematics & Statistics Calculator Resource Site (em inglês)

<http://www.rit.edu/~jmwsma/calculators/>

A practical guide to curve fitting (em inglês)

<http://www.curvefit.com/>

Graphing Calculator Guides (em inglês)

<http://college.hmco.com/mathematics/latorre/guides.htm>

Graphing Calculator Instructional Handouts (em inglês)

<http://fym.la.asu.edu/~fym/GraphCal/Graphing.html>

Activités mathématiques en BEP et BACPRO (em francês)

http://www.ac-reims.fr/datice/math-sciences/doc_peda/doc_math.htm

Etude de fonctions usuelles - BABAULT Yves - LP d'Alembert – ISSOUDUN (em francês)

http://www.ac-grenoble.fr/math-sciences/peda_bac_m_a/doc/etudes_courbes.zip

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Companion Site*.

<http://www.aw-bc.com/demana/>

REDEMATIC: Proporcionalidade directa — <http://www.malhatlantica.pt/mat/prop.htm>

Um interessante conjunto de actividades que inclui um que recorre ao uso de uma folha de cálculo.

MÓDULO 13

Triângulo Rectângulo

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

Na educação e formação básicas, muitos dos assuntos referidos estão ligados a triângulos rectângulos. Pelas suas propriedades, esta figura geométrica é ponto de partida e chegada para assuntos tão decisivos como uma primeira abordagem aos números irracionais, apresentação e resolução de problemas que mobilizam expressões do segundo grau com variáveis. Com o triângulo rectângulo é também introduzida a trigonometria elementar.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Triângulos Rectângulos, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;
- a compreensão do conceito de forma de uma figura geométrica e a identificação de propriedades geométricas;
- a aptidão para conjecturar novos resultados e formular argumentos válidos com recurso à visualização dinâmica e a raciocínios demonstrativos, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas que podem ser expressas na forma algébrica, recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, bem como para as representar através de diversos processos, incluindo relações entre variáveis;
- a aptidão para concretizar relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- a aptidão para interpretar e dar sentido às razões invariantes para cada ângulo, utilizando triângulos rectângulos e semelhanças;
- a sensibilidade para apreciar a geometria do mundo real e o reconhecimento de ideias geométricas em diversas situações nomeadamente na comunicação.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Triângulos Rectângulos, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- planear e realizar actividades experimentais, utilizando as técnicas e os processos apropriados e mobilizando os conteúdos teóricos necessários à formulação de hipóteses explicativas e ao desenvolvimento de procedimentos de verificação:
- construir figuras diferentes com a mesma área;
- construir figuras que tenham a mesma área que figuras dadas;
- compor e decompor figuras planas;
- calcular medidas de áreas de figuras tomando outra para unidade de área;
- utilizar as experiências com áreas para conjecturar as relações entre os lados de um triângulo rectângulo, procedendo a verificações;

- dominar processos e técnicas de cálculo, incluindo resolução de equações simples, utilizando-os na resolução de problemas realistas;
- compreender o conceito de número não racional, a partir de equações do segundo grau que surjam como resposta a problemas geométricos;
- identificar as razões invariantes para cada ângulo e utilizá-las para resolver problemas de trigonometria (distâncias inacessíveis, por exemplo);
- compreender o conceito de forma de uma figura geométrica e identificar propriedades geométricas relacionadas com a forma;
- conjecturar novos resultados e formular argumentos válidos com recurso à visualização dinâmica e a raciocínios demonstrativos, explicitando-os em linguagem corrente;

4 | Conteúdos

1. Comparação de áreas de figuras planas. Figuras equivalentes. Teorema de Pitágoras. Notas e problemas históricos.
2. Resolução de problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras e expressões do 2º grau.
3. Semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Resolução de problemas simples e típicos de trigonometria - conhecidos elementos de um triângulo, calcular outros - e com recurso às propriedades dos triângulos rectângulos.

5 | Orientações metodológicas

O professor deve propor actividades que passem pelo trabalho de campo e de papel, que utilizem conceitos de factor de escala (semelhanças), estimação de medidas de áreas de figuras em comparação com outras (usando materiais manipuláveis ou levantamento em contexto real). As actividades devem ser tão significativas que os estudantes compreendam como diversos resultados matemáticos a que podem aceder se podem mobilizar conjuntamente, para dar resposta a diversas perguntas que a situação problemática pode sugerir como problemas que é preciso resolver.

6 | Sugestões de avaliação

A avaliação pode consistir numa prova única. Ao estudante pode ser proposta uma actividade para ser resolvida durante três horas sobre a qual o realiza um relatório.

7 | Bibliografia / Outros recursos

APM. (2000). Pasta de actividades - Pavimentações. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

APM. (1994). Pasta de actividades - Pentaminós. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, com recurso aos pentaminós.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM (1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares.

Módulo13: Triângulo rectângulo

Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

JUNQUEIRA, M; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas* Lisboa: APM.

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usados com o Cabri-Géomètre mas podem ser usados com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência, mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

RAWSON, W.; CHAMOSO, J. (2004). *Contando la geometria – diálogos de matemáticos*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Este livro apresenta um diálogo de dois cidadãos que partiram pelas ruas da cidade à procura de aspectos geométricos com o objectivo de observar o contexto envolvente como se fosse um laboratório matemático.

RECIO, A. MARTINEZ et al (1989). *Una metodología activa y ludica para la enseñanza de la geometria*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro apresenta e fundamenta uma metodologia activa e lúdica, de aprendizagem da Geometria elementar por descoberta, baseada no jogo psicomotor.

VIEIRA, A.; VELOSO, E.; LAGARTO, M. J. (org.)(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

— http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

Razões trigonométricas

http://www.apm.pt/nucleos/porto/paginas/UGSPCMD/htm/raul_e_lino/rtrig.htm

Uso de software de Geometria Dinâmica para o estudo das razões trigonométricas

MÓDULO 14

Geometria do Círculo

Duração de Referência: **18 horas**

1 | Apresentação

O círculo aparece como uma forma geométrica vulgar no património construído, em peças de máquinas com utilidade para funções determinadas que apelam a certas simetrias e à rotação ou transformações geométricas em geral, e é tópico frequente das várias áreas de saber – artes e ofícios, design, desenho técnico, física e matemática, etc. Construções geométricas podem ser modelos adequados para certos problemas, bem como podem elas mesmas constituir problemas e servir para conjecturar este ou aquele resultado ou ser subsidiárias das relações estabelecidas.

Ligados ao círculo estão sempre os polígonos inscritíveis ou circunscritíveis e os seus elementos constituintes, ângulos ao centro e inscritos, arcos e cordas, mas também o número irracional transcendente π . Novos problemas de relações entre amplitudes e comprimentos, áreas ou volumes procuram resolução no quadro deste tópico de geometria. Da circunferência se podem levantar cones ou se pode introduzir o estudo dos cilindro e esfera.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Geometria, “Geometria do Círculo”, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a aptidão para visualizar e descrever propriedades e relações geométricas, através da análise e comparação, para fazer conjecturas e justificar os seus raciocínios;
- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real, reconhecer e utilizar ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para apreciar o papel da circunferência nos seus diversos usos com identificação das propriedades respectivas;
- a aptidão para resolver problemas através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, relações entre ângulos, arcos e cordas;
- a aptidão para resolver problemas envolvendo amplitudes de ângulos, comprimentos de arcos e cordas, áreas de sectores e coroas circulares ou volumes de cones e cilindros;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio geométrico, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas e de sólidos de revolução, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Geometria, “Geometria do Círculo”, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- identificar as vantagens e reconhecer a importância do uso de figuras envolvendo o círculo na resolução de problemas que envolvam comprimentos, áreas ou volumes de certas figuras planas e certos sólidos;

Módulo14: Geometria do círculo

- mobilizar resultados matemáticos básicos necessários apropriados para simplificar o trabalho na resolução de problemas e actividades de investigação;
- conjecturar e reconhecer relações entre elementos no círculo, em círculos iguais ou diferentes, bem como entre respectivos comprimentos de arcos e de cordas, amplitudes de ângulos (e arcos);
- realizar construções como solução de problemas de geometria ou em contextos da vida quotidiana ou de outras disciplinas de saber e interpretação da realidade;
- construir modelos ou maquetas para problemas que dependam de círculos e polígonos (inscríveis), realizando todos os cálculos necessários para dar resposta a uma encomenda de um objecto escultórico, embalagem ou de outro tipo;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

4 | Conteúdos

1. O círculo: perímetro e área. Ângulos ao centro e rotações. Amplitudes e comprimentos.
2. Referência a sólidos de revolução
3. Ângulos inscritos. Polígonos inscritíveis.

5 | Orientações metodológicas

Há actividades de observação sobre os materiais do quotidiano, em particular sobre o património construído e as máquinas de uso corrente, que ilustram a omnipresença do círculo e iluminam as propriedades mais importantes do círculo e dos elementos geométricos que com ele interagem mais frequentemente. Devem ser organizadas actividades com essa intenção.

Os problemas em estudo devem apelar a construções geométricas, à utilização de propriedades e relações geométricas. E é necessário apresentar problemas que exijam a construção de modelos ou maquetas que envolvam círculos e polígonos (inscríveis), realizando todos os cálculos necessários para dar resposta a uma encomenda de um objecto escultórico, embalagem ou de outro tipo.

Nas tarefas trabalhadas neste módulo surgirão com naturalidade o cálculo da área do círculo e do volume do cilindro, que deverão ter sido abordados anteriormente; contudo, é normal os estudantes apresentarem dificuldades ou desconhecimento nalgum destes assuntos; o professor poderá, caso ache necessário, insistir nisso, podendo ir até à obtenção experimental das fórmulas da área do círculo ou do volume do cilindro.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo três horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas com igual peso que a seguir se enumeram:

Prova I — a resolução de um problema referente a uma situação do dia a dia em que estejam envolvidas construções geométricas e as suas propriedades, ou relações entre amplitudes, comprimentos e áreas de elementos reacionados ou limitados pelo círculo. Duração: 1 hora.

Prova II — defesa oral da resolução do problema da prova I. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As duas horas previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

7 | Bibliografia / Outros recursos

MANUAIS ESCOLARES DE MATEMÁTICA DO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO

MANUAIS E TUTORIAIS DO SOFTWARE DE GEOMETRIA DINÂMICA

DIAZ, FRANCISCO P. *et al.* *Circunferência y círculo*. Col. Matemáticas : Cultura y aprendizaje. Editorial Sintesis. Madrid : 1998.

Esta publicação como outras da Editorial Sintesis contém os conteúdos matemáticos ligados à geometria do círculo e sugere actividades que podem ser transferidas para a sala de aula.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM(1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa:APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

JUNQUEIRA, M; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas* Lisboa: APM

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usados com o Cabri-Géomètre mas podem ser usados com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência, mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

RAWSON, W.; CHAMOSO, J. (2004). *Contando la geometria – diálogos de matemáticos*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Este livro apresenta um diálogo de dois cidadãos que partiram pelas ruas da cidade à procura de aspectos geométricos com o objectivo de observar o contexto envolvente como se fosse um laboratório matemático.

RECIO, A. MARTINEZ et all (1989). *Una metodologia activa y ludica para la enseñanza de la geometria*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro apresenta e fundamenta uma metodologia activa e lúdica, de aprendizagem da Geometria elementar por descoberta, baseada no jogo psicomotor.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

Redematic: Geometria — <http://www.malhatlantica.pt/mat/geometria.htm>

Um interessante conjunto de actividades que inclui "Circunferência e ângulos na circunferência", "Ângulos internos e externos de um polígono" e "Ângulos de um quadrilátero inscrito numa circunferência" com vários materiais e com software de Geometria Dinâmica.

Ângulo Externo — http://karlogomes.planetaclix.pt/car/ang_externo.html

Uma apliqueta que tenta exemplificar a variação da amplitude de um ângulo exterior a uma circunferência.

MÓDULO 15

Aproximações e Inequações

Duração de Referência: 18 horas

1 | Apresentação

Neste módulo o estudante deve recordar os números racionais e chegar ao conceito de número irracional dando significado à recta real.

Tal como é impossível definir “número grande” ou “número pequeno” acontece o mesmo com “valor aproximado”. Mas, sendo os valores aproximados cada vez mais utilizados quando se recorre à tecnologia, deve incentivar-se o estudante a dar significado, na forma mais simples, a “erro de um valor aproximado” sempre que este resolve problemas e apresenta soluções em que o uso de valores aproximados é aconselhável.

O trabalho do estudante deve centrar-se na resolução de problemas dando significado a enquadramentos e à resolução de inequações.

2 | Competências Visadas

Neste módulo Aproximações e Inequações, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis à manipulação dos números e das operações;
- reconhecimento e utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como as propriedades das operações nesses conjuntos;
- a sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- a aptidão para dar significado a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados;
- o reconhecimento dos números inteiros, racionais e reais, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como a compreensão das propriedades das operações em cada um deles e a aptidão para usá-los em situações concretas;
- a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números fraccionários ou irracionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- a aptidão para usar inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver inequações, assim como para efectuar procedimentos algébricos simples.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo Aproximações e Inequações, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- utilizar diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como as propriedades das operações nesses conjuntos;
- estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- trabalhar com valores aproximados de números fraccionários ou irracionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;
- analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- usar inequações como meio de representar situações problemáticas;
- resolver inequações e efectuar procedimentos algébricos simples.

4 | Conteúdos

1. Números reais: relação de ordem, valores aproximados.
2. Resolução de problemas envolvendo inequações.

5 | Orientações metodológicas

Os estudantes poderão efectuar algumas actividades de investigação envolvendo números fraccionários ou irracionais. Poderão procurar regularidades, se existirem, fazer e testar conjecturas, argumentar e comunicar, oralmente ou por escrito, as conclusões.

A resolução de problemas constitui um contexto privilegiado para a aprendizagem da resolução de inequações e para trabalho com valores aproximados

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo duas horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas com igual peso que a seguir se enumeram:

Prova I — a resolução de um problema referente a uma situação do dia a dia em que estejam envolvidas a resolução de condições e a utilização crítica de valores aproximados com a duração de 60 minutos;

Prova II — defesa oral da resolução do problema da prova I. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As duas horas previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

7 | Bibliografia / Outros Recursos

MANUAIS ESCOLARES DE MATEMÁTICA DO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO

GORDON, S. P.; GORDON, F. S. et al. (2004). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, Second Edition*. Rio de Janeiro: LTC (1997)

GORDON, S. P. (1997). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, The Math Modeling/Precalculus Reform Project*. On-Line Proceedings of AMATYC 1997, Atlanta, Geórgia. <http://www.amatyc.org/Proceedings/Atlanta23/Gordon/HTML/Gordon.html>

O projecto "Math Modeling/PreCalculus Reform" foi desenvolvido para ser uma alternativa ao ensino tradicional, valorizando aspectos inovadores como a análise de dados, o ajustamento de funções a dados da vida real e a modelação com um uso adequado da tecnologia; o projecto pretende que os estudantes olhem a matemática segundo a perspectiva simbólica, geométrica e numérica, tendo muita preocupação com a compreensão dos conceitos.

ALEX, ISIDORO, S.; MARTÍNEZ, ENCARNACIÓN C.; MARTÍNEZ, ENRIQUE C.; ROMERO, LUIS R. *Estimación y cálculo aproximado – Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis

ROBAYNA, MANUEL M. S.; MACHIN, MATIAS C.; MEDINA, MERCEDES; DOMÍNGUEZ, JOSEFA (2000). *Iniciación al álgebra - Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

Cálculos aproximados

<http://yperelman.ifrance.com/aritmeticarecreativa/aritmeticarecreativa08.html>

O capítulo oitavo do livro "Aritmética Recreativa" de Yakov Perelman, abordando questões sobre números aproximados, arredondamentos e operações com números aproximados.

Aproximadamente – Estimativa e Cálculo Mental

http://novaescola.abril.com.br/planos/aula_mat6.htm

Um plano de aula.

MÓDULO 16

Geometria Prática

Duração de Referência: 18 horas

1 | Apresentação

Na educação e formação básicas, muitos dos assuntos estudados ganham “vida” com ou requerem mesmo uma concretização geométrica. Por outro lado, muitas questões práticas precisam de uma interpretação geométrica que permita analisá-las com proveito. Este módulo pretende criar competências nessa área, recorrendo a triângulos rectângulos e círculos. Deste modo aparecerão de forma natural outros temas matemáticos básicos como o da resolução de problemas que mobilizam expressões do segundo grau com variáveis ou a trigonometria elementar.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Geometria Prática, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real, reconhecer e utilizar ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, bem como para as representar de diversos modos, incluindo relações entre variáveis;
- a aptidão para concretizar relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- a aptidão para conjecturar novos resultados e formular argumentos válidos com recurso à visualização dinâmica e a raciocínios demonstrativos, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para interpretar e dar sentido às razões invariantes para cada ângulo, utilizando triângulos rectângulos e semelhanças;
- a aptidão para apreciar o papel da circunferência nos seus diversos usos com identificação das propriedades respectivas;
- a aptidão para resolver problemas através de construções, nomeadamente envolvendo lugares geométricos, relações entre ângulos, arcos e cordas;
- a aptidão para resolver problemas envolvendo amplitudes de ângulos, comprimentos de arcos e cordas, áreas de sectores e coroas circulares ou volumes de cones e cilindros;

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Geometria Prática, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- realizar construções como solução de problemas de geometria ou em contextos da vida quotidiana ou de outras disciplinas de saber e interpretação da realidade;
- construir figuras diferentes com a mesma área;
- construir figuras que tenham a mesma área que figuras dadas;
- compor e decompor figuras planas;
- calcular medidas de áreas de figuras tomando outra para unidade de área;
- identificar as razões invariantes para cada ângulo e utilizá-las para resolver problemas de trigonometria (distâncias inacessíveis, por exemplo);

- identificar as vantagens e reconhecer a importância do uso de figuras envolvendo o círculo na resolução de problemas que envolvam comprimentos, áreas ou volumes de certas figuras planas e certos sólidos;
- construir modelos ou maquetas para problemas que dependam de círculos e polígonos (inscritíveis), realizando todos os cálculos necessários para dar resposta a uma encomenda de um objecto escultórico, embalagem ou de outro tipo;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

4 | Conteúdos

1. Comparação de áreas de figuras planas. Figuras equivalentes. Teorema de Pitágoras.
2. Resolução de problemas envolvendo o Teorema de Pitágoras e expressões do 2º grau.
3. Semelhança de triângulos e razões trigonométricas. Resolução de problemas simples e típicos de trigonometria em contextos de aplicações.
4. O círculo: perímetro e área.
5. Referência a sólidos de revolução.
6. Ângulos inscritos. Polígonos inscritíveis.

5 | Orientações metodológicas

O professor deve propor actividades que passem pelo trabalho de campo, que utilizem conceitos de factor de escala (semelhanças), estimação de medidas de áreas de figuras em comparação com outras (usando materiais manipuláveis ou levantamento em contexto real). É necessário apresentar problemas que exijam a construção de modelos ou maquetas que envolvam círculos e polígonos (inscritíveis), realizando todos os cálculos necessários para dar resposta a uma encomenda de um objecto escultórico, embalagem ou de outro tipo.

Há actividades de observação sobre os materiais do quotidiano, em particular sobre o património construído e as máquinas de uso corrente, que ilustram a omnipresença do círculo e iluminam as propriedades mais importantes do círculo e dos elementos geométricos que com ele interagem mais frequentemente. Devem ser organizadas actividades com essa intenção.

As actividades devem ser tão significativas que os estudantes compreendam como diversos resultados matemáticos a que podem aceder se podem mobilizar conjuntamente para dar resposta a diversas perguntas que a situação problemática pode sugerir como problemas que é preciso resolver.

6 | Sugestões de avaliação

A avaliação pode consistir numa prova única. Ao estudante pode ser proposta uma actividade para ser resolvida durante três horas sobre a qual o estudante realiza um relatório.

7 | Bibliografia / Outros recursos

APM. (2000). Pasta de actividades - Pavimentações. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

APM. (1994). Pasta de actividades - Pentaminós. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, com recurso aos pentaminós.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM (1999). *Geometria com Cabri-Géomètre*. Lisboa:APM.

Esta publicação contém actividades de geometria para utilização na sala de aula utilizando o programa de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II; essas actividades são graduadas de modo que se tenha um domínio progressivo do programa a partir dos procedimentos mais elementares. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem elementos de geometria plana, fractais, cónicas, transformações geométricas e geometria analítica.

JUNQUEIRA, M; VALENTE, S. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas* Lisboa: APM.

Este é um livro que contém uma série de materiais para a sala de aula, premiados no "IV Concurso de materiais de apoio à utilização e integração das TIC nos ensino Básico e Secundário" do Ministério da Educação. Os materiais estão divididos em dois grupos: 11 para utilizar com estudantes e 4 para os professores utilizarem na sua formação (totalmente adequados a auto-formação). Os materiais estão elaboradas para serem usados com o Cabri-Géomètre mas podem ser usados com qualquer outro Ambiente Geométrico Dinâmico (como o Geometer's Sketchpad). As actividades deste livro incluem temas como polígonos, cónicas, tangentes a uma circunferência, mediatriz. Uma excelente oportunidade para começar a trabalhar Geometria com um computador.

RAWSON, W.; CHAMOSO, J. (2004). *Contando la geometria – diálogos de matemáticos*. Espanha: NIVOLA libros y ediciones, S.L.

Este livro apresenta um diálogo de dois cidadãos que partiram pelas ruas da cidade à procura de aspectos geométricos com o objectivo de observar o contexto envolvente como se fosse um laboratório matemático.

RECIO, A. MARTINEZ *et al* (1989). *Una metodologia activa y ludica para la enseñanza de la geometria*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Sintesis.

Este livro apresenta e fundamenta uma metodologia activa e lúdica, de aprendizagem da Geometria elementar por descoberta, baseada no jogo psicomotor.

VIEIRA, A.; VELOSO, E.; LAGARTO, M. J. (org.).(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

DIAZ, FRANCISCO P. *et al*. *Circunferência y círculo*. Col. Matemáticas : Cultura y aprendizaje. Editorial Sintesis. Madrid : 1998.

Esta publicação como outras da Editorial Sintesis contém os conteúdos matemáticos ligados à geometria do círculo e sugere actividades que podem ser transferidas para a sala de aula.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos - O Túnel de Samos

— http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e este, mostrando uma aplicação histórica da Geometria Elementar, pode ser usado (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

MÓDULO 17

Problemas Numéricos

Duração de Referência: **18 horas**

1 | Apresentação

Neste módulo, o estudante deve recordar os números racionais, os números reais e suas aproximações e trabalhar problemas envolvendo equações, inequações e proporcionalidade, trabalhando sempre a partir de contextos concretos da vida corrente.

Tal como é impossível definir “número grande” ou “número pequeno” acontece o mesmo com “valor aproximado”. Mas sendo os valores aproximados cada vez mais utilizados quando se recorre à tecnologia deve incentivar-se o estudante a dar significado, na forma mais simples, a “erro de um valor aproximado” sempre que este resolve problemas e apresenta soluções em que o uso de valores aproximados é aconselhável.

2 | Competências Visadas

Neste módulo Problemas Numéricos, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis à manipulação dos números e das operações;
- a sensibilidade para a ordem de grandeza de números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- o reconhecimento dos números inteiros, racionais e reais, das diferentes formas de representação dos elementos desses conjuntos e das relações entre eles, bem como da aptidão para usá-los em situações concretas;
- a aptidão para trabalhar com valores aproximados de números fraccionários ou irracionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;
- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- a aptidão para usar equações, inequações e relações de proporcionalidade como meio de representar situações problemáticas e de as resolver.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo Problemas numéricos, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- utilizar diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos;
- estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir da razoabilidade de resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação;
- trabalhar com valores aproximados de números fraccionários ou irracionais de maneira adequada ao contexto do problema ou da situação em estudo;

- analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- usar equações, inequações e relações de proporcionalidade como meio de representar situações problemáticas;
- resolver equações e inequações e problemas envolvendo proporcionalidade.

4 | Conteúdos

1. Números reais: relação de ordem, valores aproximados.
2. Resolução de problemas envolvendo equações.
3. Resolução de problemas envolvendo inequações.
4. Resolução de problemas envolvendo proporcionalidade.

5 | Orientações metodológicas

Os estudantes poderão efectuar algumas actividades de investigação envolvendo números fraccionários ou irracionais. Poderão procurar regularidades, se existirem, fazer e testar conjecturas, argumentar e comunicar, oralmente ou por escrito, as conclusões.

A resolução de problemas constitui um contexto privilegiado para a aprendizagem da resolução de equações e inequações e para trabalho com valores aproximados.

As relações de proporcionalidade devem ser trabalhadas em contextos simples e motivadores que ajudem os estudantes a organizar os conhecimentos básicos que já possuem.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo duas horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas com igual peso que a seguir se enumeram:

Prova I — a resolução de um problema referente a uma situação do dia a dia em que estejam envolvidas a resolução de condições e a utilização crítica de valores aproximados, com a duração de 60 minutos;

Prova II — defesa oral da resolução do problema da prova I. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As duas horas previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

7 | Bibliografia / Outros Recursos

ALEX, ISIDORO, S.; MARTÍNEZ, ENCARNACIÓN C.; MARTÍNEZ, ENRIQUE C.; ROMERO, LUIS R. *Estimación y cálculo aproximado – Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis

ROBAYNA, MANUEL M. S.; MACHIN, MATIAS C.; MEDINA, MERCEDES; DOMÍNGUEZ, JOSEFA (2000). *Iniciación al álgebra - Colección - MATEMÁTICAS: CULTURA Y APRENDIZAJE*. Madrid: Editorial Síntesis.

NIVEN, I. (1984). *Números: Racionais e Irracionais*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Esta é uma obra para professores que permite esclarecer algumas questões relativas aos universos numéricos.

CONWAY, J. E GUY, R. (1999). *O Livro dos Números*. Lisboa: Gradiva/Universidade de Aveiro.

Esta obra apresenta factos, figuras e histórias à volta dos números e das regularidades numéricas.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

Cálculos aproximados

<http://yperelman.ifrance.com/aritmeticarecreativa/aritmeticarecreativa08.html>

O capítulo oitavo do livro "Aritmética Recreativa" de Yakov Perelman, abordando questões sobre números aproximados, arredondamentos e operações com números aproximados.

Aproximadamente – Estimativa e Cálculo Mental

http://novaescola.abril.com.br/planos/aula_mat6.htm

Um plano de aula.

“Que quantidade de água desperdiçamos?” — http://www.apm.pt/recursos/ciclo2/q_agua/index.html

Tarefa que pretende levar os alunos a fazer e verificar estimativas e conjecturas que envolvam números elevados, a sensibilizar-se pela problemática da economia dos recursos naturais e a compreender a importância de pequenos esforços para a conservação de recursos essenciais.

REDEMATIC: Números racionais — <http://www.malhatlantica.pt/mat/racionais7.htm>

Um interessante conjunto de actividades que inclui algumas que recorrem ao uso de uma folha de cálculo e a software de Geometria Dinâmica.

REDEMATIC: Proporcionalidade directa — <http://www.malhatlantica.pt/mat/prop.htm>

Um interessante conjunto de actividades que inclui um que recorre ao uso de uma folha de cálculo.

REDEMATIC: Proporcionalidade inversa — <http://www.malhatlantica.pt/mat/propor.htm>

Um interessante conjunto de actividades que inclui um que recorre ao uso de um traçador de gráficos.

MÓDULO 18

Geometria

Duração de Referência: 36 horas

1 | Apresentação

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver uma intuição geométrica e um raciocínio espacial, assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática. Deve ainda desenvolver capacidades de organização e de comunicação quer oral, quer escrita. A leccionação deste módulo deve levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Geometria, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas realistas e na resolução de problemas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Geometria, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- construir modelos (maquetas e desenhos) úteis e adequados à resolução de problemas, com recurso a medições e escalas;
- mobilizar resultados matemáticos básicos necessários e apropriados para simplificar o trabalho na resolução de problemas;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- identificar as vantagens do uso de um referencial;
- instalar um referencial numa figura (ou uma figura num referencial) de forma a obter “as melhores coordenadas”;
- reconhecer as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e, no espaço, relativamente aos planos coordenados;
- escrever a equação de uma recta representada graficamente e vice-versa.

4 | Conteúdos

1. Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço

Alguns tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:

- estudo de alguns padrões geométricos planos (frisos);
- estudo das pavimentações regulares;
- estudo de alguns problemas de empacotamento;
- composição e decomposição de figuras tridimensionais;
- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.

2. O método das coordenadas para estudar geometria no plano e no espaço

- Referenciais cartesianos ortonormados no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e \mathbb{R}^2 entre o espaço e \mathbb{R}^3 ;
- Equação reduzida da recta no plano e equação $x=x_0$.

5 | Orientações metodológicas

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos, fazendo surgir, a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução, uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados os nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros).

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos.

Mesmo quando há lugar a resolver um problema por via analítica, o professor deve incentivar o esboço de figuras geométricas de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver capacidades de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Para além disso, deve apelar-se sempre à descrição, com algum detalhe, do processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica).

Ao estudante devem ser propostas actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial quer no plano, quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter as melhores coordenadas experimentando com várias figuras no plano e no espaço. Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou o módulo, recorrendo aos modelos já utilizados. No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissetriz dos quadrantes ímpares. No espaço, o estudante deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve ser aproveitado noutros módulos. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso, que a seguir se enumeram.

Prova I — um teste escrito com a duração de noventa minutos.

Prova II — apresentação oral de um problema, escolhido pelo estudante, e preparado com a antecedência por este escolhida, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As quatro horas e meia previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

7 | Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S.. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

APM. (2000). *Pasta de actividades - Pavimentações*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

Módulo18: Geometria

GERDES, P. (2003). *Sipatsi - Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchowkwe de Angola - os (lu)sona.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

— http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

MÓDULO 19

Padrões Geométricos

Duração de Referência: **30 horas**

1 | Apresentação

Na formação geral dos cidadãos e, em especial, para os que se dedicam a algumas profissões, a observação de representações no património construído, na decoração e nos artefactos do quotidiano é fundamental até para a atribuição de valor de gosto e para a compreensão da geometria como ciência estruturante do gosto. A descoberta de regularidades e padrões nas observações e a capacidade de os reconstruir a partir de elementos fundamentais são competências muito importantes.

Os estudantes deste módulo já tiveram contacto com um ensino da Geometria que lhes desenvolveu a intuição geométrica e o raciocínio espacial, para além de os ter ajudado a explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usando e aplicando a Matemática.

É preciso agora que desenvolvam competências geométricas de visualização e classificação das regularidades e padrões e das transformações geométricas, ao mesmo tempo que vão realizando actividades, com papel e instrumentos de desenho e corte ou recorrendo a programas de geometria dinâmica e computadores, cujo resultado deve consistir em materiais físicos palpáveis, úteis para outras disciplinas e para portefólio pessoal com vista a afirmação na vida profissional.

A leccionação deste módulo deve levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Padrões Geométricos, a competência matemática de visualização e composição que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e a técnica;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na concepção e elaboração de materiais para comunicação;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, identificando regularidades e padrões, bem como transformações geométricas com elas relacionadas;
- a aptidão para reconhecer a geometria das transformações em grandes obras da humanidade, reconhecendo ao mesmo tempo o génio dos autores de obras que representam demonstrações por exaustão de casos;
- aptidão para reconstruir exemplos de simetrias e outras transformações, aplicando-as a novas situações de decoração ou outras.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Padrões Geométricos, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- reconstruir em modelos (maquetas ou desenhos), com recurso a medições e escalas, padrões como elementos decorativos;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados, como prática para apresentação de artes finais;
- identificar as vantagens do uso de transformações geométricas;
- identificar em elementos decorativos de artesanato ou de produtos industriais algumas transformações geométricas;
- reconhecer as vantagens no trabalho (de *design* ou outro) do recurso a computadores e programas de geometria dinâmica;
- reconhecer a importância das transformações geométricas na actualidade da produção de arte decorativa e na história do património artístico da região.

4 | Conteúdos

1. Identificação de simetrias em tapetes, ou noutras decorações planas ou no espaço:
 - estudo de padrões geométricos planos (frisos) e das pavimentações regulares com identificação das transformações neles envolvidas;
 - estudo de problemas de empacotamento e composição e decomposição de figuras tridimensionais, com identificação das transformações geométricas neles envolvidos, com particular incidência nas simetrias do cubo.
2. Estudo e reconstrução de aspectos geométricos, usando programas de geometria dinâmica, de exemplares do património artístico histórico, a partir de um motivo mínimo:
 - abordagem de um problema histórico, ou de um estilo de elementos decorativos e sua ligação com a História da Geometria.

5 | Orientações metodológicas

O professor deve propor actividades de observação de exemplares de arte decorativa e de reconstrução e manipulação de modelos ligados a exemplares históricos. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Não interessa dar a conhecer problemas históricos sem propor ao estudante a reconstrução de, pelo menos, um, usando material de desenho e corte ou programas computacionais adequados. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria em especial dos exemplares das civilizações ligadas à Ibéria e à História de Portugal, incluindo o período da expansão.

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de reconstruções concretas e de actividade de concepção e elaboração de novos objectos.

Devem explorar-se, sempre que, possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve ser aproveitado noutros módulos. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso, que a seguir se enumeram.

Prova I — uma prova de desenho de um objecto obedecendo a transformações escolhidas sobre um motivo pré-estabelecido, com a duração de noventa minutos.

Prova II — apresentação oral de um objecto, escolhido e preparado pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo e que deve ser significativo num seu portefólio profissional. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As quatro horas e meia previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

7 | Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática —10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria - Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

AGUIRREGABIRIA, J. M. (1987). *Taller de Sabios*. Madrid: Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.

GRICHLAW, K. (1998). *Islamic Patterns. An Analytical and Cosmological Approach*. London: Thames & Hudson.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S.. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

APM. (1997). *Actividades com Padrões*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades e bibliografia.

APM. (2000). *Pasta de actividades - Pavimentações*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

GERDES, P. (2003). *Sipatsi - Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchoukwe de Angola - os (lu)sona.

COXFORD, A. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*. Lisboa: APM.

GRUNBAUM, B., Shepard, G. (1987) *Tilings and Patterns*. New York

LOFF, Dina (1991) *Polígonos e Pavimentações - Uma Abordagem Elementar*. Coimbra: SPM.

MARTIN, G. (1982). *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*. New York: Springer Verlag.

ATRATOR: Simetrias

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

Religious Beliefs Made Visual: Geometry and Islam

<http://www.askasia.org/frclasrm/lessplan/I000030.htm>

Metropolitan Museum: Esta página é um plano de aula sobre padrões islâmicos, precisamente.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

— http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

MÓDULO 20

Estatística

Duração de Referência: **28 horas**

1 | Apresentação

Algumas noções que se tratam neste módulo já foram abordadas em anos anteriores e, por isso, é possível, em qualquer altura, reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente.

O estudante deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da estatística contribua para melhorar a capacidade dos estudantes em avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários, quer notícias ou outras informações em que a interpretação dos dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este módulo fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os estudantes incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os estudantes devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo a análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem.

No estudo deste módulo o estudante deve recorrer à calculadora gráfica e ao computador e às suas potencialidades para resolver muitos dos problemas.

Propõe-se que este módulo seja trabalhado num ambiente de realização de projectos, natural para a aprendizagem contextualizada e significativa.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Estatística, a competência matemática que todos devem desenvolver incluiu os aspectos seguintes:

- a tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos;
- a predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz de situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões;
- o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Estatística, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- definir o problema a estudar;
- realizar recolhas de dados;
- organizar e tratar os dados através do cálculo das medidas estatísticas (de centralidade e dispersão), sua interpretação e representação gráfica;
- seleccionar as formas de representação gráfica mais adequadas à estatística a trabalhar e interpretá-las criticamente;
- desenvolver o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada,
- comunicar raciocínios e/ou argumentos matemáticos na forma oral e/ou escrita.
- realizar um trabalho de projecto, partindo de uma situação problemática da vida real relacionada com percursos profissionais, com necessidades industriais ou comerciais (controle de qualidade da cadeia de produção), com rentabilização de recursos (negociado com os estudantes), garante a concretização dos objectivos que se pretendem. Por isso, recomenda-se que se desenvolva a aprendizagem usando metodologias de trabalho de projecto.

4 | Conteúdos

1. Estatística — Generalidades

- Objecto da estatística. Utilidade na vida moderna.
- Recenseamento e sondagem; população e amostra; critérios de selecção de amostra de uma determinada população.
- Estatística descritiva e indutiva.

2. Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)

- Tipos de caracteres estatísticos: qualitativo e quantitativo (discreto e contínuo).
- Formas de representação: gráficos circulares, diagramas de barras/histogramas, pictogramas, função cumulativa, diagrama de extremos e quartis, tabelas de frequências absolutas e relativas, polígono de frequências.
- Medidas de localização central: moda/classe modal, média, mediana e quartis.
- Medidas de dispersão: amplitude, variância, desvio padrão, amplitude inter-quartis.

3. Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)

- Diagrama de dispersão; dependência estatística e correlação positiva e negativa.
- Coeficiente de correlação e sua variação no intervalo.
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Recta de regressão: sua interpretação e limitações.

5 | Orientações metodológicas

Neste módulo, chama-se a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento e a sua utilidade na vida moderna. É importante clarificar quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico e exemplificar com fenómenos da vida real, realçando o papel da Estatística na sua descrição.

A compreensão do conceito de amostragem e o reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas permite a distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Abordam-se, ainda que intuitivamente, os critérios de escolha de uma dada amostra: a aleatoriedade, a representatividade e o ser livre de vícios de concepção.

A Estatística é uma ciência que trata dos “dados”. Em alguma altura do trabalho deste módulo, os estudantes precisam de ficar a compreender que num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases:

- uma fase de organização dos dados recolhidos em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida - Estatística Descritiva, e
- uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados - Inferência Estatística.

Uma fase importante para o trabalho escolar-profissional é a aquisição dos próprios “dados”, que deve ser significativo até ao ponto de realçar que, no início de qualquer estudo estatístico, é imperioso proceder ao planeamento da experiência.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, de igual peso, com duas horas para a realização da primeira prova e quatro horas para a realização da segunda prova, a seguir enumeradas:

Prova I: apresentação oral ou por escrito de um exemplo de uma situação problemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos de uma dada situação;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova II: defesa oral do trabalho de projecto realizado neste módulo, escolhido pelo estudante, e supervisionado pelo professor, a partir do qual realizou a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

MARTINS, M. E. G. (coord.), MONTEIRO, C., VIANA, J., TURKMAN, M.(1997). *Estatística: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME-DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que é de consulta indispensável

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades sobre estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

MOORE, DAVID (2000). *Statistics, The Science of data. For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World, Part II*, 5th ed. New York: Freeman.

MOORE, DAVID (2000). *The Basic of Statistics*. New York: Freeman.

MOORE, DAVID (2000). *Introduction to the Practice of Statistics*. New York: Freeman.

Livros recomendados pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA E ESCOLA SECUNDÁRIA TOMAZ PELAYO

Projecto ALEA — <http://alea-estp.ine.pt/> —

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas da actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um fórum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

MÓDULO 21

Funções Polinomiais

Duração de Referência: **30 horas**

1 | Apresentação

O conceito de função é uma ideia muito importante e unificadora em Matemática por ser uma representação de muitas situações reais. As calculadoras, os sensores de recolha de dados e os computadores, nomeadamente com as folhas de cálculo e os programas de gráficos, permitem que muito cedo o estudante possa fazer uma abordagem das funções sob os pontos de vista gráfico, numérico e algébrico.

A riqueza das situações que as representações gráficas de funções permitem descrever favorece e estimula o raciocínio e a comunicação matemática.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho natural para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade.

Os conhecimentos sobre funções, que os estudantes trazem dos ciclos anteriores, vão ser ampliados com o estudo das funções quadráticas e cúbicas, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções, os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade do mundo do trabalho, da indústria, do comércio ou do mundo empresarial utilizando diversos tipos de funções;
- fazer o estudo de funções (domínio, extremos se existirem, zeros, intervalos de monotonia) descrevendo e interpretando no contexto da situação;

- reconhecer que o mesmo tipo de função pode ser um modelo de diferentes situações realistas;
- traduzir representações descritas por tabelas ou gráficos;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- usar cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- usar métodos gráficos para resolver condições cuja resolução com métodos algébricos não esteja ao alcance dos estudantes;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.

4 | Conteúdos

Resolução de Problemas envolvendo funções.

Esta resolução de problemas abrange progressivamente os seguintes temas:

1. Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.
2. Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:
 - a. funções quadráticas;
 - b. funções cúbicas.

As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos yy e à origem, limites nos ramos infinitos.

Este estudo deve incluir:

- a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);
- transformações simples de funções: considerado o gráfico da função $y=f(x)$, esboçar o gráfico das funções definidas por $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=af(x)$, $y=f(ax)$, com a número real positivo ou negativo, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

5 | Orientações metodológicas

Para as actividades de modelação matemática, deve recorrer-se obrigatoriamente a três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Neste módulo, uma ênfase especial é dada ao trabalho em grupo com Aplicações e Modelação Matemática, e em que o recurso às tecnologias desempenha um papel fundamental. As capacidades numéricas e gráficas das calculadoras devem ser utilizadas e explicitadas na resolução de problemas, em especial nos que envolvem inequações ou outras condições, cuja resolução não está ao alcance dos estudantes, com métodos algébricos.

É necessário proporcionar ao estudante oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios ou monografias devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou no computador.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

O estudo das famílias de funções é propício à realização de pequenas investigações.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed., 1998). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC (1997)

Módulo21: Funções polinomiais

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

VÍTOR TEODORO ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções.*
ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*
CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*
— <http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html> —

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeo
Polinómios — http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Este vídeo, de excelente qualidade, presta-se a diversos tipos de explorações. É acompanhado de um texto de apoio com sugestões de actividades.

MÓDULO 22

Funções periódicas e não periódicas

Duração de Referência: **30 horas**

1 | Apresentação

No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria. Pretende-se agora que recordem esses conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo, enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuitivas e aprendam o conceito de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas.

Neste módulo, os estudantes alargam às periódicas e racionais as classes de funções que já conhecem, e, recorrendo essencialmente a trabalho com a calculadora gráfica e o computador, tomam contacto com algumas das suas propriedades de modo a ficarem capazes de escolher, para cada situação concreta, o modelo funcional mais adequado.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções Periódicas e Não Periódicas, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções Periódicas e Não Periódicas, pretende-se que o estudante se aproprie dos seguintes conceitos e técnicas associadas e os utilize como "ferramentas" na resolução de problemas:

- radiano;
- referencial polar no plano; ângulos orientados e medidas das suas amplitudes;
- definição de seno, co-seno e tangente de um número real;
- resolução de equações trigonométricas muito simples;
- características das funções circulares: periodicidade;
- comportamento das funções racionais para valores "muito grandes" da variável e para valores "muito próximos" dos zeros dos denominadores das frações que as definem;
- "rapidez" de crescimento (ou decrescimento) da variável dependente em fenómenos variados;
- modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre as funções polinomiais, as funções trigonométricas e as funções racionais.

4 | Conteúdos

1. Movimentos Periódicos. Funções Trigonométricas.

- Motivação: exemplos de movimentos periódicos.
- Seno, co-seno e tangente de um número real.
- Resolução de equações trigonométricas muito simples.
- Gráficos das funções seno, co-seno e tangente.
- Periodicidade.

2. Movimentos Não Lineares. Funções Racionais.

- Motivação: estudo de relações numéricas concretas entre variáveis inversamente proporcionais.
- Características e comportamentos de algumas funções racionais:
 - $y = 1/(ax)$
 - $y = 1/(ax^2)$
 - $y = 1/[a(x-h)^2]$

3. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Orientações metodológicas

O professor precisa de propor problemas de diversos tipos para relembrar a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas de ângulos agudos. São exemplos possíveis o cálculo de distâncias directamente inacessíveis. A generalização das noções deve ser intuitiva e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares. São exemplos possíveis a "roda gigante" das feiras, a roda da bicicleta, motores, etc. É absolutamente imprescindível a insistência no círculo trigonométrico.

As funções trigonométricas podem e devem aparecer como modelos matemáticos que descrevem situações mais ou menos complexas. As situações apresentadas podem considerar a recolha e tratamento de dados. As primeiras respostas a eventuais perguntas podem ser encontradas de forma ingénuas e com recurso à tecnologia e representações informais. O modelo que uma função trigonométrica pode representar deve aparecer como forma mais potente e geral para encontrar

respostas para a situação em presença e para outras situações do mesmo tipo. Exemplos de situações: evolução da bolsa de valores, movimento pendular, movimento do braço na marcha, movimento das marés, roda da bicicleta ou outras situações com movimentos circulares, moldes de peças, etc. Estas actividades de modelação são boas ocasiões para utilizar folhas de cálculo electrónico. Antes da modelação, deve introduzir-se uma actividade que permita passar do círculo trigonométrico para o conjunto dos pontos $(x, \text{sen}x)$ no plano cartesiano.

O estudo das funções trigonométricas deve incluir a análise de algumas situações de modelação matemática, recorrendo necessariamente a três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

O estudo das famílias de funções é propício à realização de pequenas investigações. Neste programa não se pretende que os estudantes aprofundem as noções ligadas a funções trigonométricas e a técnicas de resolução de condições envolvendo as mesmas funções.

A partir de uma actividade de experimentação (como, por exemplo, "A resistência do esparguete" – ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", p 129), os estudantes podem compreender relações numéricas entre variáveis inversamente proporcionais e encontrar um modelo simples de uma função racional. Deverão proceder, depois, recorrendo às calculadoras gráficas ou ao computador, a investigações (ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", pp. 80, 82 e 83) que os vão conduzir a conjecturar sobre as características e comportamentos de algumas funções racionais, em particular a existência de assíntotas ou o comportamento assintótico.

A resolução de problemas como "As peças cilíndricas" (p 91), "Compostos ácidos", da brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", ou equivalentes, permitirá que os estudantes resolvam condições e compreendam como se usa a álgebra na resolução de problemas reais, mas está fora do âmbito deste programa a insistência nos aspectos algébricos das diferentes classes de funções.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

CARREIRA, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Este estudo tem por fundamento a problemática da introdução de aplicações e modelação no ensino da matemática, encarando a utilização do computador como uma ferramenta de trabalho na realização de actividades de construção e exploração de modelos matemáticos.

IME-USP-SP, "E-Cálculo" - Funções Trigonométricas:

<http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/funcoes/trigonometricas/ftrigonometricas.htm>

Esta página da Universidade de São Paulo contém as definições básicas das funções trigonométricas, exemplos, aplicações e aplicações interactivas.

NCTM/ADELINA PRECATADO E MARIA DA PAZ - Os corvos e a Matemática: utilização das funções racionais para investigar o comportamento dos corvos.

<http://www.apm.pt/recursos/secundario/corvos/>

Esta página contém a tradução de uma actividade de modelação matemática proposta na excelente página "Illuminations" do NCTM, <http://illuminations.nctm.org/>, que envolve as funções racionais.

GORDON, S. P.; GORDON, F. S. et al. (2004). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, Second Edition*. Second Edition. Addison Wesley, 2004.

GORDON, S. P. (1997). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, The Math Modeling/Precalculus Reform Project*. On-Line Proceedings of AMATYC 1997, Atlanta, Gérgia.

<http://www.amatyc.org/Proceedings/Atlanta23/Gordon/HTML/Gordon.html>

O projecto "Math Modeling/PreCalculus Reform" foi desenvolvido para ser uma alternativa ao ensino tradicional, valorizando aspectos inovadores como a análise de dados, o ajustamento de funções a dados da vida real e a modelação com um uso adequado da tecnologia; o projecto pretende que os estudantes olhem a matemática segundo a perspectiva simbólica, geométrica e numérica, tendo muita preocupação com a compreensão dos conceitos.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs*. Addison-Wesley.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs - Graphing Calculator Manual*. Addison-Wesley.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic, 6th Edition*. Prentice-Hall.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic, 6th Edition - Graphing Calculator Manual*. Prentice-Hall.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Companion Site*.

<http://www.aw-bc.com/demana/>

MÓDULO 23

Taxa de Variação

Duração de Referência: **30 horas**

1 | Apresentação

Neste módulo, os estudantes vão utilizar de um outro modo as funções lineares e afins, bem como as polinomiais que já conhecem. De facto, com vista a dar resposta a algumas situações que exigem estudo dos comportamentos em intervalos (mais ou menos amplos) de modelos funcionais, os estudantes encontrarão nas taxas de variação sugestões dessas funções. A calculadora gráfica pode fornecer indicações seguras de variação e taxas de variação usando gráficos e cálculos numéricos. E, deste modo, os estudantes podem não só abordar problemas que se refiram a modelos polinomiais ou racionais, mas também funções trigonométricas.

A tecnologia propicia boas abordagens para resolver problemas e influencia o tipo de questões a investigar. Os estudantes usam calculadoras gráficas para apoiar as resoluções e as suas investigações mas poderão, sempre que possível, recorrer também aos computadores, utilizar folhas de cálculo, programas de gráficos ou de geometria dinâmica. O recurso à tecnologia torna possível a investigação e a conjectura sobre um maior número de exemplos.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Taxa de Variação, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções polinomiais, racionais e trigonométricas;
- a capacidade de comunicar, oralmente e por escrito, as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Taxa de Variação, os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas que utilize como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam variações;
- interpretar física e geometricamente os conceitos de taxa média de variação e (a um nível ainda que intuitivo) de taxa de variação num ponto;
- utilizar simultaneamente os estudos gráfico, numérico e analítico de funções, para conjecturar e provar resultados;
- analisar efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e nas respectivas taxas de variação;
- estudar o comportamento das funções estudadas na sua relação com valores e sinais das taxas de variação em pontos do domínio;
- construir e interpretar modelos para situações reais, utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre os diversos tipos de funções, utilizando cálculos das taxas de variação com recurso à calculadora gráfica ou ao computador.

4 | Conteúdos

1. Taxa de variação
 - Taxa de variação média: noção e cálculo.
 - Interpretação geométrica e física das taxas de variação (média e num ponto).
 - Taxas de variação com funções polinomiais, racionais e trigonométricas simples.
 - Relações entre valores e sinais das taxas de variação e comportamentos dos gráficos das funções (monotonia, ...).
2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Orientações metodológicas

Os estudantes deverão compreender e explicar a razão para uma função linear ser um bom modelo de estudo das variações da distância, em função do tempo, no movimento de um objecto que se move em linha recta com velocidade constante e deverão saber explicar o significado dos diversos parâmetros nos modelos desse tipo. Do mesmo modo, para um móvel que não se desloque a velocidade constante, mas com aceleração constante (tal como a queda de um objecto sob influência da gravidade e ignorando a resistência do ar), o estudante deve encontrar, como modelo matemático apropriado, a função quadrática. Os estudantes devem compreender o significado de uma velocidade negativa. O sensor de movimento permite boas experimentações para estas situações.

Também problemas como "*A bola no plano inclinado*", "*O custo marginal*" e "*Lançamento de um projectil*" (ver Brochura *Funções: Matemática – 11º ano de escolaridade* (pp. 100, 112 e 113)) permitirão que os estudantes se aproximem dos conceitos de taxa média de variação e de taxa de variação, bem como das respectivas interpretações geométricas. Os estudantes devem compreender o conceito de velocidade média num dado intervalo de tempo e aproximar-se intuitivamente do conceito de velocidade instantânea, e devem ser capazes de relacionar esses conceitos com os respectivos significados geométricos. A utilização da calculadora e do computador (recorrendo a software adequado) serão excelentes auxiliares para a aquisição destas noções. O recurso a sensores permitirá experiências interessantes.

Para efeitos da abordagem da taxa de variação em funções trigonométricas, as actividades “O cabo mais curto”, “Cone de luz”, “Volume de um cone”, “Roda gigante” das pp. 100 a 103 da brochura de “Geometria: Matemática 11º ano de escolaridade” podem ser utilizadas com ligeiras adaptações. Todas estas actividades não mobilizam mais que operações com recurso à calculadora gráfica.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática —10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1999). *Funções: Matemática 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contêm numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que são de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2ª ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Módulo23: Taxa de variação

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções.*
ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*
CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*
<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

IME-USP-SP, "E-Cálculo" - Derivadas:
— http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/body_der.htm —

Esta página da Universidade de São Paulo contém discussões e exemplos das noções de taxa de variação média e de taxa de variação (instantânea ou pontual) e respectiva interpretação geométrica (incluindo uma apliqueta interactiva).

WANER, STEFAN AND COSTENOBLE, STEVEN R. "Applied Calculus" - Average Rate of Change:
http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/RealWorld/tutorials/frames2_1.html

Uma actividade interactiva muito simples de introdução ao estudo da taxa média de variação (em inglês).

MÓDULO 24

Estatística Computacional

Duração de Referência: **30 horas**

1 | Apresentação

Com o advento dos meios informáticos, cada vez é maior o volume de dados que é possível armazenar num reduzido espaço físico e cada vez é maior o interesse por parte dos gestores e decisores em retirar desses dados toda a informação que lhes possa ser relevante. No módulo obrigatório de Estatística os estudantes aprenderam os principais conceitos e técnicas subjacentes ao tratamento e redução de colecções de dados, mas é, sem dúvida, uma mais valia o ficarem com alguns conhecimentos elementares de algum *software* informático de uso generalizado que lhes permita uma implementação facilitada das referidas técnicas. O *software* escolhido é a folha de cálculo que, embora não seja um *software* estatístico, inclui funções para cálculo das principais estatísticas descritivas, permite realizar as principais representações gráficas e, mediante recurso a outras funções predefinidas, permite ainda efectuar procedimentos não imediatos como seleccionar aleatoriamente uma amostra, construir histogramas com classes de diferente amplitude, organizar os dados em tabelas de contingência ou, até mesmo, proceder à simulação de pequenas experiências aleatórias.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Estatística Computacional, a competência que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- o conhecimento claro das potencialidades da folha de cálculo como *software* útil e disponível para tratamento e redução de dados;
- a sensibilidade para o problema da variabilidade em inferência estatística, para o que se recorrerá a múltiplas amostragens de uma mesma população;
- a aptidão para escolher os procedimentos adequados ao tratamento exploratório dos dados em estudo, de acordo com o seu tipo e características a salientar;
- a aptidão para executar os procedimentos atrás referidos usando a folha de cálculo.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Estatística Computacional, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- saber organizar dados na folha de cálculo de modo a serem susceptíveis de tratamento estatístico;
- delinear e implementar planos de amostragem adequados ao estudo de algumas características de interesse em populações que lhes seja de fácil acesso (população escolar, população da freguesia, etc.);
- adquirir conhecimento sobre a forma como executar as funções do Excel destinadas ao cálculo de estatísticas descritivas, realização de representações gráficas e construção de tabelas de contingência;
- saber implementar procedimentos de simulação de experiências aleatórias simples;

- cimentar conhecimentos adquiridos anteriormente, nomeadamente no que respeita à interpretação das estatísticas e representações gráficas, que vão sendo obtidas, e à escolha crítica das mais adequadas aos dados em estudo.

4 | Conteúdos

1. Noções básicas sobre amostragem
 - Amostra aleatória e não aleatória.
 - Técnicas de amostragem aleatória:
 - Amostragem aleatória simples
números aleatórios; as funções RAND (*ALEATORIO*) e VLOOKUP (*PROCV*) do Excel e sua utilização na selecção de amostras.
 - Amostragem estratificada.
 - Variabilidade amostral – ilustração por recurso a múltiplas amostras recolhidas de forma aleatória de uma mesma população.
2. Uso do Excel em análise exploratória de dados
 - Obtenção dos valores de algumas estatísticas descritivas – AVERAGE (*MEDIA*), MEDIAN (*MED*), MODE (*MODA*), STDEV (*DESVPAD*), VAR (*VAR*), PERCENTILE (*PERCENTIL*), QUARTILE (*QUARTIL*), MAX (*MÁXIMO*), MIN (*MÍNIMO*), etc.
 - Construção de tabelas de frequências – uso das funções COUNT (*CONTAR*), COUNTIF (*CONTAR.SE*), COUNT.VAL (*CONTAR.VAL*), FREQUENCY (*FREQUÊNCIA*), SUM (*SOMA*), etc.
 - Construção de representações gráficas
 - Gráfico de pontos;
 - Diagrama de dispersão;
 - Diagrama de barras;
 - Histograma;
 - Diagrama de extremos e quartis;
 - Gráfico de caule-e-folhas;
 - Diagrama circular;
 - Outras representações gráficas.
 - Construção de tabelas de contingência – uso do procedimento PIVOT TABLE (*TABELA DINAMICA*).
 - Instalação e utilização do procedimento avançado *Data Analysis* (Análise de Dados) (opcional).
3. Simulação de algumas experiências aleatórias simples (por exemplo, lançamento de um dado, extracção dos números de lotarias ou concursos análogos, chegadas de viaturas a um parque de estacionamento, etc.).

5 | Orientações metodológicas

A análise exploratória de dados, embora tenha metodologias e técnicas próprias, é, em grande parte, uma “arte” que se vai apurando com a prática. Cada colecção de dados tem as suas particularidades e a sua história e o engenho está em “fazer os dados falar!...”. A facilidade, que os meios computacionais trouxeram à implementação das técnicas de análise de dados, permite, hoje em dia, uma aprendizagem mais rápida e eficiente das diversas formas de extrair informação de grandes colecções de dados, desenvolvendo no estudante o espírito crítico quanto à escolha das representações gráficas mais adequadas ou das estatísticas descritivas que melhor resumem os

dados em estudo. Para o processo de aprendizagem é importante que o estudante comece por analisar pequenas colecções de dados (recolhidos, de preferência, junto da população da escola) e, para exemplificação da forma como se executam os diversos procedimentos computacionais, aconselha-se que estas não envolvam mais do que uma ou duas variáveis de interesse. Numa fase posterior deve-se incentivar os estudantes a pesquisar algumas fontes de dados e a escolher algumas variáveis que lhes despertem mais interesse. No parágrafo Bibliografia / Outros Recursos está a indicação de algumas das páginas da *Internet* onde se pode encontrar informação estatística detalhada sobre temas de carácter genérico, ligados à sociedade onde vivemos (saúde, cultura, ensino, actividades económicas, etc.).

Quanto ao tópico “Simulação de experiências aleatórias simples”, a abordar no final deste módulo de Estatística Computacional, a sua inclusão irá permitir tirar partido do gerador de números pseudo-aleatórios como simulador de ocorrências de acontecimentos, bastando, para tal, escolher um modelo de probabilidade que represente bem a experiência a simular. Aqui, poderá simular-se facilmente o lançamento de um dado ou a extracção dos números do totoloto e confrontar os resultados com o que se esperaria teoricamente. Poder-se-á até estimar probabilidades de acontecimentos resultantes de experiências aleatórias mais complexas como, por exemplo, estimar a probabilidade de, ao cortar um segmento de recta em dois pontos, obter três segmentos que venham a formar os lados de um triângulo. De um modo geral, qualquer experiência interpretável através de um modelo de probabilidade discreto poderá ser objecto de um pequeno projecto de trabalho para os estudantes e uma boa oportunidade para usarem a criatividade própria na concepção e concretização do projecto.

6 | Sugestões de avaliação

A natureza deste módulo e, em particular, o tipo de trabalho que se pretende desenvolver com os estudantes, implica, de algum modo, uma alteração nos instrumentos de avaliação. As provas escritas perdem sentido e a actividade e aproveitamento dos estudantes são mais cabalmente medidos com a apreciação de trabalhos de grupo e individuais que poderão ser relatórios escritos ou apresentações orais de projectos desenvolvidos durante o decorrer do módulo.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, a seguir enumeradas:

Prova I: apresentação oral ou por escrito de um exemplo de uma situação problemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à prova.

Prova II: defesa oral de um trabalho realizado neste módulo, escolhido pelo estudante, e supervisionado pelo professor. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

GRAÇA MARTINS, M.E. (2000) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Edição da Sociedade Portuguesa de Estatística.

MOORE, D. ET AL (1996) – *Introduction to the Practice of Statistics*, Freeman, New York.

MOORE, D. (1996) – *The Basic Practice of Statistics*, Freeman, New York.

MOORE, D. (1997) – *Statistics – Concepts and Controversies*, Freeman, New York.

Módulo24: Estatística computacional

COMAP, (2000) – *For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*, Freeman and Company, New York.

ROSSMAN, A. et al (2001) – *Workshop Statistics – Discovery with data*, Key College Publishing.

Os livros anteriores são recomendados pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

BARNETT, V. (1997) – *Sample Survey: Principles & Methods*, Arnold, London.

VICENTE, P., REIS, E., FERRÃO, F. (1996) – *Sondagens*, Edições Sílabo.

Artigos da revista *TEACHING STATISTICS*

AGEEL, M.I. – Spreadsheets as a Simulation Tool for Solving Probability Problems, Vol 24, 2, pag. 51-54.

NEVILLE, H. – Handling Continuous Data in Excel, Vol 25, 2, pag. 42-45.

NEVILLE, H. – Charts in Excel, Vol 26, 2, pag. 49-53.

RECURSOS NA INTERNET

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA E ESCOLA SECUNDÁRIA TOMAZ PELAYO
PROJECTO ALEA – <http://alea-estp.ine.pt>

Desta página recomenda-se, em especial, o dossiê didáctico “ESTATÍSTICA COM EXCEL” da autoria de Luís Miguel Cunha.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA – www.ine.pt/

Tem informação sobre Portugal, ao nível da freguesia.

EUROSTAT – europa.eu.int/comm/eurostat/

Tem informação relativa aos diversos países da Europa.

WORLD HEALTH ORGANIZATION – <http://www.who.int/research/en/>

Tem informação sobre temas ligados à saúde, para todos os países do mundo.

WORLD IN FIGURES – http://www.stat.fi/tup/maanum/index_en.html

Tem informação das mais diversas áreas, tais como população e estatísticas vitais, cultura, religiões, emprego, consumo, etc., relativa a todos os países do mundo.

MÓDULO 25

Probabilidade

Duração de Referência: 24 horas

1 | Apresentação

A modelação de fenómenos que, não sendo passíveis de ser descritos por leis determinísticas, encontram nos modelos de probabilidade uma boa alternativa à sua descrição, é a principal motivação para a organização dos conteúdos programáticos deste módulo.

Recorrendo ao argumento de simetria, facilmente se introduzem modelos muito simples que irão permitir uma primeira abordagem à noção de acontecimento e a apresentação da Regra de Laplace. Seguidamente passar-se-á à apresentação formal de *modelo de probabilidade* no caso muito particular em que o espaço de resultados é finito e contido no conjunto dos números reais. Definindo *acontecimento*, neste caso particular, como sendo qualquer dos subconjuntos do espaço de resultados, torna-se possível ilustrar, através de exemplos, algumas das propriedades da probabilidade (probabilidade da união, do complementar e da diferença).

Também importante é a noção de *probabilidade condicional*. Esta é, em geral, intuitiva quando aplicada no cálculo de probabilidades de cadeias de acontecimentos (ao retirar bolas de uma urna, sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extracções anteriores).

Dada a sua relevância, inclui-se também neste módulo de Probabilidade, um breve estudo do modelo Normal. Muitas variáveis ligadas a fenómenos naturais (altura de um indivíduo, perímetro do tronco de uma árvore, peso de um certo tipo de fruto, etc.) podem ser encaradas como resultantes do contributo (de forma aditiva) de muitas grandezas aleatórias e, como tal, o Teorema do Limite Central justifica a utilização do modelo Normal na sua modelação.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Probabilidade, a competência que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- compreensão da diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório;
- construção de modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio;
- apreensão das propriedades básicas de uma função massa de probabilidade;
- compreensão da noção de probabilidade condicional;
- conhecimento das propriedades da probabilidade e sua utilização no cálculo da probabilidade de acontecimentos;
- conhecimento do modelo Normal ou Gaussiano e suas propriedades.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Probabilidade, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- saber calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir de modelos propostos;
- identificar acontecimentos em espaços finitos;
- mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias;
- ilustrar a forma de cálculo de probabilidades de acontecimentos utilizando uma árvore de probabilidades;
- calcular probabilidades com base na família de modelos Normal recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard* ou, em alternativa, utilizando a calculadora.

4 | Conteúdos

1. Fenómenos aleatórios
2. Argumento de Simetria e Regra de Laplace
3. Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade ou distribuição de probabilidade.
4. Probabilidade condicional. Árvore de probabilidades. Acontecimentos independentes.
5. Modelo Normal

5 | Orientações metodológicas

O programa deste módulo inicia-se com a distinção entre fenómeno aleatório e não aleatório. A sensibilização dos estudantes para este tema deverá ser desenvolvida através de exemplos de fenómenos físicos com leis determinísticas (como a queda de um grave, movimento de um pêndulo,...) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios devido à grande complexidade das leis físicas subjacentes (movimento de um dado ao ser lançado, movimento das partículas numa nuvem de pó, temperatura máxima observada numa data futura,...). Os modelos de probabilidade surgirão assim como uma boa solução para a modelação de fenómenos aleatórios.

Os modelos de probabilidade mais simples são os que descrevem os chamados “jogos de azar”. Aqui é quase sempre possível encontrar um espaço de resultados para cujos elementos, à partida, não se tem razão para admitir que não tenham igual probabilidade de ocorrer. Ao construir estes modelos pretende-se, não só, que os estudantes sejam capazes de entender o argumento de simetria que está subjacente à atribuição de probabilidades, como que tenham uma primeira abordagem à noção de acontecimento. É também este o bom momento para a apresentação da Regra de Laplace como regra de cálculo de probabilidades em espaços finitos e equiprováveis (note-se que não se justifica, neste módulo, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório). Numa fase seguinte, recorrendo à Regra do Produto, os estudantes deverão ser também capazes de modelar experiências aleatórias um pouco mais complexas, que envolvam o encadeamento de experiências elementares.

Este tópico deve ser finalizado com a apresentação e discussão com os estudantes de alguns exemplos de fenómenos aleatórios para os quais não faça sentido utilizar argumentos de simetria.

Segue-se a apresentação formal de *modelo de probabilidade*, no caso muito particular em que o espaço de resultados é finito e contido no conjunto dos números reais. A *função massa de probabilidade ou distribuição de probabilidade* é aqui o elemento básico de trabalho e o estudante deverá compreender a sua utilidade e conhecer bem as suas propriedades. Definindo *acontecimento*, neste caso particular, como sendo qualquer dos subconjuntos do espaço de

resultados, o professor deverá aproveitar a oportunidade para ilustrar, através de exemplos, algumas das propriedades da probabilidade (probabilidade da união, do complementar e da diferença).

No tópico de *probabilidade condicional*, sugere-se que esta noção comece por ser dada de forma intuitiva, recorrendo a exemplos com cadeias de acontecimentos, onde o resultado obtido numa certa fase afecte, de forma conhecida, a probabilidade de ocorrência de acontecimentos decorrentes da fase seguinte (ao retirar bolas de uma urna sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos que saíram nas extracções anteriores). Deve-se pedir aos estudantes que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos aproveitando para lhes propor *esquemas em árvore* como forma de organização da informação disponível. A partir de informação registada numa tabela de contingência, os estudantes deverão ser capazes de calcular correctamente probabilidades condicionais. A definição de probabilidade condicional poderá então ser apresentada começando por representar a informação da tabela num *diagrama de Venn*.

No último tópico deste módulo, “Modelo Normal”, pretende-se que o estudante tome conhecimento de um dos modelos mais importantes, tanto para a modelação de fenómenos aleatórios como para estudos estatísticos de natureza inferencial. Este é um modelo cujo suporte é todo o conjunto dos números reais e deverá ser introduzido recorrendo a um enunciado simplificado do Teorema do Limite Central. Deverão ser referidas as principais características de um modelo Normal ou Gaussiano e o estudante deverá saber calcular probabilidades com base nesta família de modelos, utilizando, quer uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard*, quer a máquina de calcular.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo quatro horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas; as provas são:

Prova I — apresentação oral ou por escrito de um exemplo de uma situação de problemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova.

Prova II — apresentação oral de um trabalho realizado neste módulo, escolhido pelo estudante, e supervisionado pelo professor. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

GRAÇA MARTINS, M. E. (1998) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

GRAÇA MARTINS, M. E., CERVEIRA, A. (1998) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

MENDENHALL, W. BEAVER, R. (1994) – *Introduction to Probability and Statistics*. Duxbury Press.

MOORE, D. (1997) – *Statistics – Concepts and Controversies*. Freeman.

MOORE, D. (1995) – *The Basic Practice of Statistics*, Freeman.

MOORE, D., MCCABE, G. (1993) – *Introduction to The Basic Practice of Statistics*, Freeman.

PARZEN, E. (1969) – *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York. Wiley.

THIESEN, H. (1997) – *Measuring the Real World*. John Wiley & Sons.

INTERNET (*Funcionais em Setembro de 2005*)

PROJECTO ALEA – <http://alea-estp.ine.pt>

Desta página recomenda-se, em especial, o tópico “noções de probabilidade” a que se acede directamente a partir da página inicial.

TEXTO DE APOIO AO TÓPICO “MODELOS DE PROBABILIDADE” DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA AS CIÊNCIAS SOCIAIS (elaborado por Luísa Canto e Castro e Maria Eugénia Graça Martins).

Este texto encontra-se disponível em <http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/>

MÓDULO 26

Modelos Discretos

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

Pretende-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de modelar e resolver situações envolvendo sequências numéricas.

Modelos de crescimento linear ou não linear podem resultar da abordagem de situações realistas.

A folha de cálculo pode ser utilizada como meio de organizar os dados e realizar os cálculos necessários para resolver problemas apresentados, mas também como meio eficaz de estudar os efeitos da alteração de dados iniciais numa sequência de cálculos. O trabalho com a folha de cálculo na procura de soluções e na descoberta dos efeitos desta ou daquela mudança é por si só uma aprendizagem importante para os estudantes dos cursos de Educação e Formação. Os estudantes podem também aprender a gerar termos de uma sequência na modelação ou estudo de situações reais. É aconselhável a visualização dos gráficos correspondentes às situações criadas e geridas a partir de listas de dados na folha de cálculo.

Algumas das situações previstas para utilizar a folha de cálculo podem também ser abordadas usando a calculadora gráfica.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Modelos Discretos, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos discretos;
- a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Modelos Discretos, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados;
- usar uma folha de cálculo para trabalhar numérica e graficamente com sucessões.
- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de progressões aritméticas ou geométricas sejam adequados;
- distinguir crescimento linear de crescimento exponencial;
- investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente;
- resolver problemas simples usando propriedades de progressões aritméticas e de progressões geométricas.

4 | Conteúdos

1. Sucessões

- Motivação: estudo de relações numéricas concretas.
- A sucessão real como função de variável natural
 - Sucessão;
 - Modos de definir uma sucessão;
 - Representação gráfica de uma sucessão;
 - Sucessões monótonas;
 - Sucessões limitadas.
- Progressões aritméticas
 - Expressão de u_n em função de n ;
 - Soma de n termos consecutivos.
- Progressões geométricas
 - Expressão de u_n em função de n ;
 - Soma de n termos consecutivos.
- Comparação entre o crescimento linear e o crescimento exponencial (ou geométrico)
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática
 - Situações problemáticas em que a sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{nb}$ seja um bom modelo;
 - Primeira definição do número e .

2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo discreto mais adequado à descrição da situação.

5 | Orientações metodológicas

Sucessões

As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria - por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências, da economia, etc.

Progressões

As situações apresentadas neste tema podem ser de crescimento linear e introduzir as progressões aritméticas e podem ser de crescimento exponencial e servir de motivo para a abordagem das progressões geométricas. Podem ainda ser apresentadas situações para outros tipos de crescimento.

Os estudantes encontrarão o poder das exponenciais explorando problemas clássicos tais como “os grãos de milho no tabuleiro de xadrez”, “evolução de um capital sofrendo juros simples ou acumulados”, “crescimento de uma população”,.... Outros problemas do tipo de “a geração de coelhos de Fibonacci”, “sequências de números (números triangulares, quadrangulares, ...)” ou equivalentes vão permitir encontrar o conceito de sucessão e as diferentes formas de as definir (incluindo o método recursivo), bem como interessantes representações gráficas.

Os estudantes, perante experiências de modelação de crescimentos, devem compreender e estabelecer as diferenças entre as relações aditivas $a_{n+1} = a_n + r$ e as multiplicativas $a_{n+1} = a_n * r$ e a sua correspondência com as expressões $y = ax + b$ e $y = ab^x$.

O estudante pode ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões.

Os estudantes podem ainda estudar sequências de somas parciais e descobrir que encontram uma função quadrática como fórmula da soma de n termos de uma progressão aritmética e uma função exponencial (abordada de forma totalmente intuitiva) na progressão geométrica.

Os estudantes poderão fazer investigações sobre outras características destas sucessões e mesmo chegar a caracterizar e a usar representações tabelares das primeiras diferenças, segundas diferenças e razões de termos sucessivos relacionando-os com os modelos linear, quadrático e exponencial. Poderão usar estas características para escolher modelos apropriados a situações contextualizadas.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo quatro horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova II — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1998), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.
ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

Os primórdios da História de Matemática

— http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Este vídeo foca algumas noções básicas da Matemática, salientando as contribuições mais marcantes que, ao longo de muitos séculos, levaram ao aparecimento do Cálculo. Além de uma descrição narrativa, utiliza a animação por computador para tratar alguns dos temas, constituindo um instrumento utilíssimo para a didáctica da Matemática.

ALMADA, SÍLVIA – LivroWeb de Análise Matemática

Sucessões — <http://www.mat.uc.pt/~me0203/LivroWebAM/sucessoes.html> —

Esta página contém uma compilação de páginas da Internet úteis para uma introdução ao estudo das sucessões, com particular atenção às noções de sucessão convergente, divergente, limitada e monótona.

KNOTT, RON – *Fibonacci Numbers and Nature*

— <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html> —

Uma página completíssima sobre as principais aplicações dos números de Fibonacci (coelhos, abelhas, espirais, flores, etc.). Inclui também sugestões de investigações.

BIGODE, ANTONIO JOSÉ LOPES – *Números figurados*

http://www.matematicahoje.com.br/telas/Autor/artigos/artigos_publicados.asp?aux=NFigurados

Uma proposta de exploração educativa dos números figurados.

ESCOLA SECUNDÁRIA DE DONA LUÍSA DE GUSMÃO, LISBOA - *Sucessões: Curva de Van Koch, Tapete de Sierpinski, Supercubo*

http://www.esec-luisa-gusmao.rcts.pt/departamentos/departamento_matematica/fractais.htm

Esta página contém algumas actividades interessantes para usar na sala de aula (acompanhadas de exemplos de resolução).

CAPELA XADREZ CLUBE – *As origens do xadrez*

<http://www.clubedexadrez.com.br/portal/capelaxadrezclube/origens.htm>

Uma página onde se conta a lenda do Rajá que riu da modéstia de um brâmane e recebeu uma valente lição.

MÓDULO 27

Funções de Crescimento

Duração de Referência: 24 horas

1 | Apresentação

Pretende-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de modelar e resolver situações envolvendo modelos contínuos não lineares: a exponencial, a logarítmica e a logística. Modelos de crescimento não linear podem resultar da abordagem de situações realistas.

Em muitos problemas as variáveis tomam valores que pertencem a modelos não lineares. De entre os modelos não lineares, são importantes e interessantes as exponenciais da forma $y = a(b^x)$.

Tarefas como “*EliM&Minação*” (brochura F12, pág 98) ou experimentais do tipo de “*o arrefecimento de água numa chávena*” com sensores de temperatura e uma calculadora gráfica ou um computador, permitem não só aos estudantes ajustar funções que não são de quaisquer dos tipos anteriormente estudados, mas também sugerir-lhes prolongamentos do estudo que possam ter feito das progressões geométricas.

Os modelos exponenciais podem ser introduzidos para resolver problemas de evolução de populações, poluição, temperaturas, drogas no sangue, materiais radioactivos, etc., alguns deles já abordados a um certo nível quando da abordagem das progressões geométricas.

A folha de cálculo pode ser utilizada como meio de organizar os dados e realizar os cálculos necessários para resolver problemas apresentados, mas também como meio eficaz de estudar os efeitos da alteração de dados iniciais numa sequência de cálculos. O trabalho com a folha de cálculo na procura de soluções e na descoberta dos efeitos desta ou daquela mudança é, por si só, uma aprendizagem importante para os estudantes dos cursos de Educação e Formação. Os estudantes podem também aprender a gerar termos de uma sequência na modelação ou estudo de situações reais. É aconselhável a visualização dos gráficos correspondentes às situações criadas e geridas a partir de listas de dados na folha de cálculo.

Algumas das situações previstas para utilizar a folha de cálculo podem também ser abordadas usando a calculadora gráfica.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções de Crescimento, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos de crescimento não linear;
- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;

- a aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como, para realizar procedimentos algébricos;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidadoso os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem situações de crescimento não linear;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções de Crescimento, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos exponenciais sejam bons modelos quer para o observado, quer para o esperado;
- usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e prever a forma do seu gráfico;
- descrever as regularidades e diferenças entre padrões lineares, quadráticos, exponenciais, logarítmicos e logísticos;
- obter formas equivalentes de expressões exponenciais;
- definir o número e (segunda definição) e logaritmo natural;
- resolver equações simples usando exponenciais e logaritmos (no contexto da resolução de problemas);
- resolver, pelo método gráfico, inequações simples usando as funções exponenciais, logarítmicas e logísticas (no contexto da resolução de problemas);
- resolver problemas simples e de aplicação usando diferentes modelos de funções de crescimento.

4 | Conteúdos

1. Funções de Crescimento

- Motivação: estudo de situações reais de outras áreas científicas.
- Função exponencial de base superior a um
 - Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por $f : x \mapsto a^x, a > 1$;
 - Regras operatórias das funções exponenciais;
 - Crescimento exponencial.
- Função logarítmica de base $a(a > 1)$. Logaritmo de um número.
 - Logaritmo de um número;
 - Função logarítmica;
 - Regras operatórias de logaritmos;
 - Comparação de crescimento de funções.
- Função logística
 - Propriedades da função logística $f : x \mapsto \frac{a}{b + ce^{kx}}, k < 0$;

- Comparação de crescimento de funções.
 - Resolução de equações e inequações no contexto de resolução de problemas.
2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

As funções de crescimento aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das funções pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução e o trabalho das funções de crescimento e das suas propriedades podem ser feitos propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da Biologia - por exemplo, crescimento de uma dada população, da Química – a desintegração radioactiva, da propagação de ruídos (boatos), de manchas de poluição, do desenvolvimento florestal, etc.

Os estudantes podem reconhecer o logaritmo como solução de equações exponenciais e a função logarítmica como inversa da exponencial.

Problemas como “*A construção da barragem*” (Brochura Funções 12, pág.133) permitirão que o estudante reencontre o conceito de limite ou de assíntota.

Tarefas como “*Sismos na Internet*” (Brochura Funções 12, pág.137) permitirão que o estudante reconheça propriedades dos logaritmos e estude, aplicada a esta função, a taxa de variação num ponto.

As tarefas do tipo “*Matemática e Música*” (Brochura Funções 12, pág.84-96 e pág. 140-145) em que o estudante, usando sensores de som e calculadoras ou computadores, determina as frequências de notas de uma escala musical e investiga relações e diferenças entre essas notas, permitem discussões muito ricas na sala de aula.

Finalmente, uma tarefa do tipo da “*Evolução da população portuguesa*” (Brochura Funções 12, pág.110) permite encontrar a função logística que é modelo de variados fenómenos reconhecíveis em aplicações a estudos feitos em outras disciplinas.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve

acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1999). *Funções: Matemática 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.
ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*
CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*
<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos
Os primórdios da História de Matemática
— http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/ —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes. Este vídeo foca algumas noções básicas da Matemática, salientando as contribuições mais marcantes que, ao longo de muitos séculos, levaram ao aparecimento do Cálculo. Além de uma descrição narrativa, utiliza a animação por computador para tratar alguns dos temas, constituindo um instrumento utilíssimo para a didáctica da Matemática.

MÓDULO 28

Optimização

Duração de Referência: **24 horas**

1 | Apresentação

Em módulos anteriores, os estudantes resolveram problemas de optimização, estimando ou mesmo calculando extremos de funções, sobre os gráficos e as tabelas das funções. Tomaram contacto com a taxa média de variação e com a taxa de variação instantânea, interpretando geometricamente estes conceitos.

Os estudantes apercebem-se da relação entre o sinal da taxa de variação num intervalo e a monotonia da função nesse intervalo. Os exemplos da exponencial e da logarítmica serviram para confirmar essa intuição reforçada pela repetição de exemplos de comportamento dos gráficos de funções diversas.

Pretende-se que, para além disso, os estudantes possam abordar outras formas de optimização, entre as quais assume especial importância a programação linear.

Situações realistas simples com constrangimentos de produção ou outros que podem ser modelados por inequações lineares servem para delimitar um polígono convexo que dá informação completa sobre as quantidades possíveis para cada produto.

A matemática mobilizada é simples e acessível e as representações gráficas apuradas (domínios planos) e tabelas são bons instrumentos que ajudam a interpretar a situação, as condições impostas a uma produção ou uma cadeia de produção, armazenamento, distribuição, etc.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Optimização, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções já estudadas;
- aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;

- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Optimização, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções;
- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e as respectivas taxas de variação;
- reconhecer numericamente e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função;
- reconhecer a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função;
- resolver problemas de aplicações simples envolvendo a determinação de extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas;
- reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático;
- resolver numericamente e graficamente problemas simples de programação linear;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações.

4 | Conteúdos

1. Resolução de problemas envolvendo taxas de variação e extremos de funções de famílias já estudadas, com recurso à calculadora gráfica:
 - Taxa de variação média num intervalo;
 - Taxa de variação num ponto;
 - Sinais das taxas de variação e monotonia da função;
 - Zeros da taxa de variação e extremos da função.
2. Resolução de problemas de programação linear.

5 | Orientações metodológicas

1. Um problema como aquele em que se atira uma pedra ao ar e a altura em função do tempo é dada por uma quadrática permite aos estudantes determinar a taxa de variação num instante qualquer, t_0 e representar no mesmo referencial a função dada e a função dos "declives das rectas tangentes" num intervalo do domínio da função. Uma situação problemática como esta poderá ter sido já estudada, mas pode agora ser aprofundada a sua análise, investigando a relação entre a forma do gráfico e os sinais dos declives das rectas tangentes.

Este tipo de exploração pode ser levado até à análise dos extremos. Por exemplo, traçando a parábola e a recta derivada eles confirmarão que para os valores de t em que a segunda é negativa a primeira decresce, bem como para aqueles em que a segunda é positiva a primeira cresce e que no zero da afim encontrarão o extremo da quadrática. Problemas do tipo da determinação do volume máximo de uma caixa feita a partir de uma folha de papel, ou outros semelhantes, constituem oportunidades análogas.

O mesmo tipo de explorações aparece no contexto de situações problemáticas simples, como aquela em que um volume de um sólido é dado por uma cúbica. Editando na calculadora

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{y_1(x + 0,0000001) - y_1(x)}{0,0000001}$$

a cúbica e a função dos declives das rectas secantes para todo o x quando a amplitude do intervalo é $h=0,0000001$. [Considera-se esta abordagem preferível ao recurso da derivação numérica da calculadora por manter presente o conceito de taxa de variação e permitir comparar os dois gráficos, estudar a influência do valor de h e procurar o extremo da primeira função através da mudança de sinal e zero da segunda. Recomenda-se a consulta das páginas 48 a 53 da Brochura “Funções: Matemática – 11º ano de escolaridade”, sobre o tema da “derivação numérica”].

Este modo de proceder pode ser adoptado no estudo da monotonia das funções exponenciais e logarítmicas. Com este método, os estudantes podem até compreender que a taxa de variação instantânea de uma função exponencial é proporcional ao valor da função no ponto considerado e interpretar isto como um crescimento relativo constante.

2. Os problemas de programação linear a colocar apresentam os constrangimentos característicos de cada situação de produção e um objectivo (máximo ou mínimo de uma função objectivo) a ser alcançado com o maior êxito nas condições existentes.

Pretende-se familiarizar os estudantes com situações de gestão e desenvolver competências para tomar decisões boas em termos de planeamento (da produção, por exemplo) que podem ter a ver com maximizar lucros, minimizar custos ou consumos, etc.

Na aula de Matemática poderão tratar-se problemas simples com características idênticas. Assim, cada exemplo, tratará de maximizar ou minimizar uma determinada quantidade (função objectivo) tendo-se em conta certas limitações ou constrangimentos.

Se houver tempo, os estudantes podem mesmo ser colocados perante a necessidade de tomar decisões de novos investimentos que alterem as condições de fabrico (o polígono dos constrangimentos) de modo a responder a novos desafios ou a obter melhorias, com vantagem sobre o peso dos investimentos, nos máximos ou mínimos da função objectivo. No fundo, trata-se de colocar aos estudantes situações de trabalho em que seja marcante a utilidade do planeamento e benéfica a colaboração da matemática para tomar boas decisões em empresas ou colectivos de trabalhadores.

6 | Sugestões de avaliação

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados de situações reais da actividade industrial, comercial ou de serviços;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

7 | Bibliografia / Outros Recursos

- TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.
- TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.
- LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1999). *Geometria: Matemática —12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Estas brochuras, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

- CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

- HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

- TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

- BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.
- ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*
- CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*
<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

- CARREIRA, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Este estudo tem por fundamento a problemática da introdução de aplicações e modelação no ensino da matemática, encarando a utilização do computador como uma ferramenta de trabalho na realização de actividades de construção e exploração de modelos matemáticos.

OLANO, JAVIER PÉREZ - *Matemáticas-Programación Lineal*

— <http://sauce.cnice.mecd.es/~jpeo0002/Partes/apuntes.html> —

Esta página contém alguns textos de apoio a temas do ensino secundário de Espanha, entre as quais uma propostas de trabalho para programação linear.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-78). *Compêndio de Matemática* (5vols) Lisboa: MEC — GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC — GEP.

Sebastião e Silva foi provavelmente o primeiro em Portugal a incluir num livro de texto para o ensino secundário o tema da Programação Linear.

PINTO, JOAQUIM - “*Programação Linear [no Ensino Secundário]*”

http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/vitae/textos/04_ProgLinear_JPinto.pdf

Este texto contém referências históricas à programação linear, explora um exemplo simples de programação linear proposto por Sebastião e Silva e tem uma introdução ao método do simplex.

Índice Geral

Parte I- Orgânica Geral

	Página
1. Caracterização da Disciplina	2
2. Visão Geral do Programa	3
3. Competências a Desenvolver.	6
4. Orientações Metodológicas / Avaliação	8
5. Elenco Modular	11
6. Bibliografia Geral	12

Parte II- Módulos

Módulo 1	A matemática no cotidiano	18
Módulo 2	Números inteiros e operações: algoritmos e cálculo mental	22
Módulo 3	Dos sólidos às figuras planas: perímetro, área e volume	26
Módulo 4	Dos inteiros aos racionais	30
Módulo 5	Padrões e Álgebra	34
Módulo 6	Tratamento da Informação	39
Módulo 7	Oficina	44
Módulo 8	Geometria intuitiva	47
Módulo 9	Das equações aos números	52

Parte II- Módulos (cont.)

	Página
Módulo 10 Do plano ao espaço	55
Módulo 11 Estatística e probabilidades	59
Módulo 12 Funções e gráficos	62
Módulo 13 Triângulo rectângulo	66
Módulo 14 Geometria do círculo	69
Módulo 15 Aproximações e inequações	72
Módulo 16 Geometria prática	75
Módulo 17 Problemas numéricos	78
Módulo 18 Geometria	81
Módulo 19 Padrões geométricos	85
Módulo 20 Estatística	89
Módulo 21 Funções polinomiais	93
Módulo 22 Funções periódicas e não periódicas	97
Módulo 23 Taxa de variação	102
Módulo 24 Estatística computacional	106
Módulo 25 Probabilidade	110
Módulo 26 Modelos discretos	114
Módulo 27 Funções de crescimento	119
Módulo 28 Optimização	123