Probabilidade

Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano - 3.º ciclo

Setembro de 2011

Autores: Professores das turmas piloto do 9º ano de escolaridade

Ano Lectivo 2010 / 2011

Índice

Introdução

Tópicos:

- **Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória**
- **Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento**

No 3º ciclo pretende-se essencialmente desenvolver a compreensão da noção de probabilidade e a capacidade de resolver problemas e de comunicar em contextos estatísticos e probabilísticos.

Na sequência de tarefas que propomos, começamos por discutir a diferença entre experiência aleatória e experiência determinista. A noção de aleatório já foi introduzida no 8ºano quando em Organização e tratamento de dados se planeou um estudo e se recorreu à escolha de uma amostra aleatória. Contudo é importante abordá-la de novo, numa perspectiva mais alargada, para que a noção de probabilidade fique clara para os alunos.

São propostas 7 tarefas mas só na tarefa 5 introduzimos a regra de Laplace. No cálculo da probabilidade de um acontecimento valoriza-se a probabilidade experimental (ou frequencista). O cálculo da probabilidade aplicando a regra de Laplace só se aplica em situações muito especiais, em que existe simetria isto é em que todos acontecimentos elementares são equiprováveis. O programa refere que a regra de Laplace deve-se ser utilizada para calcular a probabilidade de um acontecimento em situações simples. As situações mais complexas devem ser trabalhadas com recurso à tecnologia.

No final das tarefas apresentamos um conjunto diversificados de exercícios e problemas que devem ser utilizados em conjunto com qualquer uma das 7 tarefas. O professor deve recorrer a estes ou outros problemas, nomeadamente dos manuais ainda em uso, para complementar o trabalho de consolidação deste tema.

A brochura de Organização e tratamento de dados(*), já colocada no site da DGIDC, foi o principal recurso que utilizámos para a planificação deste tema.

(*) Martins, M. Eugénia Graça; Ponte, João Pedro. (Junho 2010). *Organização e tratamento de Dados*. Lisboa: DGIDC.)

Proposta de planificação

Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos	
7	**Probabilidade** • Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória • Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento	✓ Identificar e dar exemplos de fenómenos aleatórios e deterministas, usando o vocabulário adequado. ✓ Identificar e determinar todos os resultados possíveis quando se realiza determinada experiência aleatória. ✓ Compreender a noção de probabilidade de um acontecimento e que a sua medida se situa entre 0 e 1. ✓ Calcular a probabilidade de um acontecimento pela regra de Laplace. ✓ Compreender e usar a frequência relativa para estimar a probabilidade.	Os alunos devem: - Recorrer, quando conveniente, a diagramas em árvore para identificação dos resultados possíveis e para contagens. - Compreender que ao atribuir um valor à probabilidade de um acontecimento, se está a exprimir o grau de convicção na sua ocorrência. Entre outras formas, pode quantificar-se esse valor recorrendo à regra de Laplace ou utilizando o conceito frequencista. - Saber que a regra de Laplace só é aplicável quando se pode admitir simetria (isto é, todos os resultados são igualmente possíveis).	**Tarefa 0 –** Visionamento de um vídeo: Homens e dados		**Mais problemas…**
				Tarefa 1 Aleatória ou determinista?	Papel e lápis	
				Tarefa 2 Probabilidade e frequência relativa	Computador com ligação à internet e texto: *Cara ou Coroa? Cara se for euro ….*	
				Tarefa 3 O mais provável	Papel, lápis	
				Tarefa 4 Espaço de resultados	Papel, lápis	
				Tarefa 5 Regra de Laplace	Papel, lápis e calculadora.	

Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos	
	Probabilidade ● Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento	✓ Identificar acontecimentos complementares e compreender que a soma das suas probabilidades é 1. ✓ Identificar acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos e compreender que a probabilidade da sua união é igual à soma das suas probabilidades. ✓ Resolver e formular problemas envolvendo a noção de probabilidade.	Os alunos devem: - Compreender que quanto maior for o número de vezes que a experiência é repetida, melhor será a estimativa obtida para a probabilidade. - Saber que a probabilidade pode ser escrita na forma de fracção, decimal ou percentagem.	**Tarefa 6** Acontecimentos complementares, diagrama de Venn	Papel e lápis.	**Mais problemas…**
				Tarefa 7 Diagrama em árvore, listagem ou tabela de dupla entrada	Papel e lápis.	

Tarefa 0 – Visionamento do vídeo: Dados e Homens

Este vídeo tem a duração de 9:48 minutos e pode ser visto a partir do site abaixo indicado.
É uma banda desenhada canadiana, com legendas em português, e que de uma forma muito interessante explica a área de estudo das Probabilidades.

http://www.youtube.com/watch?v=tJz8sKHHisI

Tarefa 1 – Aleatória ou determinista?

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos apreendam a diferença entre experiência aleatória e experiência determinista.
- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:

  Noção de fenómeno aleatório e de experiência aleatória
- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: argumentação.
  Comunicação matemática: interpretação e discussão.
- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Noção de situação aleatória.
  Utilização adequada dos termos impossível, possível, certo, provável e igualmente provável.e improvável
- Aprendizagens visadas:

  Identificar e dar exemplos de experiências aleatórias e deterministas, utilizando vocabulário adequado.
- Cadeia: 1ª tarefa da sequência “ Probabilidades – 9º ano”.
- Duração prevista: 45 minutos.
- Notas para o professor:

  Os conceitos envolvidos nesta tarefa podem já ter sido trabalhados em anos anteriores e para a generalidade dos alunos são de rápida aquisição. O programa faz referência às noções de fenómeno aleatório e de experiência aleatória (realização do fenómeno aleatório) e refere a utilização da linguagem adequada. Nesta tarefa definimos experiência aleatória contudo é importante que na discussão com os alunos se clarifique a diferença entre a noção de fenómeno e de experiência aleatória (ver pág. 157 e seguintes da brochura de Martins, M. Eugénia Graça; Ponte, João Pedro. (Junho 2010). *Organização e tratamento de Dados*. Lisboa: DGIDC.)
  A resolução desta tarefa deve ser realizada em grande grupo, em discussão aberta. É importante que na discussão os alunos consigam dar novos exemplos.
- Palavras chave: fenómeno e experiência aleatória e fenómeno e experiência determinista; acontecimento impossível, pouco provável, muito provável e certo.

Tarefa 1 – Aleatória ou determinista?

1. Analisa cada uma das situações e responde às questões colocadas. Classifica as as experiências **seguintes** em deterministas **ou** aleatórias.

Uma experiência **determinista** é aquela em que antecipadamente se conhece o resultado.

Dizemos que uma experiência é **aleatória** se
i) conhecemos todos os seus possíveis resultados.
ii) cada vez que é efectuada não se conhece antecipadamente qual dos resultados possíveis vai ocorrer.
iii) pode ser repetida em condições análogas.

1.1. Lançar 10 vezes uma moeda e registar a face que fica virada para cima.

1.2. De uma caixa com 20 bolas brancas e duas bolas pretas, retiraram-se, sem olhar, duas bolas. Registar a cor das bolas retiradas.

1.3. Aquecer água acima dos 100º e registar o que acontece.

1.4. Deitar uma moeda num copo de água e verificar o que acontece.

1.5. Tirar duas cartas, à sorte, de um baralho de 52 cartas que foi previamente baralhado e registar as cartas saída.

2. Uma experiências aleatória - Lenda Nórdica

Para resolver a quem deveria pertencer uma cidade, os reis da Suécia e da Noruega decidiram jogá-la aos dados. Utilizaram dois dados e quem tirasse a maior soma ganharia a vassalagem dessa cidade.
O rei da Suécia foi o primeiro a lançá-los e tirou o máximo, o duplo seis. Parecia que tudo estava decidido, pois seria muito difícil ao rei da Noruega repetir essa proeza.
Mas os deuses estavam do lado do rei da Noruega. Lançou os dados e tirou o duplo seis.
Era novamente a vez do rei da Suécia lançar os dados para o desempate. Ninguém acreditaria que ele voltaria a repetir o feito de tirar o duplo seis. Mas tirou, e a sorte parecia estar finalmente decidida.
O rei da Noruega pega então nos dados, lança-os e, para espanto de todos, um dos dados parte-se mostrando um três e um quatro. No segundo dado sai um seis. O rei da Noruega tinha obtido o treze, façanha impossível de obter com dois dados inteiros.
E assim se decidiu aos dados a sorte daquela cidade.

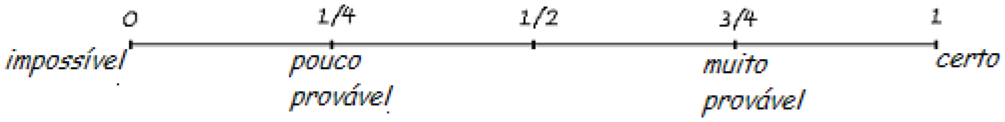
2.1. No texto lê-se: "Lançou os dados e tirou o duplo seis." **Enumera** as hipóteses possíveis que cada um dos reis tinha ao fazer o lançamento dos dados.

2.2. No texto é referida uma "façanha impossível". Explica-a e apresenta as hipóteses que teriam sido possíveis.

2.3. Imagina que o rei da Noruega tinha obtido o duplo 4. Seria mais provável o rei da Suécia igualar este resultado ou tirar duplo 6? Porquê?

2.4. Seria mais provável o Rei da Suécia obter o duplo 4 ou obter a soma 8? Justifica a tua resposta.

3. Classifica em **impossível**, **pouco provável**, **muito provável** e **certo** os seguintes acontecimentos:



3.1. lançar um dado cúbico equilibrado e sair um número múltiplo de 7.

3.2. o sol nascer amanhã;

3.3. retirar uma carta, ao acaso, de um baralho com 52 cartas e sair um Rei;

3.4. lançar um dado cúbico equilibrado e sair um número par ou múltiplo de 3.

Tarefa 2 – Probabilidade e frequência relativa

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos compreendam a noção frequencista de probabilidade.
- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:

  Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento
- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: indução.
  Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão.
- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Noção de frequência relativa, cálculo da frequência relativa e experiência aleatória.
- Aprendizagens visadas:

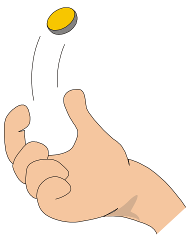
  Compreender e usar a frequência relativa para estimar a probabilidade; noção de probabilidade empírica (ou frequencista).
- Cadeia: 2ª tarefa da sequência “ Probabilidades – 9º ano”.
- Recursos: Computador com ligação à internet e texto “Cara ou Coroa? Cara se for euro ….”
- Duração prevista: 45 minutos
- Notas para o professor:

  É fundamental que os alunos compreendam que quanto maior for o número de vezes que uma experiência é repetida, melhor é a estimativa da probabilidade do acontecimento associado a essa experiência. A utilização de vários recursos, nomeadamente de tecnologia, enriquece a experiência matemática dos alunos.

Palavras chave: probabilidade, frequência relativa e probabilidade empírica (ou frequencista).

Tarefa 2 – Probabilidade e frequência relativa

1. Recorre ao sítio do ALEA http://www.alea.pt/html/probabil/html/cap_02/html/cap2_1_2.html para realizares uma experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado.
Observa a frequência relativa da saída de cada face à medida que aumentas o número de lançamentos.
O que acontece à medida que o número de lançamentos aumenta?



2. Imagina que tens na mão uma moeda de um euro.

2.1. Se lançares a moeda ao ar, achas que vai sair face nacional ou face Euro? Porquê?

2.2. Lança uma moeda de um Euro 50 vezes e regista o resultado da tua experiência anterior numa tabela de frequência **como a da figura.**

Face virada para cima	Nº de vezes	Frequência relativa	Frequência relativa (%)
Euro			
Nacional			

2.3. Desenha o gráfico de barras correspondente.

2.4. Será que podemos afirmar que as moedas são equilibradas? Justifica a tua resposta.

2.5. Lê o artigo publicado no jornal Público em 10 de Março de 2002 e responde as questões que se seguem (ver texto em anexo- página 30).

2.5.1. Qual a nacionalidade da moeda que utilizaste na experiência?

2.5.2. Compara os resultados obtidos no teu grupo com os obtidos nos outros grupos. Parece-te que se confirmam as dúvidas levantadas no artigo? Explica a tua resposta.

2.5.3. Que ideia importante para a determinação da probabilidade de um fenómeno traduz a frase "… com uma amostra de apenas 250 (lançamentos) ……. (5º parágrafo a contar do final do texto)?

2.5.4. Como classificarias a validade da experiência que realizaste com a moeda de um euro?

Probabilidade empírica (ou frequencista) - A *probabilidade* de um determinado acontecimento aleatório é a percentagem de vezes que se espera que ele aconteça, se se repetir a experiência, um grande número de vezes, nas mesmas condições.

Tarefa 3 – O que é mais provável?

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos consolidem a noção frequencista de probabilidade.
- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:

  Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento

- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: trabalho com a definição de probabilidade frequencista.
  Comunicação matemática: interpretação e discussão.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Noção de probabilidade frequencista.

- Aprendizagens visadas:

  Consolidação da noção de probabilidade frequencista.

- Cadeia: 2ª tarefa da sequência “ Probabilidades – 9º ano”.
- Duração prevista: 90 minutos.
- Notas para o professor:

  Esta é uma tarefa de consolidação.
  O texto da tarefa foi adaptado de Martins, M. Eugénia Graça; Ponte, João Pedro. (Junho 2010). *Organização e tratamento de Dados*. Lisboa: DGIDC. Ver página 169 e seguintes.

- Palavras chave: frequência relativa e probabilidade frequencista.

Tarefa 3 – O que é mais provável?

Numa turma com 24 alunos, 16 são raparigas e 8 são rapazes. Dos 24 alunos, metade têm olhos castanhos e a outra metade, olhos de outra cor. Também se sabe que 8 dos alunos (rapazes ou raparigas) são louros. O professor, todos os dias selecciona ao acaso, o nome de um aluno para que vá ao quadro resolver um problema.

1. Na próxima ida ao quadro:
1.1. É mais provável que seja seleccionado um rapaz ou uma rapariga?
1.2. É mais provável que o aluno tenha olhos castanhos ou de outra cor?
1.3. É mais provável que o aluno seja louro ou não seja louro?

2. Durante 30 aulas consecutivas o delegado de turma decidiu registar numa folha o tipo de aluno seleccionado (sempre seleccionando ao acaso). Representou por um 1 sempre que se verificava o acontecimento e por 0 quando não se verificava. Por exemplo, sempre que era seleccionada uma rapariga colocava um 1 na coluna “Rapariga”. Caso contrário, quando era seleccionado um rapaz, escrevia um 0.

Foram obtidos os seguintes registos:

Dia	Rapariga	Olhos castanhos	Louro
1	0	0	0
2	1	1	1
3	0	0	0
4	1	1	1
5	1	1	1
6	0	0	0
7	1	1	1
8	1	1	0
9	0	0	0
10	1	1	0
11	0	0	0
12	0	0	0
13	1	1	1
14	1	0	0
15	0	0	0
16	1	1	1
17	1	1	0
18	1	0	0
19	1	1	1
20	1	1	1
21	1	1	1
22	1	1	1
23	1	1	1
24	1	0	0
25	1	1	0
26	0	0	0
27	0	0	0
28	0	0	0
29	1	0	0
30	1	1	1
Total	**20**	**16**	**12**
Freq. Rel.	**20/30≈ 67%**	**16/30≈53%**	**12/30=40%**

Tendo em conta os registos efectuados, responde às questões seguintes:

2.1. Indica o sexo, a cor dos olhos e a cor do cabelo do aluno que foi ao quadro no 1.º dia em que começaram a fazer os registos.
2.2. Qual é a estimativa da probabilidade de cada um dos seguintes acontecimentos?
2.2.1. ser seleccionada uma rapariga?
2.2.2. ser seleccionado um rapaz?

2.2.3. ser seleccionado um aluno de olhos castanhos?
2.2.4. ser seleccionado um aluno louro?
2.2.5. ser seleccionada uma rapariga de olhos castanhos e loura?

2.3. Indica o que se espera que seja o sexo, a cor dos olhos e a cor do cabelo do próximo aluno a ser chamado ao quadro.

2.4. Qual é a estimativa da probabilidade de cada um dos seguintes acontecimentos?
2.4.1. O próximo aluno a ser chamado ser "rapaz de olhos castanhos e não louro".
2.4.2. O próximo aluno a ser chamado ser uma "rapariga loura".
2.4.3. O próximo aluno a ser chamado ser "rapaz de olhos não castanhos e não louro".

Tarefa 4 - Espaço de resultados

- Esta tarefa introduz o conceito de acontecimento e de espaço de resultados. Analisam-se situações que envolvem os vários tipos de acontecimentos.
- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:
  Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento
- Capacidades transversais:

  Resolução de problemas
  Comunicação matemática: interpretação e discussão.
- Conhecimentos prévios dos alunos:

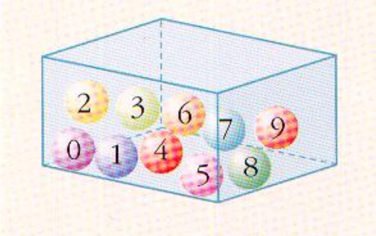
  Experiência aleatória
- Aprendizagens visadas:

  Conceito de acontecimento e de espaço de resultados, classificação de acontecimentos (elementares, não elementares, certos, impossíveis, possíveis mas não certos)
- Cadeia: 4ª tarefa da sequência " Probabilidades – 9º ano".
- Duração prevista: 45 minutos
- Notas para o professor:

Nesta tarefa, os exemplos utilizados contemplam extracções com e sem reposição. É importante que os alunos se deparem com formas diferentes de organização dos dados, neste caso para construir o espaço de resultados. Deve chamar-se a atenção dos alunos das várias formas de apresentar o espaço de resultados, nomeadamente da necessidade de terem consciência se os acontecimentos indicados são ou não equiprováveis. Este é um aspecto fundamental quando se trabalha com a regra de Laplace que é introduzida na tarefa 5.

- Palavras chave: Acontecimento e espaço de resultados; acontecimentos elementares, não elementares, certos, impossíveis, possíveis mas não certos.

Tarefa 4 - Espaço de resultados



1. Numa caixa estão 10 bolas numeradas de zero a nove. Realiza-se uma experiência que consiste na extracção de uma bola da caixa, anota-se o número e volta-se a colocar a bola na caixa (**extracção com reposição**).

1.1. Identifica todos os resultados possíveis (**espaço de resultados ou espaço amostral**)

1.2. Identifica os acontecimentos associados à extracção:

1.2.1. A: de um número primo;

1.2.2. B: de um número maior do que 8;

1.2.3. C: de um número negativo;

1.2.4. D: do número 12;

1.2.5. E: de um número menor do que 12.

1.3. Classifica os **acontecimentos** anteriores em **elementares**, não elementares, certos, impossíveis, possíveis mas não certos.

Acontecimento – É um resultado ou um conjunto de resultados do espaço de resultados. Quando os acontecimentos são constituídos por um único resultado, dizem-se acontecimentos elementares.

2. Imagina que vais extrair aleatoriamente 2 berlindes de um saco com 3 berlindes vermelhos e 2 azuis.

2.1. Se a extracção for feita repondo os berlindes no saco, que espaço de resultados se associa a esta experiência?

2.2. Se a extracção for feita sem reposição dos berlindes no saco, que espaço de resultados se associa à experiência?

3. Imagina que vais extrair aleatoriamente 3 berlindes de um saco com 3 berlindes vermelhos e 2 azuis.

3.1. Se a extracção for feita repondo os berlindes no saco, que espaço de resultados se associa a esta experiência?

3.2. Se a extracção for feita sem reposição dos berlindes no saco, que espaço de resultados se associa à experiência?

Tarefa 5 – Regra de Laplace

Nesta tarefa introduz-se o cálculo de probabilidade segundo Laplace que se aplica em situações muito particulares, nomeadamente no caso dos jogos de azar.

- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:
  Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento
- Capacidades transversais:

  Resolução de problemas
  Comunicação matemática: interpretação e discussão.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Conceito de probabilidade frequencista

- Aprendizagens visadas:

  Conceito de acontecimento e espaço de resultados

- Cadeia: 5ª tarefa da sequência “ Probabilidades – 9º ano”.
- Recursos: calculadora
- Duração prevista: 90 minutos.
- Notas para o professor:

  Só nesta tarefa se introduz o cálculo de probabilidade segundo Laplace. É muito importante que os alunos percebam que só podem utilizar esta regra em situações de simetria (todos os resultados são igualmente possíveis). Em todas as outras situações utiliza-se o conceito frequencista de probabilidade. É fundamental a construção do espaço de resultados em que todos os acontecimentos têm igual probabilidade.

- Palavras chave: Regra de Laplace; casos favoráveis e casos possíveis; acontecimentos equiprováveis

Tarefa 5 – Regra de Laplace

Regra de Laplace - Se todos os resultados de um espaço de resultados são igualmente possíveis **a probabilidade** de um acontecimento associado a esse espaço de resultados é igual à razão entre o número de **casos favoráveis** (resultados correspondentes ao acontecimento) e o número de **casos possíveis** (elementos do espaço de resultados).

$$\text{Probabilidade de um acontecimento} = \frac{\textit{n.º de casos favoráveis}}{\textit{n.º de casos possíveis}}$$

A probabilidade pode ser escrita na forma de fracção, na forma decimal ou na forma de percentagem.

1. Lançou-se um dado equilibrado com a forma de um dodecaedro (poliedro regular com doze faces iguais) com as faces numeradas de 1 a 12.

1.1. Calcula a probabilidade de sair:
1.1.1. um número par;
1.1.2. um número maior do que 4;
1.1.3. um múltiplo de 6;
1.1.4. o número 13;
1.1.5. um número menor do que 15.

1.2. Diz, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
1.2.1. Os acontecimentos "sair face 3" e "sair face 6" são igualmente prováveis (equiprováveis);
1.2.2. Sair um número primo é tão provável como sair um número ímpar.

2. Calcula a probabilidade de ao extrair, ao acaso, uma carta de um baralho de 40 cartas (10 cartas de cada naipe), sair:

2.1. uma carta de copas;

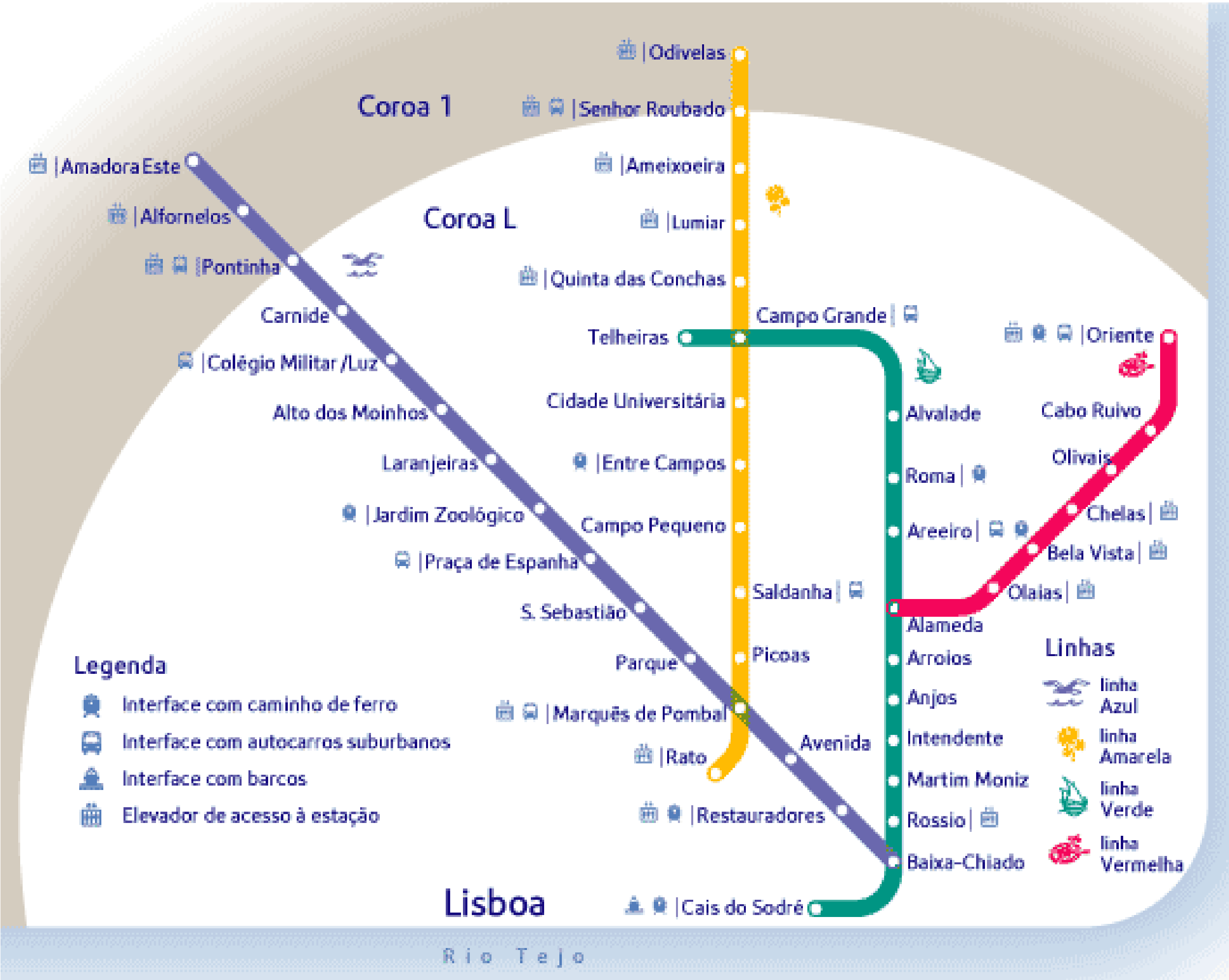
2.2. um rei;

2.3. uma carta preta.

3. Sobre o lançamento de um dado cúbico equilibrado escreve acontecimentos que tenham probabilidade:

3.1. 50% **3.2.** $\frac{1}{3}$ **3.3.** $\frac{2}{3}$ **3.4.** $\frac{1}{6}$ **3.5.** $\frac{5}{6}$ **3.6.** 1 **3.7.** 0%

4. Ricky é um jovem holandês que, sempre que vai a uma cidade com metropolitano, gosta de visitar e fotografar todas as estações. Normalmente escolhe de modo aleatório a estação onde começa a sua viagem. Ricky visitou a cidade de Lisboa no mês passado.



Em Lisboa, a rede de metropolitano é constituída por quatro linhas, com um total de 44 estações, como mostra a figura. Ricky procedeu como de costume e escolheu aleatoriamente a primeira estação a visitar.

4.1. Qual é a probabilidade de Ricky ter começado a sua viagem numa estação:

4.1.1. da linha amarela, ou seja, a linha em que Odivelas é uma estação terminal?
4.1.2. que permita trocar de linha?
4.1.3. que não seja da linha vermelha, isto é, da linha em que o Oriente é uma estação terminal?

4.2. De entre as opções que se seguem, escolhe aquela que completa a frase correctamente.

É muito provável que o Ricky tenha começado a viagem ...

(A) numa estação da coroa 1.
(B) numa estação da linha Alameda/Oriente.
(C) numa estação de interface com barcos.
(D) numa estação da coroa L.

Justifica a tua opção. **(GAVE, 1001 Itens)**

5. Num banco trabalham 600 funcionários, alguns dos quais têm filhos, outros não, distribuídos de acordo com a tabela abaixo.

	Homens	Mulheres
Tem filhos	220	260
Não tem filhos	90	30

Se escolhermos um funcionário do banco ao acaso, indica a probabilidade desse funcionário:

5.1. ser mulher;

5.2. ser homem;

5.3. não ter filhos;

5.4. ser homem e ter filhos.

Tarefa 6 – Acontecimentos complementares, diagrama de Venn

- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:

  Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento

- Capacidades transversais:

  Resolução de problemas
  Comunicação matemática: interpretação e discussão.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

- Aprendizagens visadas:

  Identificar acontecimentos complementares e compreender que a soma das suas probabilidades é 1.

  Identificar acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos e compreender que a probabilidade da sua união é igual à soma das suas probabilidades.

- Cadeia: 6ª tarefa da sequência “ Probabilidades – 9º ano”.
- Duração prevista: 90 minutos.
- Notas para o professor:

Com esta tarefa deve introduzir-se a noção de reunião e intersecção de conjuntos que até agora não foi trabalhado pelos alunos. O diagrama de Venn deve ser apresentado como uma forma de representar os vários acontecimentos associados ao espaço de resultados de uma experiência aleatória.

- Palavras chave: Conjuntos disjuntos; acontecimento complementar; acontecimentos contrários; diagrama de Venn

Tarefa 6 – Acontecimentos complementares, diagrama de Venn

1. Lançou-se um dado equilibrado com a forma de um icosaedro (poliedro regular com vinte faces iguais) com as faces numeradas de 1 a 20.

1.1. Calcula a probabilidade de sair:

1.1.1. um número par;
1.1.2. um número que não seja par;
1.1.3. um múltiplo de 3 que seja um número par;
1.1.4. múltiplos de 10 ou números impares.

1.2. Indica o acontecimento complementar a "sair um número menor do que 4". Calcula sua probabilidade.

1.3. Indica dois acontecimentos complementares e calcula a sua probabilidade.

O diagrama de Venn é uma técnica utilizada para visualizar o espaço de resultados (S) e os acontecimentos associados a uma experiência aleatória.
O diagrama ao lado representa a experiência aleatória de verificar o sexo dos filhos das famílias com dois filhos e considerar o acontecimento A "pelo menos um dos filhos é do sexo masculino (M)".

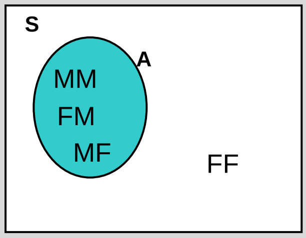
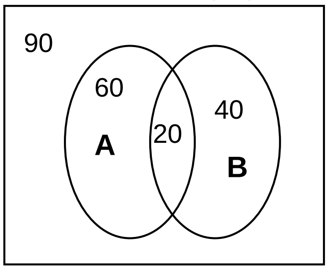


diagrama de Venn

2. Interrogaram-se 210 pessoas acerca da utilização de dois detergentes: **A** e **B**. Oitenta (80) declararam usar o detergente A, sessenta (60) o detergente B e vinte (20) os dois detergentes.



2.2. Seleccionou-se, ao acaso, uma das 210 pessoas. Calcula a probabilidade de ela:

2.2.1. usar apenas o detergente A

2.2.2. usar apenas o detergente B

2.2.3. não usar nenhum dos dois detergentes.

2.2.4. usar, pelo menos, um dos dois detergentes.

3. Num grupo de 70 estudantes, 42 têm os olhos castanhos, 34 usam óculos e 23 têm olhos castanhos e usam óculos. **Constrói um diagrama de Venn** e determina a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso:

3.1. usar óculos e não ter olhos castanhos;
3.2. usar óculos ou ter olhos castanhos;
1.1. usar óculos e ter os olhos castanhos;
1.2. não ter olhos castanhos nem usar óculos.

2. No lançamento de um dado cúbico, qual é o acontecimento contrário de:
2.1. "sair 5"'
2.2. "sair um número menor que 4"?
2.3. sair um número maior ou igual a 6"?

3. Um saco contém bolas azuis, brancas e verdes. Extrai-se ao acaso uma bola do saco. A probabilidade de sair Verde é $\frac{1}{3}$ (P(sair Verde) = $\frac{1}{3}$) e a probabilidade de sair Azul é $\frac{1}{5}$ (P(sair Azul) = $\frac{1}{5}$).

3.1. Qual é o acontecimento contrário a "sair bola Branca"?
3.2. Qual é a probabilidade de sair bola Branca?
3.3. Qual é a probabilidade de não sair bola Verde?
3.4. Diz, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação "A probabilidade de não sair bola branca é igual à soma da probabilidade de sair bola verde com a probabilidade de sair bola azul"

4. O Matias lança um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Diz, justificando se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

4.1. P(sair 3 ou sair 4) = P(sair 3) + P(sair 4)
4.2. P(sair ímpar) = 1 − P(sair par)
4.3. P(sair divisor de 3) = P(sair 1) + P(sair 3)
4.4. P(sair divisor de 4 ou número primo) = P(sair 4)+ P (sair primo)

Tarefa 7 – Diagrama em árvore, listagem, tabela de dupla entrada

- Tema matemático: Organização e tratamento de dados (OTD)
- Nível de ensino: 3º ciclo
- Tópico matemático: Probabilidades
- Subtópico matemático:

  Noção e cálculo da probabilidade de um acontecimento

- Capacidades transversais:

  Resolução de problemas
  Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Regra de Laplace

- Aprendizagens visadas:

  Algumas formas de identificação dos resultados possíveis: diagrama de árvore e tabela de duas entradas

- Cadeia: 7ª tarefa da sequência “ Probabilidades – 9º ano”.
- Recursos: papel e lápis.
- Duração prevista: 90 minutos
- Notas para o professor:

  Nesta tarefa, aparecem os diagramas de árvore e as tabelas de duas entradas que são um recurso muito útil, em determinadas situações, para identificar e contar os resultados possíveis.
  Deve discutir-se com os alunos a vantagem e as situações mais adequadas para utilizar cada um destes processos: listagens, diagramas de árvore e tabelas de duas entradas.

- Palavras chave: Diagrama de árvore; tabela de duas entradas.

Tarefa 7 – Diagrama em árvore, listagem, tabela de dupla entrada

1. Lançaram-se dois dados cúbicos equilibrados, um vermelho e outro verde e somaram-se os pontos obtidos em cada um dos dado. Com os resultados obtidos completa a tabela e responde às seguintes questões:

		Dado vermelho					
		1	2	3	4	5	6
Dado verde	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

1.1. Quantos somas possíveis existem?

1.2 Qual a probabilidade de se obter a soma 6?

1.3 Qual a probabilidade de se obter soma par?

1.4. Qual a probabilidade da soma ser um número múltiplo de 3?

1.5. Qual a probabilidade de se obter soma menor do que 4?

1.6. Qual a probabilidade de se obter a soma igual a 1?

1.7. Qual a probabilidade da soma ser um número múltiplo de 3 e de 5?

2. Considera que é igualmente provável nascer um rapaz ou rapariga. Sabendo que um casal tem 2 filhos, completa o esquema (em árvore seguinte)

1.º filho	**2.º filho**	**Casos possíveis**
Rapaz	Rapaz	(Rapaz, Rapaz)
	....	(.........., ...)
Rapariga	....	(.........., ...)
	Rapariga	(.........., ...)

Calcula a probabilidade de serem:

2.1. dois rapazes;

2.2. de sexos diferentes.

3. Três moedas equilibradas são lançadas ao ar.
(Sugestão: Utiliza um esquema em árvore para determinar os casos possíveis)
Qual é a probabilidade de saírem:

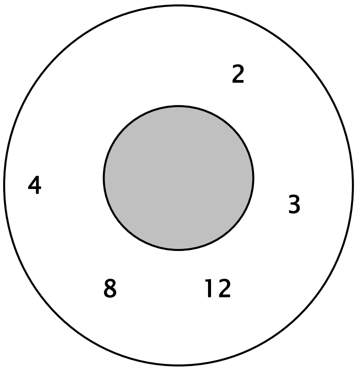
3.1. três faces Euro?

3.2. duas faces Euro e uma face Nacional?

3.3. duas faces Nacional e uma face Euro?

3.4 pelo menos uma face Euro

4. PROBABILIDADES NO ALVO
Se escolher, ao acaso, três números diferentes da zona branca do alvo, o que é mais provável: o seu produto ser 24 ou ser 72?
Justifica a tua resposta.



(GAVE, 1001 Itens)

Mais Problemas…

1. De uma caixa com vinte 20 bolas brancas e duas bolas pretas retirou-se sucessivamente, sem olhar, uma bola.

1.1. De que cor são as duas primeiras bolas?

1.2. Qual é o número mínimo de bolas que preciso de retirar para garantir que duas são da mesma cor?

1.3. Qual é o número mínimo de bolas que preciso de retirar para garantir que duas são pretas?

2. Numa prateleira estão 4 livros de português, 5 livros de matemática e 1 livro de biologia. Tendo em conta a situação dá exemplo de:

2.1. Um acontecimento certo;

2.2. Um acontecimento impossível;

2.3. Um acontecimento pouco provável;

3. Numa caixa colocam-se os seguintes cartões, de igual forma e textura:

M A T E M A T I C A

Em cada uma das situações que se seguem, retira-se ao acaso, um cartão da caixa.

3.1. Completa com as seguintes expressões: *tão provável como*, *mais provável que, menos provável que.*

- Sair uma letra A é ……………………………………..sair uma letra M;
- Sair uma letra T é ……………………………………. sair letra M;
- Sair uma letra E é ……………………………………. sair letra M.

3.2. Assinala com Verdadeiro (V) ou Falso (F):

- Sair uma letra M é um acontecimento possível;
- Sair uma letra é um acontecimento certo;
- Sair uma letra F é um acontecimento pouco provável mas não é impossível;
- Sair uma letra C é um acontecimento impossível.

4. O Raul vai tirar à sorte uma carta do baralho de 52 cartas. Calcula a probabilidade de tirar:

4.1. uma carta vermelha;
4.2. um 4;
4.3. o ás de copas;
4.4. uma carta que não seja de espadas;
4.5. uma dama preta.

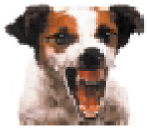
5. Lançaram-se dois dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6. Calcula a probabilidade do produto dos números saídos ser:

5.1. um número par;
5.2. um múltiplo de 5.
5.3. ser par e múltiplo de 2
5.4. ser ímpar e múltiplo de 3

6 . PROBABILIDADES FANTÁSTICAS

Num artigo de Novembro de 2001, o *Boston Sunday Globe* indicava a probabilidade de uma pessoa morrer devido a uma picada de aranha, de abelha ou a uma dentada de cão.

Picada de aranha
1 em **54** milhões



Dentada de cão
1 em **18** milhões

Picada de abelha
1 em **6** milhões

6.1. Transcreve a letra que corresponde à afirmação verdadeira.

(A) A probabilidade de uma pessoas morrer com uma picada de aranha é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma dentada de cão.
(B) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma dentada de cão é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de aranha.
(C) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma dentada de cão é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de abelha.
(D) A probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de abelha é tripla da probabilidade de uma pessoa morrer com uma picada de aranha.

6.2. A probabilidade de uma pessoa ganhar o Euromilhões, fazendo apenas uma aposta, é cerca de $1,3 \times 10^{-8}$.

O que é mais provável: uma pessoa ganhar o Euromilhões, fazendo apenas uma aposta, ou morrer com uma picada de abelha? Justifica a tua resposta.

(GAVE, 1001 Itens)

7. A Ana e o Carlos estão a atirar simultaneamente duas moedas ao ar, uma de €1 e outra de €2.

A Ana diz: "É mais provável que saiam duas faces Nacional ou duas faces Euro do que saia uma face Nacional e uma face Euro".

Carlos: "Estás enganada, ambas as situações acontecem com a mesma probabilidade". Quem tem razão?

8. Naquele dia, mal chegou à escola, o Guilherme transmitiu a feliz notícia aos amigos: a sua gata tinha acabado de os presentear com uma ninhada de quatro filhotes.

Quatro? Tantos....- disse a Marlene.

E logo acrescentou - Quem dera que sejam todos os filhotes machos... gosto muito mais de gatos do que de gatas!

Isso não sei - retorquiu o Guilherme. Não tive ainda oportunidade de o verificar. Nasceram esta madrugada e só soube quando já vinha para a escola.

Pois eu - disse a Francisca - gosto bem mais de gatas. Serão todos fêmeas!

Penso que não é assim tão difícil de saber - rematou o Guilherme.

8.1 A afirmação da Francisca estará certa?

8.1. Qual é a combinação mais provável de gatinhos que nasceu? (isto é, quantos machos e quantas fêmeas?)

9. A Maria e o Manuel estão a jogar. Lançam dois dados equilibrados e somam os pontos de cada dado. Se a soma for 6, 7, 8 ou 9 ganha a Júlia. Se a soma for 2, 3, 4, 5, 10, 11 ou 12 ganha o André.

Quem tem vantagem?

Investiga este problema, sem te esqueceres de escrever todas as conclusões a que chegaste.

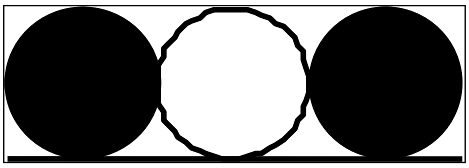
10. Numa ficha de 4 perguntas, os alunos deviam escolher a resposta "Verdadeiro" ou "Falso" em cada uma. A Joana respondeu à sorte, pois não tinha estudado. Qual a probabilidade de ter acertado em todas as respostas?

ESFERAS PERFUMADAS E PROBABILIDADES

11. Existem diferentes maneiras de perfumar uma casa. Uma delas é impregnar com perfume esferas de madeira especial e espalhá-las pela casa.

Algumas dessas esferas são comercializadas em caixas de forma paralelepipédica e pintadas com duas cores diferentes. As esferas são habitualmente todas iguais e estão arrumadas nas caixas, sem espaço entre elas. As esferas tangentes têm cores diferentes.

Na imagem, é possível observar uma das vistas laterais de **qualquer** das caixas.



11.1. O Pedro comprou uma dessas caixas, com **15 esferas.** Ao retirar uma das esferas da caixa, reparou que era branca. Qual é a probabilidade de isso acontecer?

11.2. As caixas têm, no máximo, 30 esferas. Em algumas dessas caixas, a probabilidade de retirar uma esfera preta é $\frac{1}{2}$. Quantas esferas podem conter as caixas para que isso aconteça? Justifica a tua resposta.

(GAVE, 1001 Itens)

ANEXO

Tarefa 2 – Probabilidade e frequência relativa

Cara ou coroa? Cara se for euro...

PESO DA MOEDA NÃO É EQUILIBRADO

Matemáticos polacos testaram as probabilidades de cair cara ou coroa e verificaram que a primeira tem mais hipóteses que a segunda

PEDRO FONSECA

Moedas têm distribuição de massa diferente nos dois lados

Se pensa decidir quem paga hoje o almoço através de um normal lançamento de moeda ao ar, pense duas vezes. Com o fim da circulação do escudo desde o início do mês e a generalização do euro, surgiu uma aparente desvantagem para quem depende do resultado do lançamento de um euro ao ar.

Em termos probabilísticos, ao lançar uma moeda, tem-se 50 por cento de hipóteses de que ela caia com a cara ou com a coroa para cima. Isto era verdade até à introdução das moedas de euro, porque um grupo de matemáticos polacos experimentou com este tipo de moedas no caso, belgas — e chegou à conclusão de que as novas moedas favorecem mais as caras nesses lançamentos.

Tomasz Gliszczynski e Waclaw Zawadowski pediram aos seus estudantes da Academia Podlaska, em Siedlce, para lançarem 250 vezes um euro belga e o resultado foi que a cara do Rei Alberto ficou à vista 140 vezes. O método usado foi o de fazer girar a moeda sobre uma mesa. Segundo Gliszczynski, este método é mais sensível do que atirá-la ao ar. Ao utilizarem cêntimos belgas, o resultado foi ainda mais notório.

O facto de as moedas de euro terem desenhos diferentes na face (normalmente símbolos ou personalidades nacionais) e o mapa da Europa na coroa pode levar a que os resultados não sejam coincidentes com os do euro belga. No entanto, Gliszczynski declarou já ter visto o mesmo fenómeno na moeda polaca de dois zlotys, depois de ter efectuado mais de 10 mil lançamentos.

Também Santos Moreira, director do departamento de Moeda e Produtos Metálicos da Casa da Moeda não se mostra surpreendido com os resultados. "É normal que a moeda não seja equilibrada, há um lado que tem mais massa concentrada" e é este lado que desequilibra os lançamentos.

Em termos estatísticos, numa moeda lançada ao ar há 50 por cento de hipóteses de sair cara ou coroa (as outras duas hipóteses — cair de lado em pé ou ser lançada para o espaço — não são obviamente consideradas). Isso não significa que em 10 lançamentos ela tombe cinco vezes para cada lado. Pode suceder que saia cara 7 vezes e coroa as restantes 3. Se em termos percentuais o resultado é de 70-30 por cento, consoante se aumenta o número de lançamentos, o resultado destes tende a ser equivalente ou, pelo menos, existe uma forte probabilidade de obter um intervalo menor de diferença.

Howard Grubb, estatístico na Universidade de Reading, declarou à revista "New Scientist" que "com uma amostra de apenas 250 [lançamentos], qualquer coisa entre 43,8 e 56,2 por cento num lado ou no outro não se pode afirmar estar desviada" dos padrões normais.

Possivelmente, com um maior número de lançamentos, o desvio acabaria por se aproximar dos 50 por cento. Os próprios matemáticos polacos reconhecem ser necessário fazer mais lançamentos e com euros de outras nacionalidades.

Apesar disso, mal este estudo preliminar foi divulgado, diferentes jornais quiseram experimentar por si próprios e ver no que dava. A maioria dos resultados não tem qualquer validade estatística, até porque alguns nem sequer divulgaram o número de lançamentos.

Foi o caso da BBC Sport Online que usou um euro francês e uma técnica mista (lançamento ao ar e sobre uma mesa) e detectou que em 56 por cento dos lançamentos ao ar saiu cara, sucedendo o mesmo em 52 por cento sobre a mesa.

Também o diário britânico "Guardian" testou com uma moeda de um euro e o resultado foi semelhante: 139 vezes caras e 111 coroa. Já a "New Scientist" testou um euro belga e declarou ter encontrado uma diferença de cinco por cento entre os resultados de cara e coroa, a favor desta. "Isto parece o oposto do resultado polaco mas de facto — em termos de significado estatístico — é exactamente o mesmo", dizia a revista. ■