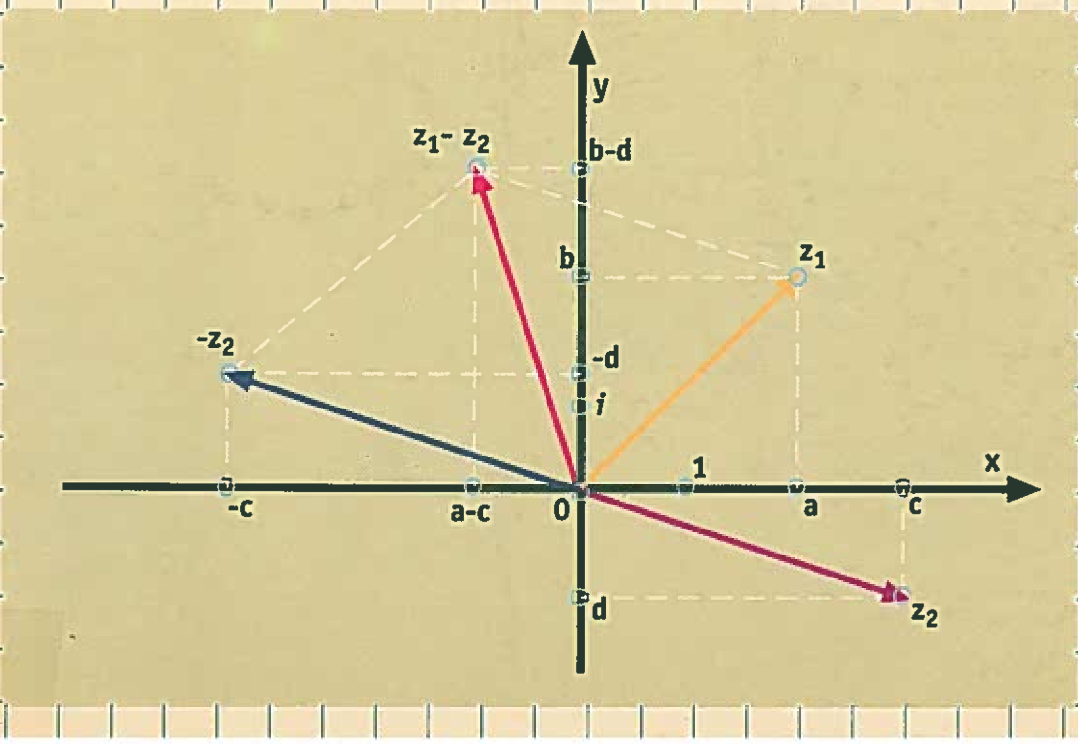
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
Departamento do Ensino Secundário

Trigonometria e Números Complexos

12º ano de escolaridade

Cristina Loureiro
Augusto Franco de Oliveira
Jorge Nuno Silva
Rita Bastos



.851
T

APRESENTAÇÃO

O tema *Trigonometria e Números Complexos* vem completar o ciclo de brochuras dedicadas ao ensino da geometria. Foi seguida a mesma metodologia de trabalho dos textos anteriores, procurando articular sugestões de actividades fundamentadas do ponto de vista didáctico e alguns contributos científicos sobre os conceitos mais significativos.

Assim, esta brochura é constituída pelas seguintes partes:

Actividades comentadas - Trigonometria
Actividades comentadas - Complexos
Cristina Loureiro e Rita Bastos

Alguns limites e derivadas de funções trigonométricas
O teorema fundamental da álgebra
Augusto Franco de Oliveira

Números complexos
Jorge Nuno Silva

ÍNDICE

ACTIVIDADES COMENTADAS
TRIGONOMETRIA

O terceiro tema do programa do 12º ano completa o estudo da trigonometria, iniciado no 11º, com o estudo intuitivo das funções trigonométricas e o cálculo das suas derivadas. Na abordagem que fizemos na brochura do 11º ano (pág. 99 a 106), sugerimos várias actividades e problemas que são adequados à realização desse estudo intuitivo e à aplicação das derivadas. Tendo em conta o tempo proposto para este tema, 6 aulas, e a possibilidade de os alunos utilizarem a calculadora gráfica, parece-nos que a ênfase desta exploração deve ser na resolução de problemas e na realização de pequenos projectos de modelação. Considerando que no tema geral do referido programa se prevê várias abordagens do processo de modelação matemática (p. 37), esta é uma boa oportunidade para propor actividades de modelação e reflectir com os alunos sobre os processos utilizados e sobre a sua importância no mundo actual. Vamos assim explorar apenas uma actividade de modelação que envolve funções trigonométricas, e sugerir outras leituras com abordagens das funções trigonométricas na modelação análogas a estas.

Para além da calculadora gráfica, há dois ambientes de computador propícios à exploração de actividades de modelação que são a folha de cálculo e o programa *Modellus*. Este último é um programa especialmente desenvolvido a pensar no ensino da Matemática e da Física, e que pode ser obtido através do endereço electrónico **http://www.sce.fct.unl.pt/modellus**.

Uma actividade de modelação matemática parte normalmente de dados reais e procura representar de algum modo essa realidade através de modelos matemáticos que, por sua vez, permitem estudar e compreender melhor alguns aspectos desses fenómenos reais. É uma actividade desse tipo, mas simples, que propomos a seguir, utilizando dados recolhidos de uma publicação conhecida.

O comprimento do dia

Observa a tabela publicada no almanaque Borda d' Água de 1999, e depois constrói um modelo matemático que traduza, por exemplo, a variação do comprimento do dia ao longo do ano de 1999.

CREPÚSCULOS. COMPRIMENTOS DO DIA

NA BASE DA HORA LEGAL EM PORTUGAL CONTINENTAL

DATAS 10 em 10 dias		DIA CLARO		ESCURECER		NOITE FECHADA		COMP. DO DIA	
		Lisboa h m	Porto h m	Lisboa h m	Porto h m	Lisboa h m	Porto h m	Lisboa h m	Porto h m
Janeiro	1	7 25	7 29	17 55	17 47	19 01	18 55	9 31	9 16
	11	7 25	7 29	18 04	17 56	19 09	19 03	9 40	9 27
	21	7 22	7 25	18 14	18 07	19 18	19 13	9 54	9 42
	31	7 16	7 18	18 25	18 19	19 28	19 24	10 13	10 02
Fevereiro	10	7 07	7 08	18 36	18 30	19 38	19 35	10 34	10 26
	20	6 55	6 55	18 46	18 42	19 48	19 46	10 57	10 51
Março	2	6 42	6 40	18 57	18 54	19 58	19 57	11 22	11 18
	12	6 27	6 25	19 07	19 05	20 09	20 09	11 46	11 45
	22	6 12	6 08	19 17	19 16	20 19	20 21	12 12	12 12
Abril	1	6 56	6 51	20 27	20 27	21 31	21 34	12 38	12 40
	11	6 40	6 34	20 36	20 38	21 43	21 47	13 02	13 08
	21	6 25	6 18	20 47	20 49	21 56	22 02	13 26	13 33
Maio	1	6 11	6 03	20 57	21 01	22 09	22 17	13 48	13 58
	11	5 59	5 50	21 07	21 12	22 23	22 33	14 09	14 20
	21	5 50	5 40	21 17	21 23	22 37	22 49	14 27	14 40
	31	5 43	5 32	21 26	21 33	22 49	23 03	14 41	14 55
Junho	10	5 40	5 28	21 32	21 40	22 58	23 13	14 49	15 04
	20	5 40	5 28	21 37	21 44	23 03	23 19	14 53	15 08
	30	5 43	5 31	21 37	21 45	23 03	23 18	14 50	15 06
Julho	10	5 49	5 38	21 35	21 42	22 58	23 12	14 43	14 57
	20	5 57	5 46	21 29	21 35	22 49	23 01	14 30	14 45
	30	6 06	5 56	21 20	21 25	22 36	22 46	14 14	14 26
Agosto	9	6 16	6 07	21 08	21 12	22 21	22 29	13 54	14 05
	19	6 26	6 18	20 55	20 57	22 04	22 11	13 33	13 41
	29	6 35	6 29	20 40	20 41	21 46	21 51	13 09	13 16
Setembro	8	6 45	6 39	20 24	20 24	21 28	21 32	12 45	12 49
	18	6 54	6 50	20 08	20 07	21 11	21 13	12 21	12 22
	28	7 03	7 00	19 52	19 50	20 54	20 54	11 56	11 55
Outubro	8	7 12	7 10	19 36	19 33	19 38	19 37	11 31	11 28
	18	7 22	7 21	19 22	19 18	19 23	19 22	11 07	11 01
	28	7 31	7 32	19 09	19 04	20 11	20 08	10 43	10 36
Novembro	7	6 42	6 43	17 59	17 53	19 01	18 58	10 21	10 12
	17	6 52	6 54	17 51	17 44	18 55	18 50	10 01	9 50
	27	7 02	7 05	17 46	17 38	18 51	18 45	9 46	9 33
Dezembro	7	7 11	7 15	17 45	17 37	18 50	18 44	9 34	9 20
	17	7 19	7 22	17 47	17 38	18 52	18 46	9 28	9 13
	27	7 24	7 27	17 52	17 43	18 57	18 52	9 29	9 13
Jan. 2000	6	7 26	7 29	17 59	17 51	19 05	18 59	9 35	9 20

N.B. — A hora de Verão vai desde a 1 h. do dia 29 de Março (último Domingo) até à 1 hora do dia 31 de Outubro (último Domingo).

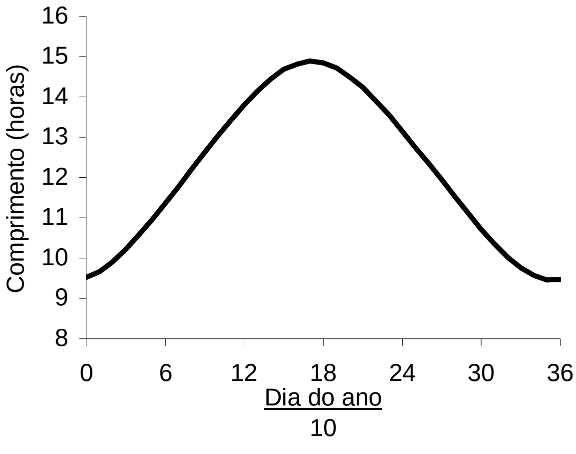
Claro que, numa actividade de modelação, o ideal será que os próprios alunos recolham os dados, directamente, ou através dos meios de informação, nomeadamente a Internet, e que estes sejam o mais actuais possível.

Nesta exploração optámos por usar a folha de cálculo para introduzir os dados, e começamos por explorar apenas os dados relativos ao comprimento do dia em Lisboa.

COMPRIMENTO DO DIA - LISBOA - 1999

Dia	Horas	Minutos	Comprimento (horas)
0	9	31	9,517
10	9	40	9,667
20	9	54	9,900
30	10	13	10,217
40	10	34	10,567
50	10	57	10,950
60	11	22	11,367
70	11	46	11,767
80	12	12	12,200

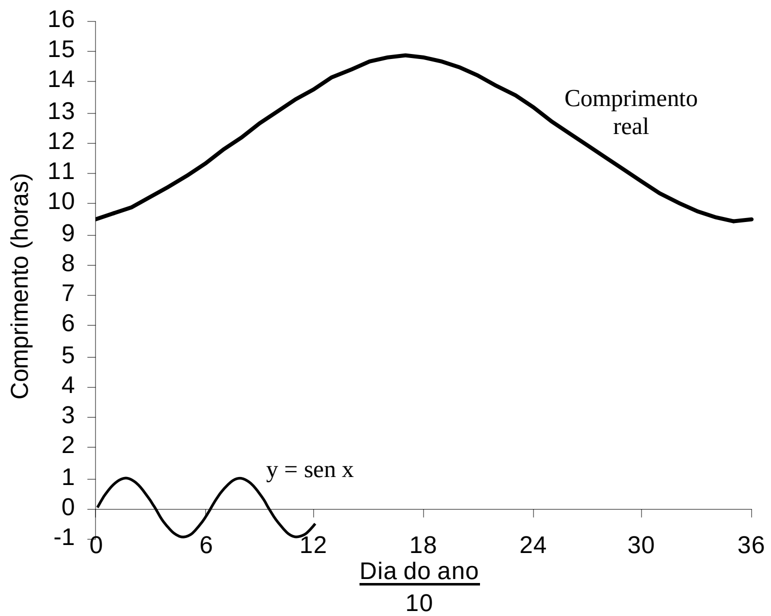
Logo nesta fase a folha de cálculo é útil para se obter a coluna do comprimento em horas. Os dados apresentados no almanaque referem-se a datas de dez em dez dias. Optámos por designar por 0 o primeiro dia porque o facto de haver imagem para o zero pode facilitar a determinação do modelo, mas essa é uma escolha que podemos reformular em qualquer altura, aproveitando as possibilidades da folha de cálculo. Com estes dados obtemos imediatamente um primeiro gráfico.



Esta curva parece uma sinusoidal, o que sugere um modelo que é uma função trigonométrica composta da função seno com funções lineares. Para encontrar essa função deveremos ter em conta, entre outros aspectos, os pontos em que atinge o máximo e o mínimo e também o seu período. Embora a calculadora gráfica faça regressão trigonométrica, é mais interessante e formativo construir o modelo recorrendo às características e propriedades das funções trigonométricas, nomeadamente as das funções seno e coseno.

Considerando para variável independente **x** o número $\frac{\text{dia do ano}}{10}$, podemos considerar 36 como uma aproximação razoável do período, já que equivale a tomar 360 como número de dias do ano.

Utilizando estes valores, podemos partir do gráfico da função y = sen x, e transformá-lo sucessivamente até obtermos a melhor aproximação ao gráfico dos dados reais.

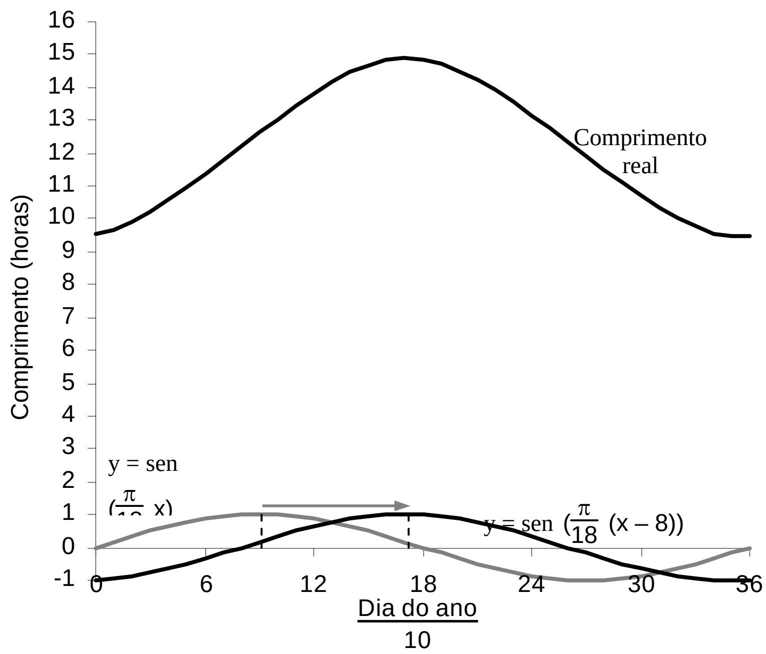


A transformação da expressão para se obter período 36, corresponde a 'esticar' o gráfico no sentido do eixo Ox

$$y = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{36}x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{18}x\right)$$

Esta nova função tem um máximo no ponto (9, 1). Como o maior dia do ano é o dia 20 de Junho, em que x = 17, é necessário fazer uma translação do gráfico segundo o vector (8, 0). A expressão correspondente fica

$$y = \text{sen}\ \left(\frac{\pi}{18}\ (x - 8)\right)$$



A amplitude do contradomínio da última função obtida é 2. Para obter a amplitude da função pretendida, procuramos nos dados que temos o menor e o maior dias do ano:

o **mínimo** da função, correspondente ao dia 17 de Dezembro

$$C(35) = 9{,}487$$

o **máximo** da função, correspondente ao dia 20 de Junho

$$C\ (17) = 14{,}883$$

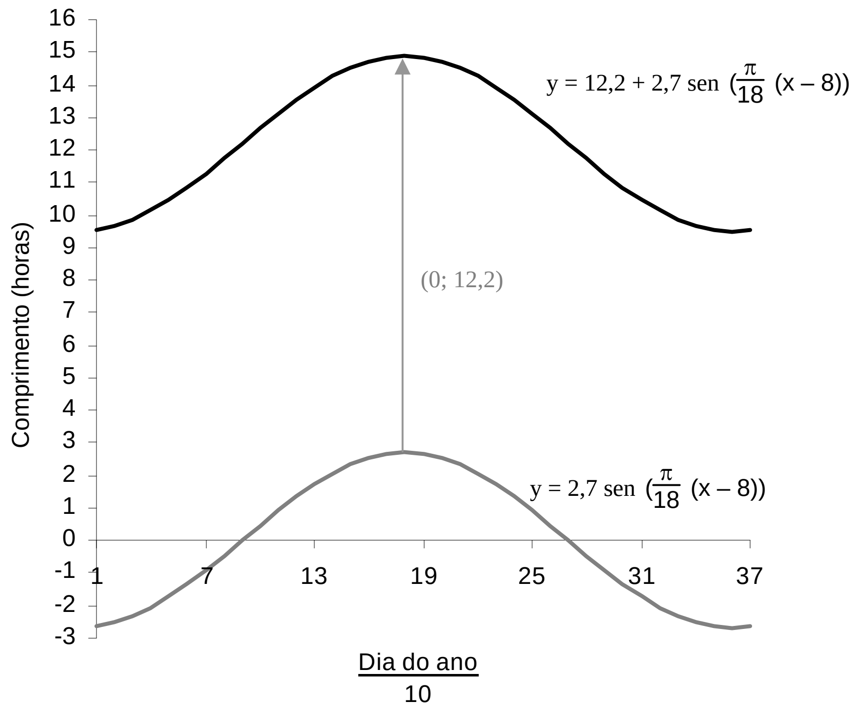
a **amplitude do contradomínio**, correspondente à diferença entre o máximo e o mínimo

$$14{,}883 - 9{,}487 \approx 5{,}4$$

A amplitude da função que queremos modelar é aproximadamente 5,4. Para fazer a transformação pretendida multiplicamos a função por $\frac{5{,}4}{2} = 2{,}7$

Como o máximo do comprimento do dia é 14,833, fazemos uma translação do gráfico no sentido vertical de 14,883 – 2,7 ≈ 12,2. Portanto a expressão da função que procuramos será aproximadamente

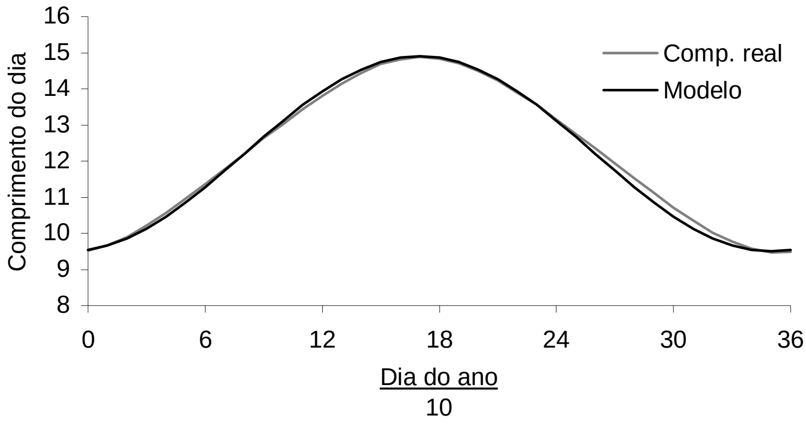
$$y = 12{,}2 + 2{,}7 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{18}(x - 8)\right)$$



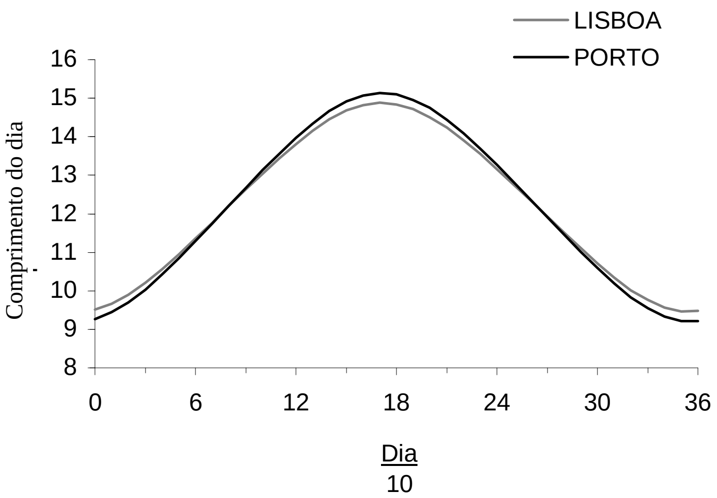
Podemos comparar agora a tabela e o gráfico desta função com os da função obtida com os dados reais. Se tivéssemos tido acesso a dados com maior precisão e em maior número teríamos encontrado provavelmente um modelo melhor que este, mais aproximado da realidade.

COMPRIMENTO DO DIA - LISBOA - 1999

Dia	Comprimento (horas)	Modelo	Diferença
0	9,517	9,541	-0,024
1	9,667	9,663	0,004
2	9,900	9,862	0,038
3	10,217	10,132	0,085
4	10,567	10,464	0,102
5	10,950	10,850	0,100
6	11,367	11,277	0,090
7	11,767	11,731	0,036
8	12,200	12,200	0,000
9	12,633	12,669	-0,036



Por um processo análogo obteríamos um modelo para a variação do comprimento do dia no Porto.

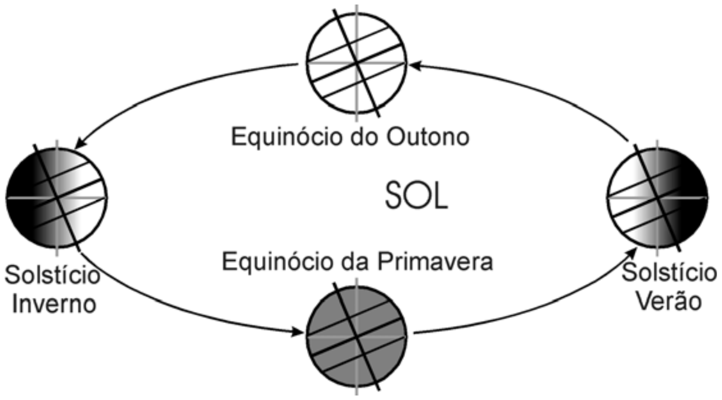


A comparação dos dois gráficos permite fazer algumas observações, interpretá-las e avançar na compreensão da realidade. Por exemplo, porque razão

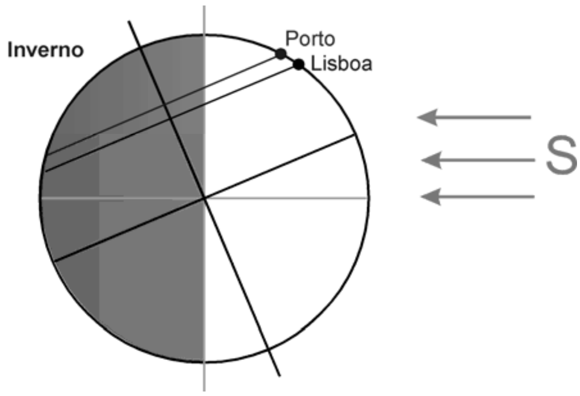
– os valores do comprimento do dia se situam num intervalo menor em Lisboa do que no Porto?
– quando o dia é maior que a noite, os dias são maiores no Porto do que em Lisboa?
– quando o dia é menor que a noite, os dias são menores no Porto do que em Lisboa?

– o dia é igual à noite apenas em dois dias do ano, que são os mesmos em Lisboa e no Porto?

O que provoca estas diferenças entre o comprimento do dia em Lisboa e no Porto é a posição do eixo de rotação da Terra relativamente ao plano da sua órbita, juntamente com o facto de estarem a paralelos diferentes.



Por exemplo, no solstício de Inverno, a parte do paralelo do Porto que fica iluminada é, proporcionalmente, menor que a parte iluminada do paralelo de Lisboa.



Para além do aspecto muito característico de modelação matemática que esta actividade ilustra, ela é o exemplo de um pequeno projecto que os alunos podem desenvolver em ligação com outras áreas do conhecimento.

Propostas de outras situações, que envolvem funções trigonométricas e que podem levar a explorações análogas podem ser obtidas em:

António Bernardes (1992). Ao Sabor das Marés*. Educação e Matemática* nº 23.

Liliana Costa e Margarida Graça (1993). Uma caleira e uma nora*. Aprender Matemática – Pensar a Realidade*. Lisboa: Texto Editora.

Susana Carreira (1993). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo.* Lisboa: APM, colecção Teses.

J. F. Matos (1995). A Roda Gigante*. Modelação Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

T^3 (1999). *Modelação no ensino da matemática.* Lisboa: APM.

Grupo de Trabalho de Aplicações e Modelação – APM (1999). *Relatório final do projecto Modelação e Aplicações na Matemática Escolar*. Não publicado.

Há ainda outros tipos de abordagens que podem ser feitos sobre as funções trigonométricas, mas com características totalmente diferentes. A função modelo é dada analiticamente, e sobre ela são colocadas algumas questões de interpretação do modelo. Encontramos propostas destas, por exemplo, em

Luís Madureira (1993). *O voo do gafanhoto* e *Tensão arterial*. *Aplicando a Matemática*. Lisboa: V.R.A.L.

Para além destas propostas de trabalho, sugerimos a procura de dados na Internet. Por exemplo em:

http://www.hidrografico.pt

http://www.edinfor.pt/anc

http://www.aveiro.net/bodyboard/mares.htm

ACTIVIDADES COMENTADAS
COMPLEXOS

Tradicionalmente, no ensino da matemática em Portugal, os números complexos eram tratados com duas grandes ênfases: o cálculo e as estruturas. Infelizmente que assim era, porque ficavam escondidas as grandes possibilidades de conexões destes números. Ao estudá-los percebemos que a sua ligação à geometria nos dá uma perspectiva mais rica dos métodos geométricos típicos – coordenadas, vectores e transformações geométricas – e uma nova compreensão da demonstração, ligando características numéricas, algébricas e geométricas. Simultaneamente, a formulação e a resolução de problemas ganham novas possibilidades na medida em que passamos a ter mais e melhores ferramentas disponíveis.

Conexões

Alguns matemáticos consideram que os números complexos são um dos temas de unificação matemática por excelência.

> *À medida que a investigação avança, tem-se tornado cada vez mais claro que para compreender verdadeiramente a matemática, mesmo que seja só o cálculo, o campo dos números reais é estranhamente estreito, e é imperativo que trabalhemos com os números complexos para atingir a uniformidade e a harmonia.*
>
> Liang-shin Hahn, 1994

Uma das ideias mais importantes, senão a mais importante, para trabalhar os números complexos deve-se à quantidade de informação que estes números sintetizam. O conhecimento destas informações e das relações entre elas permitem-nos uma grande facilidade de escolha de caminhos em diversos tipos de actividades matemáticas.

Organizámos as actividades comentadas em torno de quatro conexões principais, que dão nome às várias secções: números complexos e sistemas de coordenadas, números complexos como vectores, números complexos e transformações geométricas, geometria e números complexos. Esta última é a conexão mais abrangente, uma vez que engloba todas as outras.

Com os complexos não estamos presos a uma representação única, podemos usar a que nos der mais jeito. Por isso mesmo, uma das dificuldades com que nos debatemos é como jogar permanentemente com as diversas representações, utilizando em cada passo a mais útil e mais fértil. É uma perspectiva de trabalho matemático muito rica.

Para realizar essas escolhas temos que dominar as relações entre as várias representações, para poder passar rapidamente de uma para outra, e perceber em cada caso as vantagens de usar uma ou outra. A destreza nestas passagens é fundamental. Como veremos, ao longo do desenvolvimento das actividades comentadas, a decisão sobre o tipo de representação que dá mais jeito, ou que facilita os cálculos, ou que dá um significado geométrico mais rico ou mais interessante, é muito importante.

Em nossa opinião as diversas conexões devem ir sendo trabalhadas a par e passo, umas vezes de forma isolada, outras de forma articulada. O trabalho com os números complexos é, por isso mesmo, um trabalho matemático muito formativo pois dá significado à capacidade de decisão. Decidir o tipo de coordenadas, escolher a unidade, decidir a representação, … Só pode haver decisão quando se conhecem as várias alternativas, as suas possibilidades e se tem destreza e maleabilidade para passar de umas para outras. Decidir não pode ser prejudicado pelo peso da realização das tarefas que lhe estão associadas.

Mas a capacidade de decisão matemática não é estranha ao recurso à intuição. Muitas vezes não somos capazes de apresentar uma razão lógica que nos leva a escolher um caminho, mas sentimos que há razões que nos levam a decidir. Não são razões explicitáveis mas sabemos que elas existem. Nestes casos dizemos que foi a intuição. E a intuição matemática também se vai aprendendo com a realização de muito trabalho matemático.

É importante notar que ao tomar a decisão de ir por um determinado caminho estamos a fazer uma experiência, podemos ter a intuição de que ela nos vai levar a uma solução, mas até pode não levar. Então há que avaliar o resultado e voltar atrás, se for caso disso. Este é o verdadeiro caminho das investigações e da demonstração.

Investigações e demonstração

O tema geral do programa aponta os métodos de demonstração e o conceito de teorema como assuntos a que deve ser dada bastante importância. Parece-nos que o tema dos complexos é um óptimo contexto para o aluno praticar demonstrações formais de propriedades geométricas sem, no entanto, ter que recorrer às axiomáticas da geometria, extremamente elaboradas. Tentamos exemplificar nesta brochura, no capítulo *Geometria e números complexos*, como se pode desenvolver pequenas organizações locais da geometria, e recorrer à linguagem dos complexos para formalizar as demonstrações.

A formalização tem o perigo de esvaziar de significado aquilo que se demonstra, reduzindo as demonstrações a simples exercícios de lógica. Uma forma de contrariar esta tendência é associar as demonstrações à realização de pequenas investigações, em que serão os alunos a formular as conjecturas a demonstrar. Por outro lado, a formalização das demonstrações permite explorar e discutir com os alunos algumas questões de lógica, que também fazem parte do tema geral do programa.

Questões de linguagem de notação

Ao estudarmos este assunto, uma das questões que se nos colocou foi o da linguagem e das notações a utilizar já que, surpreendentemente, encontrámos uma grande diversidade, mesmo entre autores portugueses. Essa diversidade contraria a ideia de que a linguagem matemática é universal.

Os nomes são convenções que, no caso dos números complexos, não são consensuais. Por exemplo:

Plano de Argand não é utilizado nos livros de Bento de Jesus Caraça nem de Sebastião e Silva, nem nos livros anglófonos que consultámos. Por razões históricas até lhe poderíamos chamar *plano de Wessel*.

Afixo tem significados diferentes para Sebastião e Silva

> *… tal ponto será chamado a* imagem geométrica *(ou o* afixo*) de a+bi.*
>
> *(Compêndio de Matemática, 1º vol., 2º tomo, p. 152)*

e para outros autores portugueses e franceses

> z = x + iy *(*x *et* y *réels) est representé para le point* M *(*x*,* y*).*
> *On dit que* M *est l'*image *de* z*, que* z *est l'*affixe *du point* M *ou du vecteur* $\vec{u}$ *(*x,y*).*
>
> *(Artigues, C. 1992, p. 28)*

Alguns autores portugueses, como Bento de Jesus Caraça, e os autores anglófonos que consultámos, nunca utilizam o termo *afixo*, ou outro qualquer equivalente.

A linguagem serve para as pessoas pensarem e comunicarem de forma mais clara e menos ambígua possível. Quanto mais os nomes estiverem associados aos seus significados, mais claros ficam o raciocínio e a comunicação. Por isso, propomos a utilização de termos que associam os nomes aos seus significados:

plano complexo – a própria designação associa duas estruturas importantes: o plano geométrico e o corpo complexo;

r*epresentação geométrica* – o ponto que representa o número complexo;

representação vectorial – o vector que representa o número complexo;

representação algébrica ou cartesiana – a expressão algébrica que representa o número complexo e que está associada às coordenadas cartesianas do ponto;

representação trigonométrica ou polar – a expressão trigonométrica que representa o número complexo e que está associada às coordenadas polares do ponto;

Seria possível ter ido ainda mais longe, não falando em representações e não distinguindo número, ponto e vector, no que respeita a designações. Liang-shin Hahn considera que um número complexo pode ser indiferentemente considerado como o número z, o ponto z ou o vector z.

No que respeita às notações em geometria, optámos por seguir a perspectiva de Eduardo Veloso (1997), simplificando-as ao máximo quando não haja lugar a ambiguidades. Por exemplo: segmento de recta AB, triângulo ABC, quadrilátero ABCD, etc. Em alguns casos, representamos pela mesma letra o número complexo e o ponto que o representa. Assim, escrevemos para M, ponto médio do segmento AB, M = $\frac{A + B}{2}$. É claro para todos que nesta expressão a adição é entre números complexos e não entre pontos.

Como veremos ao longo do desenvolvimento das actividades, a simplificação nas notações apoia-se nos isomorfismos existentes entre as várias estruturas algébricas em causa, e torna toda a escrita matemática algébrica mais simples, sem qualquer perda de rigor. O formalismo da linguagem matemática não existe para complicar, apenas para tornar a comunicação e o pensamento mais rigorosos.

Parece-nos interessante referir que há quem considere a designação *números imaginários*, tantas vezes atribuída aos números complexos, como uma designação infeliz. Como temos uma tendência natural para ligar os nomes aos sentidos já conhecidos das palavras, e aprendemos as palavras *imaginário* e *número* em contextos totalmente diferentes dos que são usados pelos matemáticos, os alunos podem ser levados a pensar que estes números não existem. A existência destes números tem exactamente a mesma natureza que a existência dos números reais: é uma construção matemática.

Sobre a tecnologia

Com agrado temos vindo a descobrir que o papel da tecnologia na exploração deste assunto ultrapassa muito a utilização da calculadora. Os programas de geometria dinâmica oferecem possibilidades de trabalho muito interessantes, que realçam ainda mais a conexão entre o plano e o corpo complexo. Ao longo destas actividades apresentamos algumas situações que têm todas as vantagens em ser exploradas em ambientes de geometria dinâmica.

É possível ir muito mais longe no trabalho com complexos em programas de geometria dinâmica, construindo ferramentas (*scripts* ou *macros*) que traduzem geometricamente as operações entre complexos. Este trabalho tem vindo ser desenvolvido por Eduardo Veloso, em alguns cursos de formação de professores que tem realizado.

Sobre a organização das actividades comentadas

Foi com todo este tipo de preocupações que organizamos este texto, procurando construir propostas de trabalho para os alunos que valorizem os aspectos que referimos. Para além destas, é importante lembrar que este tema tem aspectos históricos muito relevantes que podem proporcionar interessantes actividades de pesquisa.

As actividades não foram organizadas pela ordem pela qual poderão ser propostas aos alunos, mas sim por conexões fundamentais permitindo-nos identificar e clarificar relações e reflectir sobre as possibilidades didácticas de cada conexão. Para os professores parece-nos importante que tenham ideias claras e precisas do que está a ser tratado, para assim estruturarem um caminho a percorrer com os alunos. Para estes, as ligações com os outros temas da matemática vão aparecendo à medida que se avança nesse caminho pelos complexos, numa perspectiva de esclarecimento mútuo entre os números complexos e os outros temas matemáticos que lhe estão ligados.

Talvez por isso as trinta e seis actividades propostas possam parecer excessivas para o número de aulas previstas. A verdade é que, em alguns casos, as possibilidades de exploração nos foram entusiasmando. Como professores também gostamos de estudar e partilhar com os outros um pouco mais de matemática, mesmo que não a possamos partilhar toda com os nossos alunos.

Para aqueles que ficaram entusiasmados e curiosos pelos números complexos há várias publicações acessíveis em português que podem ser consultadas. Ao longo do texto fomos dando entradas a essas obras cuja leitura recomendamos. Com certeza que há outras, e não podemos esquecer que agora há também o recurso à *Internet*.

Números complexos e sistemas de coordenadas

A leitura do texto de Bento de Jesus Caraça, sobre a história dos números complexos (Caraça, 1998, p. 151-159), parece-nos ser a melhor forma de enquadrar as principais considerações sobre os números complexos e a utilização de sistemas de coordenadas. Segundo o autor, os complexos, inventados no século XVI por Bombelli, só adquiriram *dignidade numérica* "logo que se conseguiu uma realização *visual* dos números complexos", no fim do século XVIII. De facto, foi Caspar Wessel, em 1797, que propôs pela primeira vez a representação geométrica dos números complexos, tal como hoje a consideramos. A sua grande inspiração "foi ter tomado expressamente um eixo para lugar de imaginários – todos os complexos da forma *0 + bi*, isto é, todos os *imaginários puros* têm representação sobre o eixo Oy e, por consequência, este eixo aparece aqui como lugar dos imaginários puros." (Caraça, 1998, p. 157)

A esta particularidade histórica acresce o facto de que logo a seguir a Wessel, Argand (1806) e Gauss (1811) terem apresentado a mesma ideia de representação geométrica dos números complexos. Do ponto de vista histórico, parece-nos que é interessante conhecer estes factos e ter uma compreensão global dos problemas que rodearam a criação e desenvolvimento desta construção matemática, e não apenas os nomes que ficaram ligados a ela. Aspecto este que já questionámos na introdução deste texto, quando propusemos a designação de *Plano complexo* em vez do habitual (entre nós) *Plano de Argand*.

A utilização de coordenadas é uma ideia fundamental em matemática, e nesta fase os alunos já dominam as coordenadas cartesianas. A representação trigonométrica dos números complexos mais não é do que um caso particular de utilização das coordenadas polares. Nesse sentido parece-nos importante, como o próprio programa refere, não nos referirmos apenas à representação trigonométrica dos números complexos, e introduzir a linguagem mais geral das coordenadas polares.

Pelas riqueza de relações que permitem estabelecer e por serem familiares aos alunos, os triângulos, os quadriláteros e os polígonos regulares em geral são um manancial de ideias para construir actividades sobre coordenadas e sobre as várias representações dos números complexos.

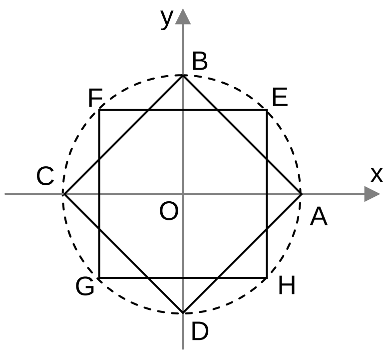
Quadrados no plano complexo

O número complexo $z = 2\ c\boldsymbol{i}s\ \frac{\pi}{5}$ representa o vértice de um quadrado com centro na origem do referencial, no plano complexo.

- Indica os complexos que representam os outros três vértices do quadrado, na forma trigonométrica e na forma algébrica.
- Determina a medida do lado e a medida da diagonal do quadrado.
- Dado um número complexo $z = r\ c\boldsymbol{i}s\ \theta$, representa na forma trigonométrica os outros três complexos que com ele representam os vértices de um quadrado com centro na origem do referencial. Determina a medida do lado e a medida da diagonal do quadrado.

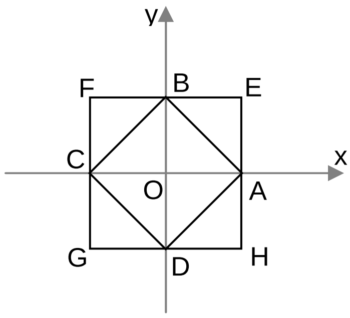
Esta actividade é adaptável a outros quadriláteros, como rectângulos e losangos.

Mudança de coordenadas



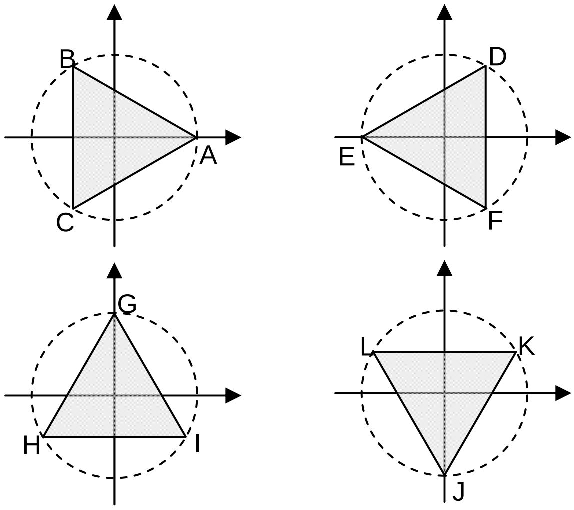
- Obtém as coordenadas cartesianas dos pontos A a H, escolhendo para o referencial a unidade mais conveniente.
- Obtém as coordenadas polares dos pontos A a H.
- Identifica, na forma algébrica, os números complexos representados pelos pontos A a H, no plano complexo da figura.
- Identifica, na forma trigonométrica, os números complexos representados pelos pontos A a H, no plano complexo da figura.

Um aspecto interessante na resolução desta actividade é a escolha da unidade. Enquanto para as coordenadas cartesianas há duas hipóteses igualmente convenientes, o raio da circunferência ou metade do lado do quadrado, para as coordenadas polares só a primeira interessa. Para podermos trabalhar as mudanças entre as várias representações do mesmo número complexo, convém escolher sempre a mesma unidade ao longo de toda a actividade.



A figura ao lado pode constituir uma extensão desta actividade, mas que levará a uma situação de algum modo contrária, no que diz respeito ao problema da escolha da unidade: duas boas escolhas para as coordenadas polares, metade da diagonal do quadrado maior ou metade do seu lado, mas só esta última para as coordenadas cartesianas.

Triângulos e complexos



Em todas as situações, o centro do triângulo é a origem do referencial.

- Todos os triângulos podem ser obtidos do triângulo ABC por uma rotação. Caracteriza cada rotação.
- Indica, na forma trigonométrica, os números complexos correspondentes aos vértices de cada um dos triângulos equiláteros da figura.

Embora pareça que há alguma repetição nesta actividade, estes quatro triângulos abrem perspectivas interessantes para aprofundar as relações entre a potenciação e a radiciação com complexos e as suas representações geométricas, como veremos a seguir.

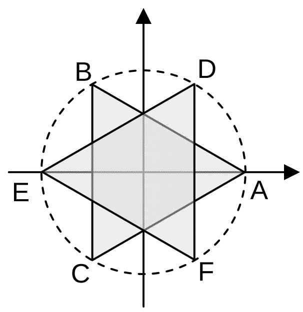
Triângulos e potências 1

- Calcula o cubo de cada um dos números complexos que representam os vértices dos triângulos da actividade anterior. O que observas?
- O que observaste na questão anterior, pode ser generalizado
  – para um triângulo equilátero centrado na origem, mas sem nenhum vértice sobre os eixos?
  – para um triângulo não equilátero?
  – para um triângulo equilátero não centrado na origem?

O que se pretende é que se tire a conclusão que são iguais os cubos de três números complexos com o mesmo módulo e em que a diferença entre os seus argumentos é de $\frac{2\pi}{3}$, ou seja, que correspondem a três vértices de um triângulo equilátero cujo centro é a origem do referencial.

Daqui pode começar a surgir a ideia que um número complexo tem três raízes cúbicas. E a partir dos mesmos triângulos iniciais também podemos explorar outras potências.

Triângulos e potências 2



Sobrepondo os referenciais com os triângulos ABC e DEF da actividade *Triângulos e complexos*, obtemos os vértices de um hexágono regular.

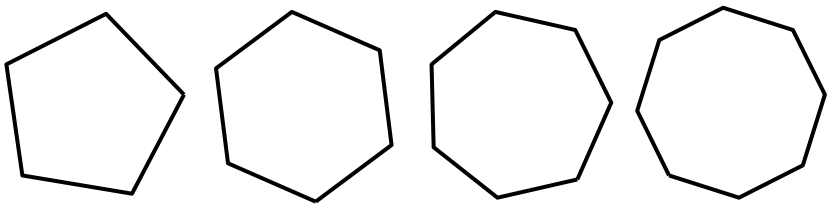
- Calcula a potência de expoente 6 de cada um dos números complexos de A a F. Repara que podes partir dos cubos que já calculaste anteriormente.

  Interpreta algebricamente e geometricamente os resultados obtidos.
- Sem fazer qualquer cálculo, obtém as potências de expoente 6 dos números complexos correspondentes aos vértices dos triângulos GHI e JKL.
- Se sobrepuseres os referenciais com os quatro triângulos da actividade *Triângulos e complexos*, obténs os vértices de um polígono regular. Qual? Qual é o menor expoente que dá origem a potências iguais para todos complexos que estão representados pelos vértices de A a L?

Grande parte do trabalho iniciado com triângulos equiláteros, pode ser continuado para qualquer polígono regular.

Polígonos e coordenadas

Escolhe referenciais para representar poligonos regulares de 3, 4, 5, … n lados e determina:

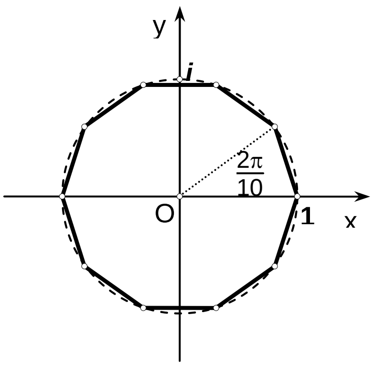


- As coordenadas polares dos vértices de cada polígono.
- As coordenadas cartesianas dos vértices de cada polígono.
- A representação algébrica desses vértices no plano complexo.
- A representação trigonométrica desses vértices no plano complexo.

A ordem das questões desta actividade é determinante na medida em que, num polígono regular com centro na origem do referencial, há uma relação muito simples entre as coordenadas polares dos vértices desse polígono. Começar por obter as coordenadas cartesianas seria desinteressante e complicado.

Esta actividade permite discutir a vantagem de trabalhar com coordenadas polares, mesmo quando o objectivo é obter as coordenadas cartesianas.

Para um polígono de **n** lados e escolhendo um referencial com origem no centro da circunferência circunscrita e unidade igual ao raio, as coordenadas polares dos vértices são



$$(1, 0) \qquad (1, \frac{2\pi}{n}) \quad (1, 2\times\frac{2\pi}{n}) \quad \dots \quad (1, (n-1)\times\frac{2\pi}{n})$$

Ou, numa expressão geral

$$(1, k\times\frac{2\pi}{n}) \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$$

A partir destas é muito simples determinar as coordenadas cartesianas

$$\left(\cos\,(k\times\frac{2\pi}{n}),\ \text{sen}\,(k\times\frac{2\pi}{n})\right) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

Os números complexos obtidos

$$z_k = c\boldsymbol{i}s\,(k\times\frac{2\pi}{n}) \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

não são mais que as **n** raízes de índice n da unidade, como se verá na actividade seguinte.

A formulação da actividade dava-nos liberdade total para a escolha da unidade. Relacionar esta unidade com o lado do polígono é uma actividade de trigonometria como a que propusemos na Brochura do 11º ano, na página 84.

Partimos de um vértice no eixo real, com argumento 0 portanto, porque facilita muito a expressão geral e os cálculos envolvidos. Se tivéssemos partido de um outro ponto, de argumento α, os outros pontos teriam argumentos $\alpha+k\times\frac{2\pi}{n}$.

Polígonos e potências 1

Calcula as seguintes potências dos complexos encontrados na actividade anterior:

- O cubo de cada um dos complexos que representam os vértices do triângulo.
- A quarta potência de cada um dos complexos que representam os vértices do quadrado.
- A quinta potência de cada um dos complexos que representam os vértices do pentágono.
- A sexta potência de cada um dos complexos que representam os vértices do hexágono.
- …

Generaliza as conclusões a que chegaste para um polígono regular de **n** lados, e demonstra-as.

Esta exploração do significado geométrico da potenciação conduz facilmente à ideia de que um número complexo tem **n** raízes de índice n, e também à obtenção das fórmulas de De Moivre. A actividade seguinte é uma extensão desta e pode ser orientada para essas conclusões.

Polígonos e potências 2

$\mathbf{z_0 = r\ cis}\ \theta$ representa um vértice do polígono regular de **n** lados com centro na origem do referencial.

- Indica os números complexos que representam os outros vértices deste polígono.
- Qual é o menor expoente que dá origem a potências iguais para todos os complexos que representam os vértices?

Este conjunto de actividades foi pensado para trabalhar a conexão entre números complexos e pontos do plano. Esta é a primeira de uma série de conexões que é possível estabelecer entre a geometria plana e os números complexos. Infelizmente esta ligação inicial não tem paralelo na geometria tridimensional. Segundo Gardner (pág. 262)

> *Depois da descoberta da interpretação geométrica dos números complexos, os matemáticos imediatamente questionaram se este conceito básico podia ser generalizado a três dimensões, isto é, a pontos no espaço, ou, formulado de outro modo, a ternos ordenados. A resposta é não, sem uma modificação radical das leis da aritmética. Como Eric Temple Bell uma vez afirmou: o campo complexo é o 'fim do caminho'. Foi o matemático irlandês William Rowan Hamilton que fez a primeira incursão pelos 'números hipercomplexos' quando inventou os quaterniões: números com quatro componentes que combinam um real com três imaginários.*

Para os interessados em saber alguma coisa sobre quaterniões, sugerimos a leitura de *O Livro dos Números*, de J. H. Conway e R. K. Guy.

Cálculo com números complexos

À semelhança do que se passa com o cálculo com números reais, a calculadora veio trazer ao cálculo com números complexos uma série de novas questões e novas possibilidades. Hoje, as calculadoras gráficas fazem todo o cálculo com estes números, na forma algébrica ou na forma trigonométrica. Na medida em que a utilização destas calculadoras é assumida pelo programa, faz todo o sentido tirar o máximo partido destes instrumentos.

Em nosso entender, e no que respeita ao cálculo, podemos libertar-nos dos exercícios de treino, rotineiros e repetitivos, para enfatizar outro tipo de aprendizagens. Pensamos que o cálculo deve ser trabalhado com o máximo de ligações e tendo como objectivos:

– a compreensão das operações e das relações entre elas;

– a percepção progressiva da estrutura do corpo complexo e o conhecimento da sua evolução histórica;

– o controlo crítico dos instrumentos tecnológicos, que depende do desenvolvimento da estimação utilizando as representações geométricas;

– a investigação e a demonstração;

– as conexões com a geometria plana, o cálculo vectorial, as transformações geométricas, etc.

As actividades que vamos apresentar foram construídas com base nestas preocupações, embora naturalmente valorizem mais uns aspectos do que outros.

Gostaríamos ainda de chamar a atenção para o facto da compreensão das operações ter que se construir mais com base na coerência interna, já que não há aplicações elementares exteriores à matemática que dêem significados a estes números e às operações entre eles. Essa coerência interna é uma das características de qualquer teoria matemática, e neste caso vai familiarizando os alunos com a estrutura do corpo complexo.

Operações com complexos

Considera $\boldsymbol{z} = 3 - \boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{w} = 2 \text{ c}\boldsymbol{i}\text{s } \frac{4\pi}{5}$.

- Obtém dois números complexos cuja soma seja ***z***.
- Obtém dois números complexos cuja diferença seja ***z***.
- Obtém dois números complexos cujo produto seja ***w***.
- Obtém dois números complexos cujo quociente seja ***w***.

Cada questão é muito aberta pelo facto de ter uma infinidade de soluções, mas permite a autonomia dos alunos na validação dos resultados obtidos, que é um hábito muito importante a desenvolver, e de que muitas vezes nos esquecemos.

Um aspecto interessante desta actividade é a possibilidade de várias extensões, introduzindo restrições para os números pedidos. Por exemplo, obter dois números com igual módulo, dois números em quadrantes diferentes, dois números no mesmo quadrante que o número dado, etc.

Aprender a trabalhar com a calculadora

As calculadoras gráficas TI-83 permitem o cálculo com números complexos quando em **MODE** optamos por **a+bi** (representação algébrica) ou por **re^θi**. Esta última é equivalente à representação na forma trigonométrica, já que se pode demonstrar que:

$$e^{\alpha \boldsymbol{i}} = \cos \alpha + \boldsymbol{i} \text{ sen } \alpha$$

Estas duas opções permitem-nos converter números da forma algébrica na forma trigonométrica e vice-versa.

- Utiliza a calculadora para converter na forma algébrica os seguintes complexos, e confirma geometricamente os resultados obtidos:

  $z_1 = \text{c}\boldsymbol{i}\text{s } \frac{\pi}{2}$ $\quad z_2 = 2 \text{ c}\boldsymbol{i}\text{s } (-\frac{\pi}{2})$ $\quad z_3 = 3 \text{ c}\boldsymbol{i}\text{s } \pi$ $\quad z_4 = 3 \text{ c}\boldsymbol{i}\text{s } \frac{2\pi}{3}$

- Utiliza a calculadora para converter na forma trigonométrica os seguintes complexos, e confirma geometricamente os resultados obtidos:

  $z_1 = 5\boldsymbol{i}$ $\quad z_2 = 2 - 5\boldsymbol{i}$ $\quad z_3 = -3 + \boldsymbol{i}$

- Resolve os dois exercícios anteriores, mas sem alterar o modo em que estás a trabalhar. Usa a tecla $\boxed{\textbf{MATH}}$ e em **CPX** escolhe **6:▸Rect** ou **7:▸Polar**, conforme as situações.

Para além do aspecto técnico, que tanto pode ser trabalhado com esta proposta como com outra qualquer, esta actividade permite discutir com os alunos questões de notação. É um bom hábito percebermos que as notações, embora necessárias não são únicas nem definitivas, e têm sempre uma razão de ser.

Neste caso, a notação $r.e^{i\theta}$ da calculadora, está relacionada com o facto de ao produto de números complexos corresponder a soma dos seus argumentos, assim como ao produto de potências com a mesma base corresponde a soma de expoentes. Deste modo, a multiplicação de complexos nesta forma

$$r.e^{i\alpha} \times s.e^{i\beta} = (rs)\, e^{i(\alpha+\beta)}$$

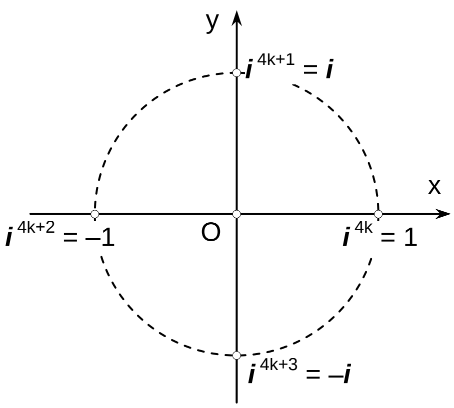
é coerente com as regras para a multiplicação de potências com a mesma base.

Potências de i

Calcula os nove primeiros termos da sucessão das potências de expoente natural de ***i*** e representa no plano complexo os números que obtiveste.

Estabelece uma regra para obter o valor de qualquer potência de ***i***, e justifica-a com base na interpretação geométrica que fizeste.

Parte desta actividade é quase tradicional, o que nos parece de salientar é a conexão com a geometria e as vantagens de interpretação que daí podemos tirar.



Reais ou imaginários?

Entre as afirmações seguintes, há umas verdadeiras e outras falsas. Apresenta argumentos que validem as que são verdadeiras e contra-exemplos para mostrar a falsidade das outras.

- A soma de dois números complexos não reais pode ser um número real.
- Há números complexos não imaginários puros cuja soma é um número imaginário puro.
- O produto de dois números complexos não reais pode ser um número real.
- Há números complexos não imaginários puros cujo produto é um número imaginário puro.
- Uma potência de um número complexo que não é real, é sempre um número complexo que não é real.
- …

Este tipo de proposta de trabalho, em que se pede aos alunos que comentem afirmações, permite muitas explorações e tipos de justificação. Nestes casos há uma grande valorização do papel do contra-exemplo na refutação de uma conjectura. Esta lista de afirmações serve apenas de exemplo para muitas outras que se podem construir, tanto pelo professor como pelos alunos, e podem ir sendo discutidas ao longo de todo o trabalho com números complexos, à medida que vão sendo introduzidas e exploradas as várias operações. Não é demais insistir na faceta experimental, com recurso à calculadora ou não, e na sua interpretação geométrica.

Investigar com a calculadora

Podes utilizar a calculadora para fazeres experiências com números complexos, que te permitam induzir conjecturas. A interpretação geométrica pode dar uma boa ajuda à compreensão das relações envolvidas, mas a demonstração é essencial para termos a certeza de uma propriedade. Faz experiências, interpreta geometricamente e, quando for caso disso, formula conjecturas e demonstra-as, acerca de:

- soma de números complexos conjugados;
- soma de números complexos simétricos;

- módulo da soma de dois números complexos;
- argumento da soma de dois números complexos;
- diferença de números complexos conjugados;
- diferença de números complexos simétricos;
- módulo do produto de dois números complexos;
- argumento do produto de dois números complexos;
- produto de números complexos conjugados;
- módulo do quociente de dois números complexos;
- argumento do quociente de dois números complexos;
- quociente de números complexos conjugados;
- …

Queremos salientar a dimensão experimental desta actividade, explicitamente expressa quando se diz *faz experiências*. Preferimos esta formulação à tradicional em que diríamos logo *Prova que a soma de dois números complexos conjugados é sempre um número real*, por exemplo.

Há aqui também a intenção de dar a possibilidade de surgirem outras propriedades, mesmo que menos poderosas, mas igualmente válidas, e 'descobertas' pelos alunos. Embora se esteja já numa fase avançada da escolaridade, é natural que as relações comecem a ser formuladas numa linguagem natural, e isso deve ser incentivado. Mas esta é uma boa oportunidade para se caminhar para a formalização, para utilização de termos como *teorema, hipótese, tese* e *demonstração* e para o recurso à linguagem simbólica.

Esta actividade está construída à volta dos números conjugados e simétricos, mas é possível encontrar outras características interessantes para exploração. Por exemplo, os números complexos com módulo 1, ou as raízes de determinado índice de um mesmo número, que constituem conjuntos fechados para a multiplicação; o conjunto de todos os complexos com um mesmo argumento, que constitui um conjunto fechado para a adição. Novamente, a interpretação geométrica será uma ferramenta fundamental para a compreensão destas relações.

A actividade que propomos em seguida é para ser resolvida sem o recurso à fórmula de De Moivre para o cálculo das raízes. A forma como está estruturada, apelando à observação das regularidades dos módulos e dos argumentos das raízes, vai permitir explorá-la antes do conhecimento da fórmula de De Moivre, mas tendo já em vista o seu estabelecimento.

Raízes de 1

- Recorda que 1 tem duas raízes quadradas; 1 e –1. Obtém o módulo e o argumento de cada uma destas raízes.
- Verifica que os seguintes números são raízes cúbicas de 1:

$$1 \qquad \frac{-1 + \boldsymbol{i}\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{-1 - \boldsymbol{i}\sqrt{3}}{2}$$

  Obtém o módulo e o argumento de cada uma destas raízes.

- Verifica que os seguintes números são raízes quartas de 1

$$1 \qquad \boldsymbol{i} \qquad -1 \qquad -\boldsymbol{i}$$

  Obtém o módulo e o argumento de cada uma destas raízes.

- Investiga se 1 tem cinco raízes quintas (de ordem cinco).
- Generaliza as conclusões anteriores para as raízes de índice **n** de 1.

Esta observação sistemática das diversas raízes de um número é também um caminho para o reconhecimento, que a fórmula de De Moivre virá formalizar, de que todo o número complexo tem **n** raízes de índice **n**. Esta ideia é considerada por Bento de Jesus Caraça (pág. 158 e 159) como *O último reduto da impossibilidade*. Na discussão das raízes de índice **n**, ou de ordem **n** como outros autores sugerem, surgem os números ciclotómicos de De Moivre, como é apresentado por Conway (pág. 243 e seguintes).

Outras raízes

Com base nas conclusões da investigação sobre raízes de 1, faz uma investigação para:

- as raízes de –1;
- as raízes de outros números reais;

Resolver equações

Em **C**, a radiciação é sempre possível e por isso qualquer equação do 2º grau (de coeficientes reais ou complexos) tem sempre duas soluções complexas, que podem ser obtidas através da fórmula resolvente. Podes introduzir um programa na calculadora que calcule as duas soluções complexas de uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

```
:Disp "AXò+BX+C=0"
:Input "A=?",A
:Input "B=?",B
:Input "C=?",C
:a+bi
:Bò-4ACüD
:Disp "DISCRIMINANTE=",D
:Fix 4
:Disp "X1=",(úB+ð(D))/(2A)åFrac
:Disp "X2=",(úB-ð(D))/(2A)åFrac
:Real
```

Introduz o programa e depois testa-o resolvendo as equações seguintes.

$$x^2 - 4x + 29 = 0$$

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x^2 = -x - 1$$

$$2x^2 + 5x + 4 = 0$$

Este programa foi construído por José Paulo Viana para a calculadora gráfica TI-83, mas é facilmente adaptável a outra calculadora do mesmo tipo.

Os números complexos como vectores

No trabalho com números complexos, uma das ideias mais simples e com mais potencialidades é a da representação dos números complexos por vectores. É simples porque a cada número complexo ***a + bi*** está associado o vector de coordenadas ***(a, b)***. As potencialidades são várias e em perspectivas diferentes. Por um lado, a representação visual dos complexos, a sua comparação, a interpretação das operações com complexos em termos de transformações geométricas ou operações com vectores. Por outro lado, o poder do cálculo algébrico com complexos para resolver problemas geométricos ou de natureza vectorial. Em nossa opinião, estas potencialidades são exploradas através de um trabalho sistemático de interpretação vectorial dos complexos, das suas relações, e das operações que se realizam com eles.

As duas representações numéricas de um número complexo, algébrica e trigonométrica, têm leituras diferentes na interpretação vectorial. A forma algébrica corresponde imediatamente às coordenadas do vector, a forma trigonométrica dá informação directa da norma, da direcção e do sentido do vector.

Módulos, argumentos e vectores

- Representa geometricamente os vectores associados aos seguintes números complexos:

  $z_1 = 5\boldsymbol{i}$ $\quad z_2 = 4 + 3\boldsymbol{i}$ $\quad z_3 = 3 - 4\boldsymbol{i}$ $\quad z_4 = \text{c}\boldsymbol{i}\text{s}\ \frac{\pi}{6}$ $\quad z_5 = 5\ \text{c}\boldsymbol{i}\text{s}\ \frac{\pi}{6}$ $\quad z_6 = 5\ \text{c}\boldsymbol{i}\text{s}(-\frac{5\pi}{6})$

  Que relação existe entre o vector associado e o módulo e o argumento de cada número complexo?
- Representa outros vectores com a norma igual à do vector associado a z_1, e indica os números correspondentes aos vectores que representaste. Escreve uma expressão geral para todos os números complexos associados a vectores com essa norma.
- Representa outros vectores com argumento igual ao do vector associado a z_4, e indica os números correspondentes aos vectores que representaste. Escreve uma

expressão geral para todos os números complexos associados a vectores com esse argumento.

A ideia base desta actividade é trabalhar as relações entre os parâmetros que aparecem nos números complexos – módulo e argumento – e o seu significado na interpretação vectorial. O facto de ser pedida uma expressão geral é uma forma de iniciar logo a abordagem de condições em **C**.

Os números escolhidos para a actividade têm isso em conta, e é fácil obter rapidamente outros números que verifiquem a mesma condição. Para z_1, z_2, z_3, z_5 e z_6 temos $|z| = 5$; para z_4 e z_5 temos $\arg(z) = \frac{\pi}{6}$.

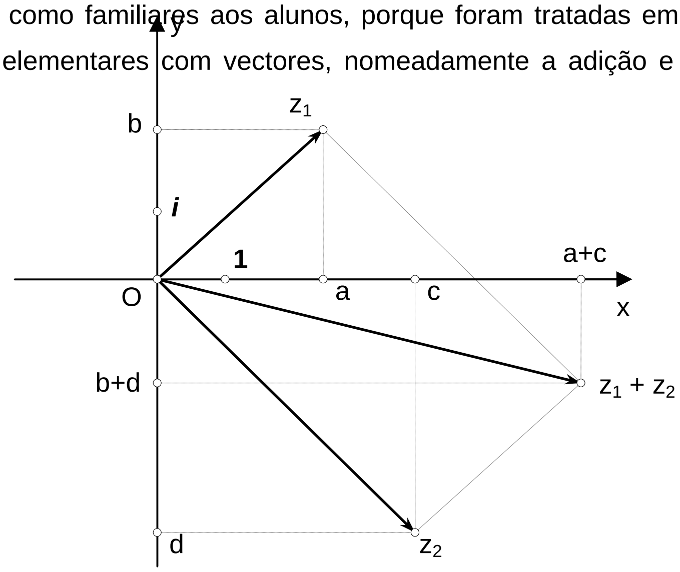
Conhecidas estas relações, há todo um tipo de questões que interessa colocar, relacionadas com transformações geométricas – ver, por exemplo, a actividade *Simétricos e Conjugados*, na página 47.

Adição de números complexos

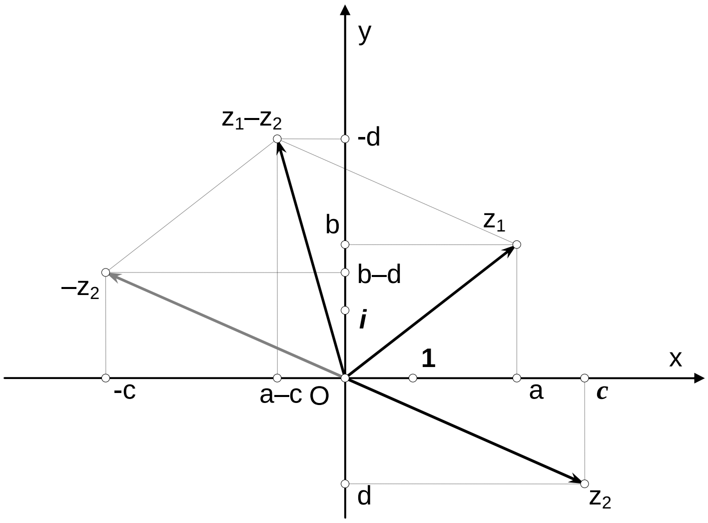
Interpreta vectorialmente, isto é, traduz em termos de operações com vectores:

- a adição de dois números complexos quaisquer, dados na forma algébrica;
- a subtracção de dois números complexos quaisquer, dados na forma algébrica.

Consideramos como familiares aos alunos, porque foram tratadas em anos anteriores, as operações elementares com vectores, nomeadamente a adição e a subtracção de vectores.



A adição de números complexos corresponde, muito convenientemente, à adição de vectores, e a subtracção de números complexos à adição de um vector com o seu simétrico.



Multiplicação de números complexos

Considera um número complexo ***z*** qualquer.

- Representa esse número no plano complexo e representa também o seu produto por

  2 1,5 –1 3 $\frac{1}{2}$ …

  Interpreta vectorialmente o produto de um número complexo por um número real.

- Representa agora produto de ***z*** por

  i 2***i*** 3***i*** –***i*** –3***i*** $\frac{i}{2}$ …

  Interpreta vectorialmente o produto de um número complexo por um imaginário puro.

- Representa também o produto de ***z*** por

  2 + ***i*** 2 + 2***i*** –1+ ***i*** –1 – 3***i*** …

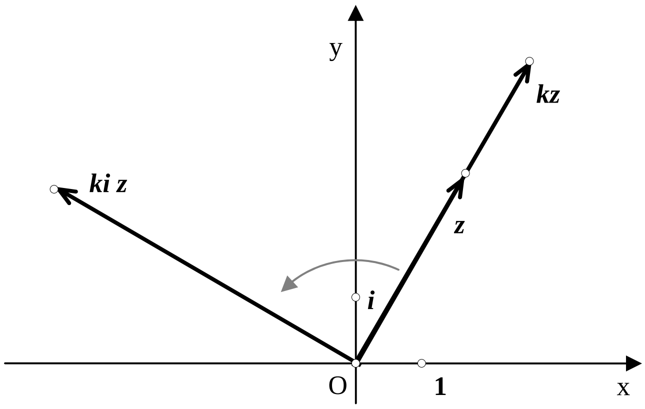
  Interpreta vectorialmente o produto de um número complexo ***z*** = ***a*** + ***bi*** por um número complexo ***c*** + ***di***.

Esta actividade pretende fazer a interpretação vectorial do produto de um número complexo ***z*** = ***a*** + ***bi*** por um número complexo ***c*** + ***di***, sabendo que esta operação não corresponde a nenhuma operação conhecida entre vectores. A própria formulação da actividade está feita de modo a que se considere a representação vectorial do primeiro complexo ***a*** + ***bi*** e que se encare o segundo número complexo ***c*** + ***di*** como um operador, sem lhe fazer corresponder nenhum vector. Também tivemos o cuidado de formular a actividade de modo que o aluno tanto possa optar por começar com um caso particular e acabe por generalizar as interpretações que fizer, como possa começar logo a pensar sobre um caso geral.

O produto de um complexo ***a*** + ***bi*** por um número real qualquer ***k*** corresponde ao produto do vector ***(a, b)*** por esse número real ***k***.

O produto de um complexo ***a + bi*** por ***i*** corresponde à rotação de 90^{o} do vector ***(a, b)***, obtendo-se o vector ***(–b, a)***.[1]

O produto de um complexo ***a + bi*** por um imaginário puro ***ki*** combina as duas operações anteriores: o produto do vector ***(a, b)*** por ***k***, seguida duma rotação de 90^{o} do vector obtido.

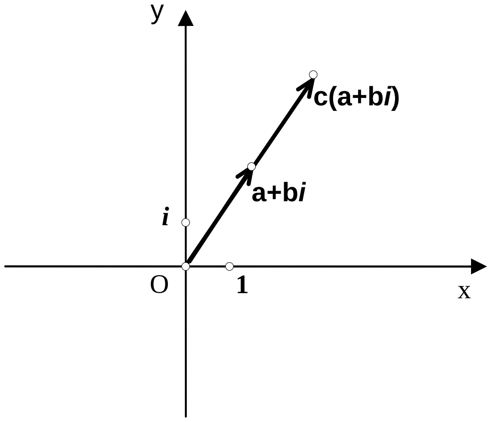


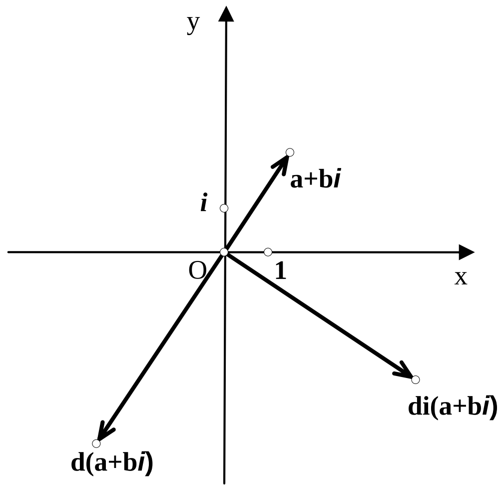
O produto de um complexo ***a + bi*** pelo complexo ***c + di*** é equivalente a

$$c \times (a + bi) + di \times (a + bi)$$

1 Achamos pertinente chamar a atenção para o facto desta interpretação supor um trabalho paralelo sobre as transformações geométricas correspondentes. Ver secção sobre *Números complexos e transformações geométricas*.

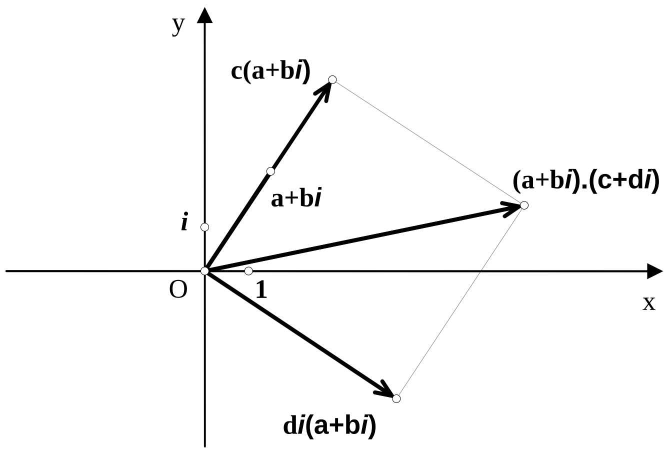
por isso, vectorialmente corresponde a:





1. determinar o produto do vector ***(a, b)*** pelo número real ***c***;

2. determinar o produto do vector ***(a, b)*** pelo número real ***d*** e fazer uma rotação de 90^o ao vector obtido;



3. adicionar os vectores obtidos em **1.** e **2.**

A multiplicação de complexos na forma algébrica tem, assim, uma interpretação vectorial que é complicada, e nem por isso de grande utilidade. Veremos adiante que a multiplicação na forma trigonométrica, e a sua interpretação em termos de transformações geométricas, é uma das operações que dá aos complexos um carácter único de ferramenta poderosa para a resolução de problemas de geometria plana.

Quocientes e vectores

- O quociente entre dois números complexos é um número real.
  Que relação existe entre os vectores que lhes correspondem?
- O quociente entre dois números complexos é um número imaginário puro.
  Que relação existe entre os vectores que lhes correspondem?

Se olharmos para a divisão de complexos como a operação inversa da multiplicação, a resposta a estas questões é praticamente imediata e consequência das conclusões da actividade anterior.

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = k, \text{ com } k \in \mathbf{R}$$

é equivalente a

$$\boldsymbol{z} = k\,\boldsymbol{w}, \text{ com } k \in \mathbf{R}$$

o que significa que os vectores correspondentes a ***z*** e a ***w*** têm a mesma direcção, o mesmo sentido quando ***k*** > 0, e a norma de ***z*** é igual **|*k*|** vezes a norma de ***w***. O facto de o quociente ser real garante-nos o paralelismo (ou colinearidade) dos dois vectores, e é isso que interessa realçar.

Do mesmo modo

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = k\boldsymbol{i}, \text{ com } k \in \mathbf{R}$$

é equivalente a

$$\boldsymbol{z} = k\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{w}, \text{ com } k \in \mathbf{R}$$

o que significa que os vectores correspondentes a ***z*** e a ***w*** têm direcções perpendiculares.

Nesta discussão é permanente a articulação entre dois tipos de questões: qual é a relação entre dois vectores? Qual é a transformação geométrica que transforma um no outro?

Números complexos e transformações geométricas

> *A noção de transformação, que acrescenta uma perspectiva funcional à geometria, passou a constituir um meio poderoso de estudo, de organização dos conceitos geométricos e mesmo de definição de geometria. A capacidade de interpretação e resolução de problemas em geometria aumentou consideravelmente quando passámos a dispor do método das 'transformações geométricas'.*
>
> *Eduardo Veloso, Geometria – Temas Actuais, p.60*

Por estas razões apontadas por Eduardo Veloso, as transformações geométricas mereceriam, a nosso ver, um tratamento mais profundo e mais significativo nos programas de Matemática dos vários ciclos. Não é aqui o lugar para discutir esta questão, mas é pertinente levantá-la para promover alguma reflexão no sentido de termos uma perspectiva crítica do currículo de Matemática na sua globalidade, e de orientarmos decisões sobre as nossas práticas de acordo com essa perspectiva. Por exemplo, no desenvolvimento do tema *Números Complexos*, está nas mãos do professor optar por dar mais peso à prática do cálculo ou, pelo contrário, valorizar as conexões com a geometria e o trabalho com as transformações geométricas. Subjacentes a estas duas opções há valorizações diferentes dos pré-requisitos que os alunos devem ter. Em nosso entender, as duas opções referidas correspondem a posições bastante diferentes sobre a natureza da matemática e sobre o papel da matemática na formação dos alunos.

Embora as transformações geométricas sejam um assunto que foi tratado só no 3º ciclo e, aparentemente esquecido quando os alunos chegam ao 12º ano, muitos aspectos da sua linguagem têm sido trabalhados nas funções, quando se investiga a influência de alguns parâmetros nos gráficos. Os números complexos proporcionam mais uma oportunidade para trabalhar as transformações geométricas e a ideia de simetria, tão centrais em matemática, e até para esclarecer algumas coisas relacionadas com elas. Simultaneamente, as transformações geométricas são indispensáveis para uma boa compreensão destes números e das suas utilizações dentro da matemática.

Por todas estas razões, e no que respeita às transformações geométricas, parece-nos oportuno começar por sistematizar algumas ideias fundamentais, esclarecer aspectos de linguagem e estabelecer as conexões úteis, sem deixar de apelar à consulta de bibliografia adequada.

Sobre as transformações geométricas

As transformações geométricas que vão ter interesse no tratamento dos complexos são as isometrias mais comuns – translação, rotação e reflexão – e as homotetias. Todas elas são bijecções do plano sobre si mesmo, sendo que as isometrias preservam as distâncias enquanto as homotetias apenas preservam as razões entre as distâncias.

Apresentamos as definições de algumas transformações, quase sempre segundo Eduardo Veloso (Veloso, 1998, pág.72 e seguintes):

Translação – dado um vector $\vec{v}$, chama-se *translação* definida pelo vector $\vec{v}$ a transformação **T**, de $\mathbf{R}^2$ sobre si mesmo, tal que, qualquer que seja o ponto A de $\mathbf{R}^2$ se tem **T**(A) = A + $\vec{v}$.
A translação inversa de **T** é a translação definida pelo vector $-\vec{v}$.

Rotação – dado um ponto O e um ângulo α, chama-se *rotação* de centro O e amplitude α a transformação **T**, de $\mathbf{R}^2$ sobre si mesmo, tal que, se A for um ponto qualquer de $\mathbf{R}^2$ e que A' = **T**(A), $\overline{AO} = \overline{A'O}$ e a amplitude do $\angle$ AOA' é igual a α.
A transformação inversa da rotação **T** (de centro O e amplitude α) é a rotação de centro O e amplitude $-\alpha$.

Reflexão ou simetria axial – dada uma recta e, chama-se *reflexão* de eixo e a transformação **T**, de $\mathbf{R}^2$ sobre si mesmo, tal que, qualquer que seja o ponto A de $\mathbf{R}^2$, a mediatriz do segmento AA', com A' = **T**(A), é a recta e.
A inversa de uma reflexão é ela própria.

Meia-volta (simetria central) – dado um ponto O de $\mathbf{R}^2$, chama-se *meia-volta* de centro O a rotação de 180^o em torno de O.
A inversa de uma meia-volta é ela própria.

Homotetia – dado um número real *r* e um ponto O de $\mathbf{R}^2$, chama-se *homotetia* de razão *r* e centro O a transformação **T**, de $\mathbf{R}^2$ sobre si mesmo, tal que, se A for um ponto qualquer de $\mathbf{R}^2$, $\overrightarrow{OA'} = r\,\overrightarrow{OA}$, com A' = **T**(A).

A transformação inversa da homotetia de centro O e razão *r* é a homotetia com o mesmo centro O e razão $\frac{1}{r}$.

Uma homotetia de razão positiva também se chama *dilação*.

É importante notar algumas diferenças na linguagem, relativamente à que herdámos da Matemática Moderna. As transformações que antes se designavam por simetrias, chamam-se agora reflexão (simetria axial) e meia-volta (simetria central); a mudança tem a ver com o facto de *simetria* ser hoje um conceito muito mais lato que importa não confundir com aquelas transformações geométricas em particular. Além disso, aproximamo-nos assim muito mais dos termos utilizados em inglês e em francês. O interesse do termo *dilação* tem a ver com os programas de geometria dinâmica, que utilizam esta transformação geométrica e não a homotetia.

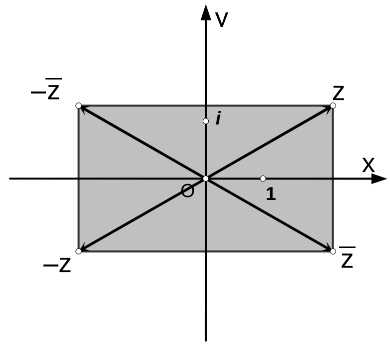
Operações com complexos e transformações geométricas

Em muitas situações, as transformações geométricas aparecem como um instrumento útil à interpretação de relações entre números complexos, mesmo que não seja explícita a necessidade de os representar geometricamente.

Simétricos e conjugados

- Que relação existe entre os módulos e entre os argumentos de dois números complexos conjugados ***a + bi*** e ***a – bi***?
- Que relação existe entre os módulos e entre os argumentos de dois números complexos simétricos ***a + bi*** e ***– a – bi***?
- Que relação existe entre os módulos e entre os argumentos de um número complexo e do simétrico do seu conjugado?
- Qualquer é a figura cujos vértices são as representações geométricas dos números ***a + bi***, ***a – bi***, ***– a + bi*** e ***– a – bi***?

Estas questões devem ser colocadas primeiro para alguns casos particulares e deixar que sejam os alunos a generalizar as conclusões. Uma abordagem puramente algébrica das três primeiras questões reduz-se a uma manipulação simbólica, sem qualquer significado. Abordá-las através de uma interpretação geométrica proporciona-nos imagens significativas que nos ajudam a compreender as relações envolvidas. No caso da primeira questão, mudar o sinal da parte imaginária traduz-se na reflexão relativamente ao eixo real, e mostra-nos imediatamente que os argumentos são também simétricos, que os módulos são iguais e que estas relações são válidas para qualquer complexo.



Depois de *ver*, no verdadeiro sentido desta palavra, estas relações, a abordagem algébrica pode ser trabalhada para ampliar a compreensão. E isto porque também consideramos que a abordagem algébrica é necessária e permite ir muito mais longe, se tiver sido construída numa base de significados diversos.

Rectângulos especiais

Sendo **z** = ***a + bi***, investiga a relação que deve existir entre ***a*** e ***b*** para que a figura cujos vértices são as representações geométricas dos números z, $\bar{z}$, $-z$ e $-\bar{z}$ seja:

- um quadrado
- um rectângulo em que uma das dimensões é o dobro da outra
- um rectângulo de ouro
- um rectângulo de área ***k***
- um rectângulo de perímetro ***p***

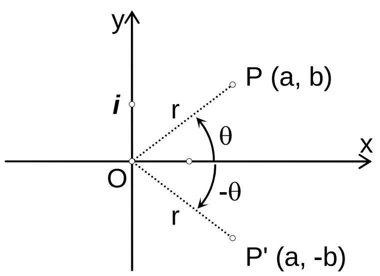
Esta actividade é uma extensão da anterior, que reforça a ligação entre simetrias nos números complexos e simetrias nas figuras.

Reflexões e meias-voltas

- Representa no plano complexo o número **z = 3 + 4*i***, e os pontos simétricos deste relativamente a cada um dos eixos e à origem do referencial. Escreve na forma algébrica e na forma trigonométrica os números complexos correspondentes a todos os pontos representados.
- As transformações geométricas operadas – reflexão segundo Ox, reflexão segundo Oy, e meia-volta com centro na origem – correspondem a relações entre números complexos. Identifica essas relações, identificando também as relações respectivas entre as partes reais, as partes imaginárias, os módulos e os argumentos.
- Generaliza as conclusões da questão anterior a qualquer complexo da forma **z** = a + b***i*** = r (cos θ + ***i*** sen θ)..

Uma forma sintética e útil de organizar as conclusões desta actividade é:

Reflexão segundo Ox ↔ conjugado



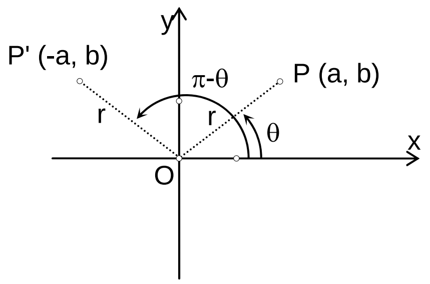
$\mathrm{Re}\ \overline{z} = \mathrm{Re}\ z$

$\mathrm{Im}\ \overline{z} = -\mathrm{Im}\ z$

$|\overline{z}| = |z|$

$\arg \overline{z} = -\arg z$

Reflexão segundo Oy ↔ simétrico do conjugado



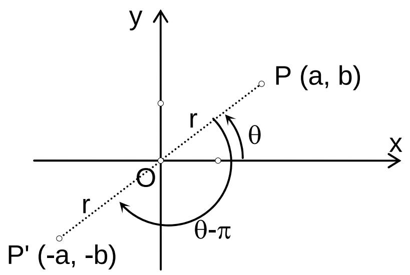
$\mathrm{Re}\ (-\overline{z}) = -\mathrm{Re}\ z$

$\mathrm{Im}\ (-\overline{z}) = \mathrm{Im}\ z$

$|-\overline{z}| = |z|$

$\arg (-\overline{z}) = \pi - \arg z$

Meia-volta com centro em O $\leftrightarrow$ simétrico



Re (-z) = – Re z

Im (-z) = – Im z

|-z| = |z|

arg (-z) = arg z – π

Transformações com i

- Representa no plano complexo o triângulo **ABC** cujos vértices correspondem aos números complexos

$$\mathbf{z_A} = 3 + 4\boldsymbol{i} \qquad \mathbf{z_B} = 1 + 2\boldsymbol{i} \qquad \mathbf{z_C} = 5 + \boldsymbol{i}$$

- Representa, no mesmo referencial, o triângulo A'B'C', cujos vértices correspondem aos seus produtos por ***i***:

$$\boldsymbol{i}\,\mathbf{z_A} \qquad \boldsymbol{i}\,\mathbf{z_B} \qquad \boldsymbol{i}\,\mathbf{z_C}$$

  Existe alguma isometria entre o triângulo ABC e o triângulo A'B'C'?

  Escreve na forma algébrica e na forma trigonométrica os números complexos correspondentes aos pontos representados e compara a de cada número com a do seu produto por ***i***.

  Generaliza as conclusões da questão anterior ao produto por ***i*** de qualquer complexo da forma ***z*** = a + b***i*** = r (cos θ + ***i*** sen θ).

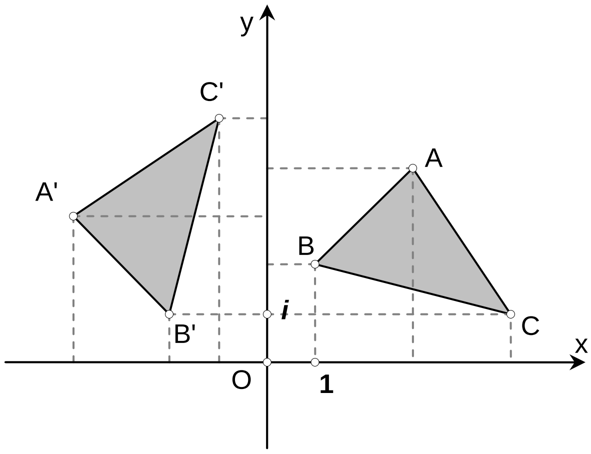
- Faz um estudo análogo ao anterior para o quociente por ***i*** de qualquer complexo da forma ***z*** = a + b***i*** = r (cos θ + ***i*** sen θ).

Apesar de reconhecermos que abreviar (cos θ + ***i*** sen θ) utilizando c***i***s θ pode ser útil na medida em que poupa tempo e escrita, chamamos a atenção para o facto de a abreviatura fazer perder o significado da expressão, tão importante quando se põe o foco na interpretação geométrica. Não se deve adoptar a expressão c***i***s θ e nunca mais retomar a que lhe deu origem e que é significativa.

$z_{A'} = \boldsymbol{i}\, z_A = -4 + 3\,\boldsymbol{i}$

$z_{B'} = \boldsymbol{i}\, z_B = -2 + \boldsymbol{i}$

$z_{C'} = \boldsymbol{i}\, z_A = -1 + 5\,\boldsymbol{i}$



A figura sugere logo uma rotação de centro em O e amplitude 90°, mas é preciso provar que é essa a isometria que transforma o triângulo ABC no A'B'C'. De facto, o produto por ***i*** faz trocar a parte real com a parte imaginária, trocando o sinal de uma delas, o que em termos de coordenadas de vectores, significa que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA'}$ são perpendiculares e têm a mesma norma, e o mesmo se pode afirmar para os outros pares de vectores.

Trabalhámos na forma algébrica e na representação vectorial correspondente. Mas se trabalharmos com os números na forma trigonométrica, mesmo com valores aproximados dos argumentos, chegamos exactamente à mesma conclusão:

$z_A = 5\ c\boldsymbol{i}s\ 0{,}927$	$z_{A'} = 5\ c\boldsymbol{i}s\ 2{,}498$	$2{,}498 - 0{,}927 = 1{,}571$
$z_B = \sqrt{5}\ c\boldsymbol{i}s\ 1{,}107$	$z_{B'} = \sqrt{5}\ c\boldsymbol{i}s\ 2{,}678$	$2{,}678 - 1{,}107 = 1{,}571$
$z_C = \sqrt{26}\ c\boldsymbol{i}s\ 0{,}197$	$z_{C'} = \sqrt{26}\ c\boldsymbol{i}s\ 1{,}768$	$1{,}768 - 0{,}197 = 1{,}571$

Podemos observar que os módulos se mantêm e os argumentos aumentam sempre cerca de 1,571 radianos, ou seja $\frac{\pi}{2}$.

Duma maneira geral, se $z_P = a + b\,\boldsymbol{i}$ então $\boldsymbol{i}\, z_P = -b + a\,\boldsymbol{i}$

o que significa que os vectores $\overrightarrow{OP}$ (a, b) e $\overrightarrow{OP'}$ (–b, a), são perpendiculares e com a mesma norma.

Se $z_P = r\ c\boldsymbol{i}s\ \theta$ então $\boldsymbol{i}\, z_P = (c\boldsymbol{i}s\,\frac{\pi}{2}) \times (r\ c\boldsymbol{i}s\ \theta) = r\ c\boldsymbol{i}s\,(\theta + \frac{\pi}{2})$.

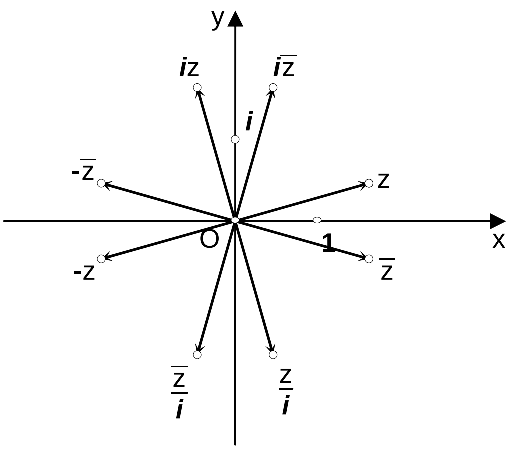
Donde se conclui que à operação *produto por **i*** corresponde a transformação geométrica *rotação de centro na origem e amplitude* $\frac{\pi}{2}$.

Se tivermos em atenção que a divisão é a operação inversa da multiplicação, e que a transformação inversa da rotação de centro O e amplitude α é a rotação de centro O e amplitude $-\alpha$, concluímos imediatamente que à operação *divisão por **i*** corresponde a transformação geométrica *rotação de centro na origem e amplitude* $-\frac{\pi}{2}$.

Interpretações geométricas

Num mesmo referencial representa $\mathbf{z}$, $\overline{\mathbf{z}}$, $-\mathbf{z}$, $-\overline{\mathbf{z}}$, $i\mathbf{z}$, $\frac{\mathbf{z}}{i}$, $i\overline{\mathbf{z}}$, $\frac{\overline{\mathbf{z}}}{i}$.

- A partir da figura obtida pode concluir-se que $i\mathbf{z}$ e $\frac{\mathbf{z}}{i}$ são números simétricos. Com base nas transformações geométricas, interpreta e valida esta observação.
- A partir da figura estabelece outras relações deste tipo e valida-as interpretando-as com base nas transformações geométricas.



Estas situações ganham bastante com a interpretação geométrica, mas também podem ser demonstradas algebricamente de modo muito acessível. Consideramos que devem ser exploradas em várias perspectivas, porque a interpretação geométrica é mais rica em significados e a demonstração algébrica é mais rigorosa e formal.

Lugar geométrico

Quais são conjuntos de pontos do plano complexo que verificam as condições:

$$\boldsymbol{i}\, z = \overline{z} \qquad\qquad \frac{z}{\boldsymbol{i}} = \overline{z}$$

Para que o ponto que se obtém por rotação de 90^{o} seja o simétrico relativo ao eixo real, é preciso que o ponto original esteja numa recta que faz -45^{o} com o eixo real. Por isso o conjunto de pontos que verificam a primeira equação é a bissectriz dos quadrantes ímpares.

Analogamente se chegaria à conclusão que os pontos da bissectriz dos quadrantes ímpares são os que verificam a segunda condição.

Seria interessante desenvolver bastante mais as conexões entre operações em **C** e transformações geométricas, porém o programa não aponta para isso. Para o seu aprofundamento sugerimos a leitura das páginas 323 a 326 do livro *Geometria – Temas Actuais* (Veloso, 1998). De qualquer forma, consideramos pertinente fazer um quadro-resumo das operações com complexos e das correspondentes transformações geométricas, até porque a compreensão destas relações pode vir a mostrar-se muito útil na interpretação das condições em **C**.

Convém notar previamente que as operações com complexos têm naturezas diferentes – umas são operações binárias e outras operações unárias. Para as traduzir como transformações geométricas, elas têm que ser todas interpretadas como operações unárias ou operadores.

Por exemplo, na adição de dois complexos **z** e **w**, um deles será interpretado como o ponto que se vai transformar e o outro como o vector que define a translação.

A adição como operação binária é uma função que a cada par de $\mathbf{C}^2$ faz corresponder um elemento de **C**:

$$(z, w) \mapsto z+w$$

Mas as transformações geométricas são aplicações do plano complexo no plano complexo, por isso interpretamos a 'adição com **w**' como uma operação unária

$$z \mapsto z+w$$

em que w define a operação. Traduzindo para a linguagem das transformações, w é o vector que define a translação, aplicada num ponto z do plano complexo.

Operações em C	**Transformações geométricas**
Conjugado de um número complexo $z \mapsto \overline{z}$	Reflexão segundo o eixo real
Simétrico de um número complexo $z \mapsto -z$	Meia- volta de centro O
Adição de um número complexo com ***w*** $\in$ **C** $z \mapsto z + w$	Translação segundo $\vec{w}$
Multiplicação de um número complexo por **k** $\in$ **R** $z \mapsto k\,z$	Homotetia de centro O e razão k
Multiplicação de um número complexo por **c*i*s** $\theta \in$ **C** $z \mapsto z \times \text{c}i\text{s}\,\theta$	Rotação de centro O e amplitude θ

Estas cinco operações básicas são suficientes para interpretar geometricamente todas as operações com complexos com que precisamos de trabalhar. Basta interpretar algumas operações como inversas de alguma destas, e recorrer à transformação geométrica inversa, e outras como compostas de várias operações e recorrer à composta das transformações geométricas correspondentes.

Por exemplo, a *divisão de um número complexo por c**i**s θ* corresponde à *rotação de centro O e amplitude -θ*. A *multiplicação de um número complexo por **w** = r c**i**s θ*, que é a composta de *multiplicação de um número complexo por r* e *multiplicação de um número complexo por c**i**s θ*, corresponde à *homotetia de centro O e razão r seguida de rotação de centro O e amplitude θ*. A estas transformações, compostas de dilação com rotação, chama Conway um “twirl” (em português, torção) (Conway, p.231).

Geometria e números complexos

Os números complexos, e as operações entre eles, traduzem pontos, vectores e transformações geométricas. São por isso um elemento unificador das linguagens e dos processos geométricos, e ao mesmo tempo facilitador, na medida em que o cálculo algébrico é muito simples e poderoso.

Um número complexo pode ser um número, um ponto ou um vector; operar com números complexos é tão fácil como operar com outros números quaisquer e pode traduzir operações com vectores ou transformações geométricas de pontos. Por outro lado, um ponto do plano pode sempre ser representado por um número complexo, e conjuntos de pontos podem ser representados por condições em **C**; também, como vimos, uma transformação geométrica do plano pode ser traduzida em termos de operações com complexos.

Esta unificação e a facilidade que ela representa pode ser ilustrada em muitas situações e permite construir actividades interessantes.

Quando trabalhámos com pontos e vectores, concluímos que o ponto médio M de um segmento de recta AB é dado por

$$M = A + \frac{1}{2}(B - A)$$

Esta expressão só era simplificável e manipulável algebricamente após a substituição dos pontos pelas suas coordenadas, já que, por exemplo, $\frac{1}{2}B$ não tem significado. Ao podermos considerar que A e B representam também números complexos, podemos utilizar livremente as propriedades das operações para simplificar aquela expressão

$$z_M = z_A + \frac{1}{2}(z_B - z_A)$$

$$z_M = z_A + \frac{1}{2}z_B - \frac{1}{2}z_A$$

$$z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$$

Na expressão que simplificámos fizemos uma substituição de variáveis para chamar a atenção de que passámos a trabalhar com números complexos e não com pontos, mas ela não é necessária desde que seja bem claro com que objectos estamos a trabalhar.

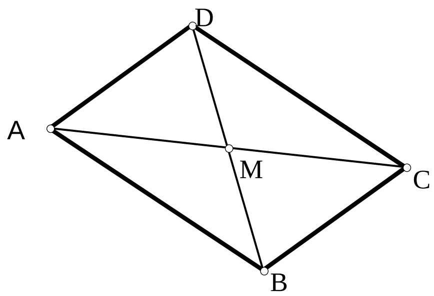
Sobre as diagonais de um paralelogramo

Mostra que se as diagonais de um quadrilátero se bissectam, ele é um paralelogramo.

Esta propriedade é a recíproca de uma bastante familiar aos alunos. Optámos por propor a sua resolução porque nos parece que os complexos facilitam a demonstração e porque é sempre mais interessante demonstrar uma propriedade nova. A distinção entre um teorema e o seu recíproco pode ser uma boa oportunidade para esclarecer questões de lógica: o facto de sabermos que *em qualquer paralelogramo as diagonais se bissectam* não é suficiente para concluir que *se as diagonais de um quadrilátero se bissectam então ele é um paralelogramo*. Ao demonstrarmos os dois teoremas recíprocos, fica estabelecida a equivalência entre *ser paralelogramo* e *ser um quadrilátero cujas diagonais se bissectam*, o que significa que esta segunda propriedade pode ser utilizada como definição de paralelogramo.

A construção, num programa de geometria dinâmica, do quadrilátero a partir das diagonais que têm um ponto médio em comum é uma boa forma de interpretar este teorema e de o distinguir do seu recíproco.

Hipótese: M é o ponto médio do segmento AC e M é o ponto médio do segmento DB



Tese: O quadrilátero ABCD é um paralelogramo

Demonstração:

Considerando um referencial do plano e os números complexos z_A, z_B, z_C, z_D e associados aos pontos, tem-se

$$z_M = \frac{z_A + z_C}{2} \quad \text{e} \quad z_M = \frac{z_B + z_D}{2}$$

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2}$$

$$z_A + z_C = z_B + z_D \qquad (1)$$

Desta igualdade obtemos

$$z_A - z_B = z_D - z_C$$

que significa que os vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais, e portanto que os segmentos AB e CD são paralelos.

Da igualdade (1) tira-se também que

$$z_C - z_B = z_D - z_A$$

que significa que os vectores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são iguais, e portanto que os segmentos BC e AD são paralelos.

Podemos concluir que o quadrilátero ABCD tem os lados paralelos dois a dois e por isso é um paralelogramo.

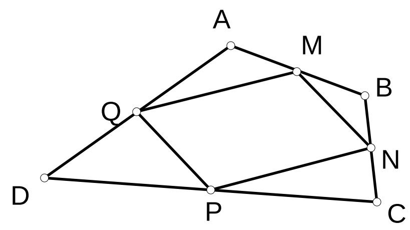
É pertinente notar que a igualdade dos vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{CD}$ já nos garantia que o quadrilátero era um paralelogramo se aceitássemos como definição, ou como teorema já demonstrado, que um paralelogramo é um quadrilátero com dois lados paralelos e congruentes. Estamos aqui a abordar levemente a problemática da demonstração em organizações locais da geometria, que está bastante mais desenvolvida na publicação *Geometria a partir de Múltiplas Perspectivas*, da colecção Adendas do N.C.T.M., nas páginas 70 e seguintes.

O velho problema dos pontos médios dos lados de um quadrilátero

Mostra que num quadrilátero qualquer os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.

Embora este problema tenha sido já abordado a propósito de outros temas (Brochura de Geometria do 10º ano, páginas 116-117), não quisemos perder a oportunidade de revisitá-lo, enriquecendo-o com uma outra possibilidade de exploração, a perspectiva unificadora dos complexos.

Para simplificar, vamos trabalhar com a mesma designação para cada ponto e para o número complexo que ele representa num referencial fixado. Neste caso, os números complexos A, B, C, D, M, N, P e Q. Também para simplificar, vamos já traduzir a hipótese e a tese em linguagem de números complexos e da maneira mais económica possível.



Hipótese: $M = \frac{A+B}{2}$; $N = \frac{B+C}{2}$; $P = \frac{C+D}{2}$ e $Q = \frac{D+A}{2}$

Tese: $N - M = P - Q$

Demonstração:

$$N - M = \frac{B+C}{2} - \frac{A+B}{2} = \frac{B+C-A-B}{2} = \frac{C-A}{2}$$

$$P - Q = \frac{C+D}{2} - \frac{D+A}{2} = \frac{C+D-D-A}{2} = \frac{C-A}{2}$$

logo

$$N - M = P - Q$$

Chamamos a atenção para o facto de termos transformado toda a demonstração, incluindo a hipótese e a tese, num encadeado de cálculos algébricos. É um exemplo de como a álgebra pode ser útil e simples. No entanto é importante compreendermos também que este tipo de demonstrações formais, que se reduzem a manipulações simbólicas, não explicam as relações envolvidas no teorema, apenas servem para o validar, sem acrescentar nada à compreensão dos objectos e ideias matemáticos envolvidos.

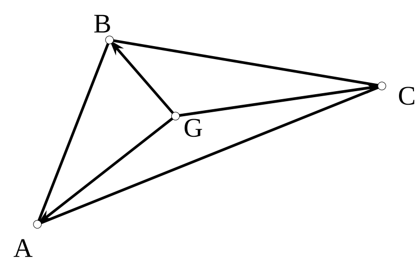
Baricentro de um triângulo

O baricentro, ou centro de gravidade, de um triângulo é o ponto de apoio em que se consegue equilibrar o triângulo, se considerarmos que a sua massa está distribuída de forma homogénea. Matematicamente, a definição que melhor traduz esta ideia é:

O baricentro de um triângulo ABC é o ponto G tal que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

- Obtém uma expressão para calcular o baricentro, a partir dos vértices do triângulo, quando se trabalha com números complexos.
- Mostra que o baricentro é um ponto da mediana – ou seja, que é colinear com cada vértice e o ponto médio do lado oposto – e que a divide em dois segmentos que estão entre si na razão 2:1.

Optámos por esta definição de baricentro por ela permitir uma tradução mais imediata para a linguagem dos números complexos e por ser facilmente generalizável a qualquer polígono. Além disso é a definição mais próxima da utilizada na Física, só que em Geometria temos a liberdade de considerar todas as massas unitárias, o que é o mesmo que dizer que nos abstraímos da massa.



Partindo da igualdade que adoptámos para definição

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

e sendo A, B, C e G os complexos que correspondem aos pontos com o mesmo nome, temos

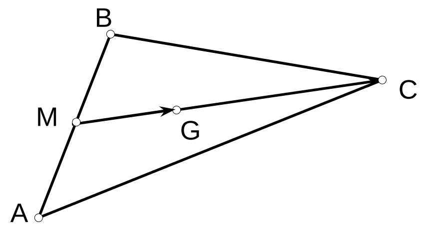
$$A - G + B - G + C - G = 0$$

$$A + B + C = 3G$$

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C)$$

Concluímos assim que o complexo que representa o baricentro é a média aritmética simples dos complexos que representam os vértices do triângulo. Na Física, o baricentro de um sistema de 3 pontos é a média aritmética ponderada de acordo com as massas dos pontos.

Passando à segunda parte da questão:



Se M for o ponto médio do lado AB, oposto ao vértice C

$$M = \frac{1}{2}(A + B)$$

$$G - M = \frac{1}{3}(A + B + C) - \frac{1}{2}(A + B)$$

$$= \frac{2C - A - B}{6}$$

$$C - G = C - \frac{1}{3}(A + B + C)$$

$$= \frac{2C - A - B}{3}$$

Donde se conclui imediatamente que $\frac{C - G}{G - M} = 2$, o que significa que os vectores $\overrightarrow{GC}$ e $\overrightarrow{MG}$ são paralelos e os seus comprimentos estão na razão 2:1. Então o ponto G é colinear com os pontos M e C e divide o segmento MC, uma mediana do triângulo, em dois segmentos GC e MC em que o primeiro tem o dobro do comprimento do segundo.

A demonstração de que o ponto G pertence também às outras medianas e as divide em segmentos na mesma razão, é análoga a esta e é imediata, porque basta rodar as letras entre si. Podemos assim concluir que o baricentro, como o definimos, é o ponto de encontro das três medianas do triângulo, e a sua distância a cada vértice é igual a $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana respectiva.

Notamos assim que partimos duma definição menos usual de baricentro de um triângulo e demonstrámos como teorema a propriedade que frequentemente é utilizada para a sua definição. A definição vectorial de baricentro de um triângulo é generalizável a qualquer polígono, e é um bom ponto de partida para actividades de investigação sobre as relações geométricas do baricentro com outros elementos dos polígonos, utilizando a ferramenta dos complexos. A definição geral será o baricentro como média aritmética dos números complexos que representam os vértices do polígono, isto é, para um polígono com n lados e vértices A_i, i = 1, …, n, será

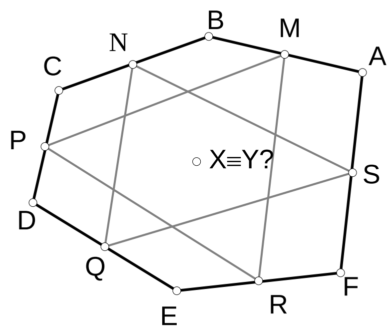
$$G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i$$

As demonstrações que temos vindo a fazer parecem levar-nos a rotinas de cálculo sem grande interesse para os alunos. Uma forma de não cair nessa tentação, é propor pequenas investigações a realizar, de preferência, em ambientes de geometria dinâmica. Assim, serão os alunos a descobrir relações geométricas, formulando conjecturas que poderão demonstrar traduzindo para a linguagem dos complexos. A demonstração passa a ser só uma parte do processo e ganha significado no contexto que se está a investigar. A actividade seguinte ilustra estas preocupações.

Baricentros num hexágono

Dado um hexágono qualquer, unindo os pontos médios de lados alternados obtemos dois triângulos. Descobre possíveis relações entre os baricentros destes dois triângulos e o baricentro do hexágono, e demonstra todas as relações que estabeleceres.

A construção dos baricentros dos dois triângulos num programa de geometria dinâmica, mostra-nos imediatamente que os baricentros dos dois triângulos coincidem.



Hipótese: M, N, P, Q, R e S são os pontos médios dos lados do hexágono ABCDEF; X é o baricentro do triângulo MPR e Y o baricentro do triângulo NQS.

Tese: X ≡ Y

Demonstração:

Considerando estes pontos no plano complexo e traduzindo para o cálculo com complexos, teremos:

$$M = \frac{1}{2}(A + B) \qquad P = \frac{1}{2}(C + D) \qquad R = \frac{1}{2}(E + F)$$

o baricentro do triângulo MPR corresponde ao complexo

$$X = \frac{1}{3}(M + P + R)$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(C + D) + \frac{1}{2}(E + F)\right]$$

$$X = \frac{1}{6}(A + B + C + D + E + F)$$

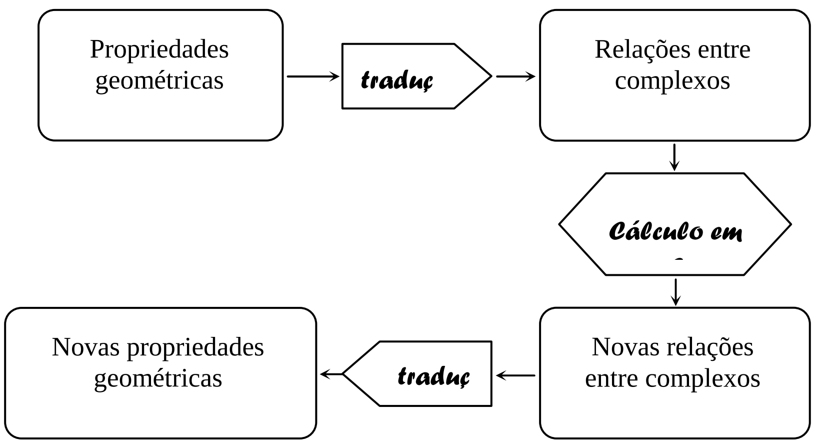
Analogamente se demonstra que

$$Y = \frac{1}{6}(A + B + C + D + E + F)$$

e pode concluir-se que $X \equiv Y$, como queríamos demonstrar. Mais ainda, a expressão que obtivemos mostra-nos que os baricentros dos dois triângulos coincidem com o baricentro do hexágono.

As relações que explorámos são válidas, com as devidas adaptações, para dois quadriláteros construídos a partir dos pontos médios de um octógono. É interessante investigar para que outros polígonos se podem estabelecer relações do mesmo tipo.

Estas actividades ilustram bem como a álgebra dos complexos pode ser utilizada, para demonstrar propriedades geométricas conhecidas e para descobrir relações novas, como foi o caso do baricentro do hexágono, que ainda não tínhamos investigado, mas



apareceu como expressão para os baricentros dos triângulos. O quadro que apresentamos, adaptado de Artigues (p. 91), ilustra os processos que estão em jogo quando utilizamos os complexos como ferramenta para trabalhar a geometria.

As actividades que propomos a seguir podem proporcionar aos alunos boas investigações em geometria.

O baricentro de um polígono qualquer

Se ABCD… for um polígono de n lados, define-se baricentro do polígono o ponto G tal que

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\ldots=\vec{0}$$

- Encontra uma expressão para calcular o baricentro a partir dos vértices do polígono, quando trabalhamos no plano complexo.
- Sabemos que num triângulo o baricentro é o ponto de encontro das medianas. Num quadrilátero também é possível definir mediana. Encontra uma definição coerente para mediana de um quadrilátero e estuda relações geométricas entre as medianas e o baricentro nos vários tipos de quadriláteros que conheces.

A definição usual de mediana de um quadrilátero é *o segmento de recta que une os pontos médios de dois lados opostos*. Em qualquer quadrilátero, o baricentro é o ponto de encontro das medianas e divide-as ao meio.

Uma breve incursão por um programa de geometria dinâmica ajuda a ver como possíveis generalizações das definições de mediana, para polígonos com mais de quatro lados, deixam de ter alguma relação com o baricentro.

Os pontos médios dos lados de um pentágono

São dados 5 pontos P, Q, R, S e T, que são os pontos médios dos lados de um pentágono. Determina os vértices do pentágono.

O problema tem sempre solução? A solução é única?

Estuda um problema análogo para um polígono qualquer.

Adaptado de *'Complex Numbers & Geometry'*, de Liang-shin Hahn

Num pentágono qualquer, ABCDE, no plano complexo, os pontos médios ficam definidos pelas expressões que relacionam os números que os representam

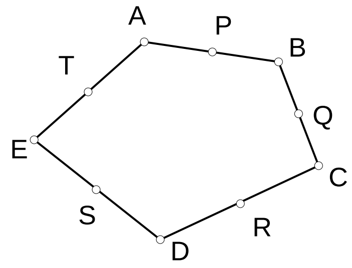
$$P = \frac{1}{2}(A + B)$$

$$Q = \frac{1}{2}(B + C)$$

$$R = \frac{1}{2}(C + D)$$

$$S = \frac{1}{2}(D + E)$$

$$T = \frac{1}{2}(E + A)$$



Donde,

$$P - Q + R - S + T = \frac{1}{2}[(A + B) - (B + C) + (C + D) - (D + E) + (E + A)]$$

$$P - Q + R - S + T = \frac{1}{2}(A + A) = A$$

o que nos dá o ponto A em função dos pontos médios. Obtido o ponto A, os outros obtêm-se facilmente por somas de pontos e vectores, como por exemplo

$$B = P - (A - P)$$

Para além das vantagens que já mencionámos atrás, o trabalho com complexos tem potencialidades que não existem no espaço vectorial R^2. Recordamos que, para além de espaço vectorial sobre R, (C, +, $\times$) é um corpo e, por isso mesmo, muito mais rico em termos de operações. Uma operação que não existe no conjunto dos vectores do plano é a multiplicação, mas ela está definida no conjunto **C** e traduz transformações geométricas nas quais se incluem as rotações. Particularmente, a multiplicação por ***i*** para determinar vectores perpendiculares, pode facilitar muito como veremos na actividade seguinte. Pensamos que é já um problema clássico, visto que é proposto em quase todos os livros sobre números complexos, embora com formulações diversas.

O tesouro enterrado

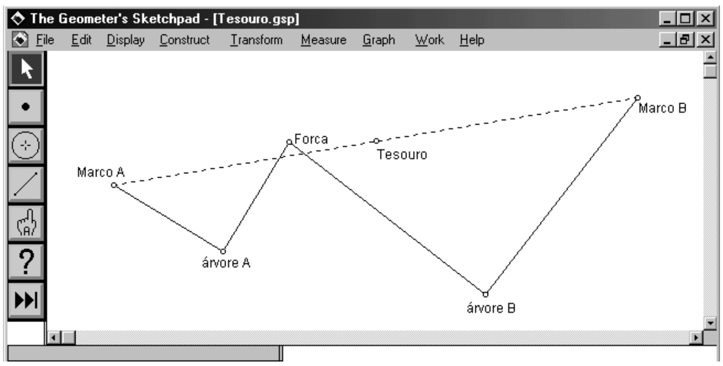
Um velho pergaminho, que descrevia o local onde piratas enterraram um tesouro numa ilha deserta, dava as seguintes instruções:

> *Na ilha só há duas árvores, A e B, e os restos de uma forca.*
> *Comece na forca e conte os passos necessários para ir, em linha recta, até à árvore A. Quando chegar à árvore, rode 90^o para a esquerda e avance o mesmo número de passos. No ponto em que parou, coloque um marco no chão.*
> *Volte para a forca e vá em linha recta, contando os seus passos, até à árvore B. Quando chegar à árvore, rode 90^o para a direita e avance o mesmo número de passos, colocando outro marco no chão, no ponto em que acabar.*
> *Cave no ponto que fica a meio caminho entre os dois marcos e encontrará o tesouro.*

Um jovem aventureiro que encontrou o pergaminho com estas instruções, fretou um navio e viajou para a ilha. Não teve dificuldade em encontrar as duas árvores mas, para seu grande desgosto, a forca tinha desaparecido e o tempo tinha apagado todos os vestígios que *pudessem* indicar o lugar onde ficava.

Em *'Fractal music, hipercards and more'*, de Martin Gardner

Se fizermos a construção geométrica descrita no pergaminho, num programa de geometria dinâmica, verificamos, talvez com surpresa, que ao arrastar o ponto Forca, os Marcos mudam de posição mas o Tesouro não. Isto significa que a posição onde está o tesouro não depende da posição da forca, apenas das posições das duas árvores.



A demonstração geométrica deste facto não nos parece muito simples, mas se trabalharmos com coordenadas de pontos e vectores e com as operações conhecidas, torna-se fácil demonstrar a invariância do ponto Tesouro quando fazemos variar o ponto

Forca. Mas trabalhar com pontos e vectores, sobretudo quando há transformações de rotação, torna-se ainda mais simples se traduzirmos tudo em termos de números complexos.

Se designarmos por A, B, F, M_A, M_B e T os números complexos correspondentes aos pontos que representam respectivamente as árvores A e B, a forca, os marcos A e B e o tesouro, a construção geométrica traduz-se, em termos de operações com números complexos, da seguinte maneira:

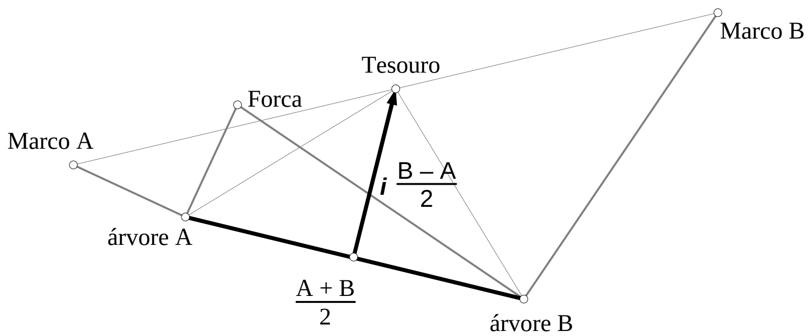
$M_A = A + \boldsymbol{i}\,(F - A)$	chega-se ao marco M_A partindo do ponto A e descrevendo o vector que se obtém rodando de 90º o vector $\overrightarrow{AF}$
$M_B = B - \boldsymbol{i}\,(F - B)$	chega-se ao marco M_B partindo do ponto B e descrevendo o vector que se obtém rodando de –90º o vector $\overrightarrow{BF}$
$T = \dfrac{M_A + M_B}{2}$	o tesouro é o ponto médio do segmento definido pelos dois marcos.

$$T = \frac{A + \boldsymbol{i}\,(F - A) + B - \boldsymbol{i}\,(F - B)}{2}$$

$$T = \frac{A + \boldsymbol{i}\,F - \boldsymbol{i}A + B - \boldsymbol{i}F + \boldsymbol{i}B}{2}$$

$$T = \frac{A + B}{2} + \boldsymbol{i}\,\frac{B - A}{2}$$

Ficou demonstrado que o complexo T não depende do complexo F, e por isso o ponto onde está enterrado o tesouro não depende da posição da forca. Além disso a expressão encontrada permite-nos saber exactamente a posição do tesouro: é um



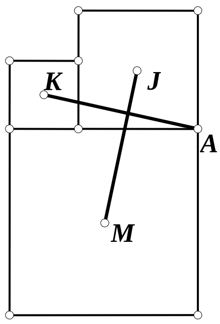
vértice de um triângulo rectângulo isósceles que tem como hipotenusa o segmento definido pelas duas árvores A e B.

Este problema foi apresentado, com outra formulação, na secção ‘O problema deste número’ da revista Educação e Matemática n.º 52, e a sua resolução na revista n.º 54. Na resolução proposta trabalhou-se com pontos e vectores, e não há qualquer referência a números complexos. Não deixa de ser interessante comparar as duas resoluções e verificar como os complexos tornam mais simples a linguagem e o cálculo.

Três quadrados 1

K, J e M são os centros de três quadrados dispostos como na figura.

Mostra que os segmentos KA e JM são congruentes e perpendiculares.

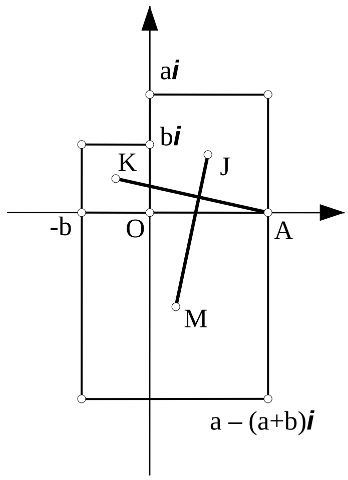


Em *Math – Algèbre et Géométrie*, de C. Artigues

A exploração desta actividade, e das seguintes, num programa de geometria dinâmica, convence-nos imediatamente da validade deste teorema, apesar de não ser muito evidente que os segmentos MJ e KA tenham que ser iguais e perpendiculares.

Sejam ***a*** e ***b*** as medidas dos lados dos quadrados de centros J e K, respectivamente. Se escolhermos como origem do referencial do plano complexo o vértice que é um ponto comum aos três quadrados, obtemos a seguinte tradução para números complexos, já que os centros dos quadrados são pontos médios das suas diagonais.

Pontos	N.^{os} complexos
A	a
J	$\frac{1}{2}$ (a + a$\boldsymbol{i}$)
K	$\frac{1}{2}$ (-b + b$\boldsymbol{i}$)
M	$\frac{1}{2}$ (a – (a + b)$\boldsymbol{i}$ – b) = = $\frac{1}{2}$ (a – b) – $\frac{1}{2}$ (a + b)$\boldsymbol{i}$



Assim, os vectores $\overrightarrow{AK}$ e $\overrightarrow{JM}$ irão corresponder aos complexos

$$\overrightarrow{AK} = K - A \qquad z_{\overrightarrow{AK}} = \frac{1}{2}(-b + b\boldsymbol{i}) - a$$

$$= -\frac{2a + b}{2} + \frac{b}{2}\,\boldsymbol{i}$$

$$\overrightarrow{JM} = M - J \qquad z_{\overrightarrow{JM}} = \frac{1}{2}(a - b) - \frac{1}{2}(a + b)\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}(a + a\boldsymbol{i})$$

$$= -\frac{b}{2} - \frac{2a + b}{2}\,\boldsymbol{i}$$

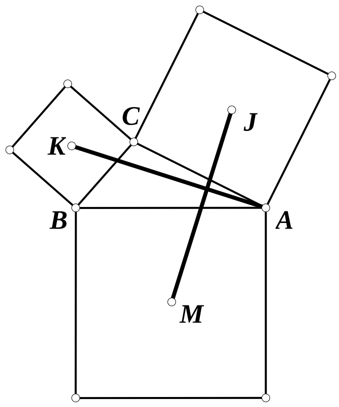
Daqui se conclui imediatamente que $z_{\overrightarrow{AK}} \times \boldsymbol{i} = z_{\overrightarrow{JM}}$, o que, em termos de vectores, significa que são perpendiculares e com a mesma norma, e portanto os segmentos que os representam também são perpendiculares e de comprimentos iguais, como queríamos demonstrar. Esta actividade pode ser estendida a uma mais geral que propomos de seguida.

Três quadrados 2

K, J e M são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo ABC.

Mostra que os segmentos KA e JM são congruentes e perpendiculares.

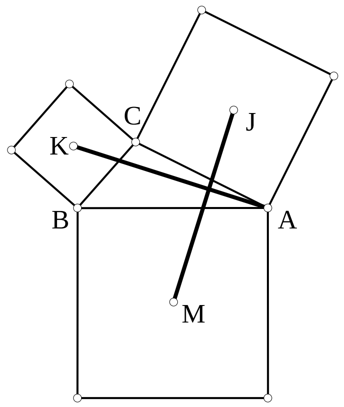
Em *'Math – Algèbre et Géométrie*, de C. Artigues



Esta demonstração é bastante menos acessível que a anterior porque não é tão fácil escolher um bom referencial. Aliás, a escolha do referencial aqui não vai facilitar nada, por isso nem iremos referir-nos a nenhum em particular.

Se atendermos a que os vectores $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MB}$ são perpendiculares, podemos escrever as relações entre complexos que correspondem aos pontos com o mesmo nome.

$$(B - M) = \boldsymbol{i}\,(A - M)$$



donde

$$M = \frac{B - \boldsymbol{i}\,A}{1 - \boldsymbol{i}}$$

e, multiplicando ambos os termos da fracção por (1 + ***i***)

$$M = \frac{(A + B) - \boldsymbol{i}\,(A - B)}{2}$$

Da mesma maneira se pode concluir que

$$K = \frac{(B + C) - \boldsymbol{i}\,(B - C)}{2} \qquad \text{e} \qquad J = \frac{(C + A) - \boldsymbol{i}\,(C - A)}{2}$$

donde

$$K - A = \frac{(B + C) - \boldsymbol{i}\,(B - C)}{2} - A$$

$$= \frac{(-\,2A + B + C) - \boldsymbol{i}\,(B - C)}{2}$$

e

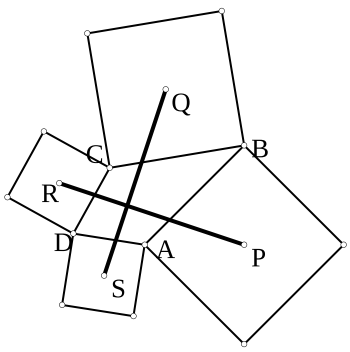
$$J - M = \frac{(C + A) - \boldsymbol{i}\,(C - A)}{2} - \frac{(A + B) - \boldsymbol{i}\,(A - B)}{2}$$

$$= \frac{(C - B) + \boldsymbol{i}\,(2A - B - C)}{2}$$

O que nos permite concluir imediatamente que

$$(K - A) = \boldsymbol{i}\,(J - M)$$

Esta igualdade traduz, em termos de vectores, que $\overrightarrow{AK}$ e $\overrightarrow{MJ}$ são perpendiculares e têm a mesma norma, pelo que os segmentos AK e MJ são congruentes e perpendiculares.



Uma extensão desta actividade, que deixamos como desafio aos professores, é a demonstração de que os segmentos PR e QS, da figura ao lado, são congruentes e perpendiculares.

Com esta actividade apercebemo-nos da existência de quadriláteros cujas diagonais são perpendiculares e que não são quadrados, losangos nem kites.

Bibliografia

Artigues, C. et al (1992). *Math – Algèbre et Geométrie – Term C et E*. Paris: Hachette.

Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Conway, John H. & Guy, Richard K. (1999). *O livro dos números*. Lisboa: Gradiva.

Coxford, Arthur F. (1993). *Geometria a partir de Múltiplas Perspectivas*. Colecção de Adendas às Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar, do N.C.T.M.. Lisboa: A.P.M..

Gardner, Martin (1992). *Fractal Music, Hypercards and More…*. New York: W. H. Freeman and Company.

Hahen, Liang-shin (1994). *Complex Numbers & Geometry*. USA: The Mathematical Association of America.

Loureiro, C. et al (1998). *Geometria, 11º ano de escolaridade.* Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Maor, Eli (1998). *Trigonometric Delights*. New Jersey: Princeton University Press.

Rittaud, B.; Deledicq, A. & Cohen, G. (1999). La géométrie des imaginaires. *Tangente, hors série nº 8, Géométrie au Bac.*

Silva, Sebastião (1975). *Compêndio de Matemática – 1º volume, 2º tomo*. Lisboa: GEP.

Silva, Sebastião (1975). *Compêndio de Matemática – 3º volume*. Lisboa: GEP.

Veloso, Eduardo (1997). As notações em Geometria. *Educação & Matemática nº 42, p.35-36*.

Veloso, Eduardo (1998). *Geometria – Temas actuais*. Lisboa: IIE.

Nahin, Paul J. (1998). *An imaginary tale – The story of* $\sqrt{-1}$. New Jersey: Princeton University Press.

ALGUNS LIMITES E DERIVADAS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O limite de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Se x denota a medida de um ângulo em radianos, a função real de variável real $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ está definida para todo o $x \neq 0$, e torna-se no símbolo de indeterminação $\dfrac{0}{0}$ para $x = 0$, mas esta indeterminação pode ser levantada. Uma tabela de funções trigonométricas, ou uma calculadora de bolso, permite obter alguns valores de $f(x)$ para x "pequeno" (não nulo). Tais tabelas têm entradas normalmente expressas em graus mas, como se sabe, a medida x em graus está relacionada com a medida y em radianos pela fórmula

$$x = \frac{\pi}{180} \times y \approx 0{,}01745y\,,$$

onde o valor à direita é correcto até à 5ª casa decimal. A consulta a uma tal tabela fornece os seguintes valores aproximados nas 3ª e 4ª colunas, correctos até à 4ª casa decimal, inclusive:

10º	$x = 0{,}1745$	$\operatorname{sen} x = 0{,}1736$	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0{,}9948$
5º	0,0873	0,0872	0,9988
2º	0,0349	0,0349	1,0000
1º	0,0175	0,0175	1,0000

Parece, assim, que $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se aproxima de 1 quando x se aproxima de 0. Mostramos que, de facto,

(1.1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

Recorremos ao círculo trigonométrico (figura 1).

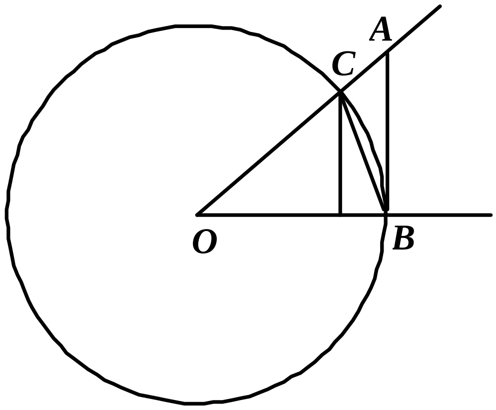


Figura 1. O círculo trigonométrico

Se x é a medida em radianos do $\angle BOC$ tem-se, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

área do $\Delta OBC = \dfrac{1}{2}\times 1 \times \operatorname{sen} x$,

área do sector circular $OBC = \dfrac{1}{2}x$,[1]

área do $\Delta OBA = \dfrac{1}{2}\times 1 \times \operatorname{tg} x$,

1 A medida x em radianos do ângulo $\angle BOC$ é igual ao dobro da área A do sector circular BOC, pois esta área está para a área do círculo unitário (raio = 1) como o comprimento do arco BC (digamos, no sentido anti-horário) está para o perímetro da circunferência: $\dfrac{A}{\pi} = \dfrac{x}{2\pi}$, donde $x = 2A$.

mas estas três áreas estão por ordem crescente, donde $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$ e, dividindo por $\operatorname{sen} x$, obtemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x},$$

ou seja

(1.2) $$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Ora

$$1 - \cos x = (1 - \cos x) \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cos x} < \operatorname{sen}^2 x.$$

Como $0 < \operatorname{sen} x < x$, isto mostra que

(1.3) $$1 - \cos x < x^2,$$

ou seja que

(1.4) $$1 - x^2 < \cos x$$

Tomando (1.2) em consideração, obtemos finalmente

(1.5) $$1 - x^2 < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.$$

Temos feito os cálculos na suposição de que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, mas as desigualdades (1.5) também são válidas à esquerda de 0, isto é, para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, pois

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \text{e} \quad (-x)^2 = x^2.$$

De (1.5) resulta imediatamente que $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \to 1$ quando $x \to 0$. De facto, de (1.5) conclui-se que a diferença entre $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e 1 é menor do que x^2, que por sua vez é menor do qualquer número real positivo δ dado, desde que $|x| < \varepsilon = \sqrt{\delta}$.

Observe-se que, de (1.3), também se pode concluir que

(1.6) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0},$$

pois $\cos x = \cos(-x)$.

Muitos outros limites envolvendo senos e cosenos podem ser calculados utilizando os resultados anteriores e as regras dos limites. Mencionamos apenas alguns (sempre com $x \to 0$), a título de exercícios.

Exercícios

Calcule os limites

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x(x-1)}$ (c) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$;

(d) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$ (e) $\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$ (f) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$;

(g) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ com x expresso em graus (h) $\lim_{x\to\infty} x\operatorname{sen}(1/x)$.[2]

2 Utiliza-se o facto de que, se $x\to\infty$, então $y=1/x\to 0$, e de que $f(x)\to a$ quando $x\to\infty$ se e só se $f(x)\to a$ quando $1/x\to 0$ se e só se $f(1/x)\to a$ quando $x\to 0$.

Derivadas das funções trigonométricas

Nesta secção as medidas de ângulos são sempre expressas em radianos, como é, aliás, mais conveniente em Análise.

Para derivar as funções trigonométricas *seno, coseno* e *tangente* aplicamos a definição de derivada de $f(x)$ num ponto ao arbítrio x como limite da razão incremental $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando $h \to 0$ (por valores diferentes de 0).

Começamos pela função *seno*. Pela fórmula do seno da soma

(2.1) $$\operatorname{sen}(x \pm h) = \operatorname{sen} x \cos h \pm \cos x \operatorname{sen} h\,,$$

donde

(2.2) $$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} = \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) + \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right).$$

Ora, fazendo $h \to 0$ tem-se, pelos resultados (1.1) e (1.6) da secção anterior, que $\dfrac{\operatorname{sen} h}{h} \to 1$ e $\dfrac{\cos h - 1}{h} \to 0$ quando $h \to 0$, respectivamente, donde resulta que $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$ tende para $\cos x$ quando $h \to 0$. Em conclusão,

(2.3) $$\boxed{D\operatorname{sen} x = \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = (\operatorname{sen} x)' = \cos x}$$

Procedimento análogo, mas utilizando a fórmula do coseno de uma soma

(2.4) $$\cos(x \pm h) = \cos x \cos h \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h\,,$$

permite concluir que

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right),$$

que tende para $-\operatorname{sen} x$ quando $h \to 0$ (por valores diferentes de 0), logo

(2.4) $$\boxed{D\cos x = \frac{d(\cos x)}{dx} = (\cos x)' = \operatorname{sen} x}$$

Outra maneira mais simples de obter este resultado utiliza, todavia, a regra de derivação das funções compostas, ou regra de derivação em cadeia, e a observação de que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Pondo $u = x + \frac{\pi}{2}$ tem-se, pela referida regra,

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = \frac{d(\operatorname{sen} u)}{du} \times \frac{du}{dx} = (\cos u) \times 1 = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$$

Para derivar a função *tangente*, observamos que $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k$ inteiro) e utilizamos a regra de derivação de um quociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cos x - (\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$ [3]

Observemos também que, por outro lado,

$$\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\ ,$$

de modo que, em conclusão,

(2.5) $$\boxed{D(\operatorname{tg} x) = \frac{d(\operatorname{tg} x)}{dx} = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Este resultado também pode ser obtido directamente, aplicando a definição de derivada (limite da razão incremental), o que deixamos como exercício.

---

3 Actualmente, não fazem parte do programa as funções trigonométricas recíprocas *secante*, *cosecante* e *cotangente*, definidas por $sec\, x = 1/\cos x$, $cosec x = 1/ sen x$ e $cot g x = 1/ tg x$, respectivamente, de modo que $(tg x)' = sec^2 x$.

Exemplo de aplicação

Um balão (B) sobe no ar, a partir de um ponto P (v. figura 2). Um observador (O) a 80m de distância vê o balão a subir, fazendo um ângulo θ que aumenta à taxa de $\frac{1}{8}\,\text{rad} / \text{segundo}$. Determinar a taxa de variação da altura do balão quando (a) $\theta = \pi / 4$; (b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{5}$.

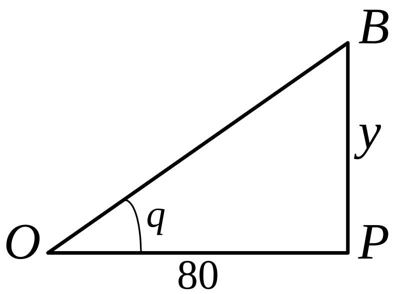


Figura 2. O balão sobe, sobe...

Na figura, y é a distância do balão ao solo e, de acordo com os dados do problema, $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{\theta=\pi/4} = \frac{dy}{dx}(\pi / 4) = \frac{1}{8}$. Como $\operatorname{tg}\theta = y / 80$, vem $y = 80\operatorname{tg}\theta$.

Queremos encontrar a taxa de crescimento de y, isto é, $\frac{dy}{dt}$ (onde t é o tempo) para dois valores particulares de θ. Tem-se

$$\frac{dy}{dt} = 80\frac{d(\operatorname{tg}\theta)}{dt} = 80(1+\operatorname{tg}^2\theta)\frac{d\theta}{dt},$$

que, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, toma o valor

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\theta=\pi/4} = \frac{dy}{dx}(\pi / 4) = 80 \times (1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}) \times \frac{1}{8} = 10 \times (1+1) = 20$$

A resposta da alínea (a) é 20 m/s.

Para (b), tem-se $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{25}$, donde $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \frac{24}{25}$ e $\operatorname{tg}^2\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1/25}{24/25} = \frac{1}{24}$, logo

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{\operatorname{sen}\theta=1/20} = 80 \times (1 + \frac{1}{24}) \times \frac{1}{20} = \frac{4 \times 25}{24} = \frac{100}{24}$$

A resposta à alínea (b) é $\frac{100}{24}$ m/s.

Bibliografia

R. COURANT & H. ROBBINS — *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods,* Oxford University Press, 4th edition, 1978.

S. LANG — *A First Course in Calculus,* 5th edition, Springer-Verlag, 1993.

O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

História resumida do TFA

Chamamos *polinómio complexo* numa indeterminada x a uma expressão da forma

(1.1) $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

onde os *coeficientes* a_i ($0 \leq i \leq n$) são números complexos.[1] Se os coeficientes forem números reais, dizemos que se trata de um *polinómio real.* Se todos os coeficiente forem nulos, o polinómio chama-se o *polinómio zero*, que não possui grau; se $a_n \neq 0$, o polinómio diz-se de *grau* n e a_n é o *coeficiente director;* se $n = 0$ o polinómio diz-se *constante* e nos casos $n > 0$ diz-se *não constante*. Se o coeficiente director for $a_n = 1$ o polinómio diz-se *mónico.* Um polinómio de grau 1 diz-se *linear* ou *binomial*, e um polinómio de grau 2 diz-se *quadrático.* Os polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ dizem-se *iguais* ou *idênticos* sse tiverem o mesmo grau e os mesmos coeficientes. Finalmente, um número complexo c é uma *raíz* (ou *zero*) do polinómio (1.1) sse $P(c) = 0$, isto é, $a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$. Também dizemos, neste caso, que c é uma *solução* da equação polinomial $P(x) = 0$.

1 Quando dizemos que $z = x + yi \in C$ é um número complexo, não estamos a excluir a possibilidade de a parte imaginária $\Im(z) = y$ ser nula e z se reduzir à sua parte real, isto é, $z = \Re(z) = x$ ser um número real.

O *Teorema Fundamental da Álgebra* (abreviadamente, TFA[2]) é actualmente conhecido como a proposição de que todo o polinómio complexo não constante, numa indeterminada x, possui, pelo menos, uma raíz complexa. Foi demonstrado (embora ainda com algumas falhas, pelos modernos padrões de rigor, somente colmatadas na totalidade por A. Ostrowski em 1920) por Carl Gauss em 1799 num trabalho que constitui a sua tese de doutoramento, com o título bem descritivo (tradução livre) "Nova demonstração do teorema de que toda a função racional inteira de uma variável pode ser decomposta em factores reais do primeiro ou segundo graus." Gauss voltou posteriormente a fazer mais três demonstrações deste teorema, a última das quais em 1849. O título do trabalho sugere, por um lado, que existiriam tentativas de demonstração anteriores e, por outro, que a questão essencial era a da decomposição em factores reais (isto é, com coeficientes reais) lineares ou quadráticos (quer dizer, de uma das formas $ax+b$ ou ax^2+bx+c), questão que é, aliás, equivalente à da existência de raízes em $\mathbf{C}$. Naquela época, a Álgebra ainda era entendida como essencialmente a teoria dos polinómios com coeficientes reais ou complexos ou, se quisermos, como a teoria das equações algébricas, sendo o TFA considerado como o teorema fundamental desta teoria. Mas, ao contrário da ênfase que tinha sido posta no passado, não era tanto a obtenção de soluções de equações da forma $P(x)=0$ como a questão da existência de soluções (em $\mathbf{C}$) que ocupava o centro do interesse de Gauss pois, mesmo para binómios da fora $x^n - a$, com $n \geq 5$, a existência de raízes era considerada uma questão longe de trivial.

A importância maior do TFA para a história dos números complexos (tanto como para a das equações algébricas) é simplesmente o facto de ter sido possível demonstrá-lo, o que abriu o caminho para o reconhecimento e desenvolvimento dos números complexos e da Análise Complexa em toda a sua plenitude.

Mencionemos alguns antecedentes históricos do TFA, começando pelos êxitos dos algebristas italianos seiscentistas na resolução das equações quadráticas, cúbicas e quárticas gerais, conseguindo exprimir sempre as respectivas raízes por meio de radicais, em função dos coeficientes. Em algumas dessas resoluções (por exemplo, no caso da cúbica, como se explica noutro local nesta brochura), os números "imaginários"

2 Infelizmente, esta sigla também designa o *Teorema Fundamental da Aritmética* (existência e unicidade da decomposição em factores primos) mas, nesta secção, refere-se exclusivamente ao teorema enunciado para os polinómios, com o qual possui, aliás, alguma afinidade.

fizeram uma fugaz e incontornável aparição,[3] como que a anunciar para a posteridade que não podiam deixar de ser considerados em certas situações.

A quíntica geral resistiu a todas as tentativas de resolução por meio de radicais, mas por boa razão, pois tais expressões para as raízes são, em geral, impossíveis de obter, como veio a demonstrar N. Abel em 1826 (elaborando sobre os extensos trabalhos de Lagrange). Todavia, até à altura em que Gauss se debruçou sobre o assunto, quase todos os matemáticos acreditavam na existência de raízes em alguma “terra de ninguém” (alguma extensão do corpo **C** dos números complexos, como diríamos hoje), e desenvolviam métodos imaginativos para mostrar que tais soluções eram, na realidade, números complexos, mas não existia uma prova geral de que fosse sempre assim.

Peter Roth já afirmara, em 1608, que as equações de grau n têm, quando muito, n raízes. Albert Girard, na sua *L’invention en algèbre,* em 1629, foi o primeiro a afirmar que há sempre n soluções (possivelmente repetidas), mas não o demonstrou. Descartes, na 3ª parte de *La Géométrie*, em 1637, descreve tudo o que se conhecia na época sobre equações, observa que um polinómio $P(x)$ que se anula em c é divisível por $x-c$,[4] e descreve a famosa “regra dos sinais” para calcular o número máximo de raízes reais positivas e negativas. Leibniz, na *Acta Eruditorum,* de 1702, considera a questão de saber se é sempre possível factorizar um polinómio em factores reais lineares ou quadráticos, mas cede pela negativa, face ao “contra-exemplo”

$$x^4+a^4=(x^2-a^2i)(x^2+a^2i)=(x+a\sqrt{i})(x-a\sqrt{i})(x+a\sqrt{-i})(x-a\sqrt{-i})$$

O produto de quaisquer dois factores lineares no membro à direita nunca é um polinómio quadrático real, mas não ocorreu a Leibniz que $\sqrt{i}$ e $\sqrt{-i}$ pudessem ser da forma

3 É claro que a equação quadrática $ax^2+bx+c=0$ também tem soluções complexas (quando o descriminante é negativo), mas os matemáticos podiam dizer (e diziam!) que nesse caso não havia soluções. Até à época de Descartes, pelo menos, também diziam que as soluções negativas não eram soluções “reais”!

4 A prova é simples, pela teoria da divisibilidade dos polinómios. Se $P(x)$ se anula em c, isto é, $P(c)=0$, então, dividindo $P(x)$ por $x-c$ obtemos $P(x)=\ (x-c)Q(x)+r$, onde $Q(x)$ é o polinómio quociente e r o resto, que tem de ser uma constante pois tem de ter grau inferior ao do divisor $x-c$. Substituindo x por c vem $0=0+r$, logo $r=0$ e, portanto, $P(x)$ é divisível por $x-c$. Reciprocamente, se $P(x)=(x-c)Q(x)$ para algum $Q(x)$, é imediato concluir que $P(c)=0$.

$a+bi$; de facto, $\sqrt{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $\sqrt{-i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$, donde resulta que o produto do 1º e 3º factores, bem como o produto do 2º e do 4º, são quadráticos reais, obtendo-se a factorização

$$x^4+a^4=(x^2+a\sqrt{2}x+a^2)(x^2-a\sqrt{2}x+a^2)$$

Também lhe escapou que isto resultaria muito facilmente da identidade

$$x^4+a^4=(x^2+a^2)^2-2a^2x^2\,.$$

Este exemplo serve para ilustrar um ponto histórico importante. De facto, as hesitações de Leibniz não são de espantar, pois somente no século XVIII, antes de Gauss se debruçar sobre o assunto, a questão que ocupava os algebristas não era tanto a de saber se as equações algébricas possuiam sempre solução, mas sim a de saber que forma elas tinham, e não era de todo claro que pudessem ser sempre expressas na forma $a+b\sqrt{-1}$ com a,b reais (a notação $i=\sqrt{-1}$ foi introduzida por Euler em 1777). Pelo contrário, acreditava-se que pudesse haver uma hierarquia de "quantidades imaginárias", de que as da forma $a+b\sqrt{-1}$ seriam as mais simples.

Euler, em carta a N. Bernoulli de 1742 enuncia o teorema de factorização na forma que Leibniz formulara hipoteticamente. Na resposta, Bernoulli aponta um presumível contra-exemplo, o do polinómio $x^4-4x^3+2x^2+4x+4$, cujas raízes são

$$x_{1,2}=1\pm\sqrt{2+i\sqrt{3}},\; x_{3,4}=1\pm\sqrt{2-i\sqrt{3}}\;,$$

mas Euler desfaz a dúvida mostrando que os produtos $(x-x_1)(x-x_3)$, $(x-x_2)(x-x_4)$ são quadráticos reais, iguais a $x^2-(2+a)x+1+\sqrt{7}+a$ e $x^2-(2-a)x+1+\sqrt{7}-a$, respectivamente, onde $a=\sqrt{4+2\sqrt{7}}$, e quatro anos mais tarde tenta uma demonstração rigorosa para os polinómios reais (coeficientes reais) de grau menor ou igual a 6, todavia com algumas falhas e passos omissos. Entretanto, já tinha descoberto e anunciado ao seu amigo Goldbach[5] o facto conhecido

5 Cristian Golbach (1690-1764) é mais conhecido como autor de uma famosa *conjectura* com o seu nome, a de que todo o número natural par $n\geq 4$ é igual a uma soma $n=p+q$ com p e q primos (possivelmente iguais). Teremos de esperar pelo próximo milénio, pelo menos, por uma demonstração ou refutação...

de que as raízes complexas são sempre aos pares (complexos conjugados $a \pm bi$) e que tais pares dão sempre factores quadráticos reais, como é fácil de verificar. Golbach responde cepticamente, mencionado um presumível contra-exemplo, o do polinómio $x^4 + 72x^2 - 20$, mas Euler é lesto a factorizá-lo (as raízes são $\pm\sqrt{-36 \pm 2\sqrt{329}}$, procure o leitor a factorização).

Atribui-se a D'Alembert a primeira tentativa séria, em 1746, de demonstração do teorema de factorização na forma geral (razão pela qual o TFA também é conhecido por *Teorema de Gauss-D'Alembert*) por um processo de minimização de $|P(x)|$, que consiste em escolher convenientemente um $x = x_1$, depois um $x = x_2$ tal que $|P(x_2)| < |P(x_1)|$, depois um $x = x_3$ tal que $|P(x_3)| < |P(x_2)|$ e assim sucessivamente até que, no limite, se obtém um x tal que $|P(x)| = 0$.

Na primeira parte da sua tese de 1779, Gauss critica e aponta as deficiências das "demonstrações" propostas por Euler e por D'Alembert (bem como as de outros matemáticos), mas reconhece o valor da ideia principal da argumentação de D'Alembert e exprime a sua convicção de que ela pode ser elaborada de modo a produzir uma demonstração rigorosa. É exactamente isso que Argand consegue fazer em 1814. Também Lagrange em 1772 e Laplace em 1795 tentam demonstrar o teorema, o primeiro através de uma melhoria das ideias de Euler (mas apelando a raízes "fictícias") e o segundo por um processo inteiramente novo, de natureza mais "algébrica".

Como se vê pelo que precede, não foram poucas as tentativas de demonstração do TFA, por métodos bastante diversos, umas mal, outras (mais modernas) bem sucedidas, umas topológicas, outras algébricas, e algumas mais recentes utilizando a Análise Complexa (funções holomorfas) e outras ideias ainda. A mais simples de todas talvez seja a de Argand em 1814, utilizando todavia o facto verdadeiro mas ainda não justificado, naquela época, de que uma função real definida e contínua num conjunto D limitado e fechado do plano tem um valor máximo e um valor mínimo (conhecido posteriormente por *Teorema de Weierstrass* no plano, real ou complexo). Daremos adiante uma versão desta demonstração. Em todas as demonstrações conhecidas até ao presente (e são cerca de uma vintena) há, todavia, um elemento comum, que é o facto de todas elas utilizarem algum método ou conceito essencialmente analítico, no sentido de não algébrico, embora o enunciado do TFA (sob qualquer das formas possíveis — existência de raíz complexa, ou decomposição em factores reais lineares ou quadráticos) pareça ser de natureza inteiramente algébrica.

Foi Gauss, como já se disse, o principal responsável pela mudança de atitude dos matemáticos face aos números complexos, removendo a auréula de mistério e misticismo de que estavam revestidos até então, de que ainda permanecem alguns vestígios na terminologia utilizada. Só com Gauss é que fica inteiramente claro que os métodos algebrico-analíticos de resolução das equações polinomiais $P(x)=0$ nunca nos levam para fora do corpo dos números complexos (que são, todos, da forma $a+bi$ com a,b reais). Além disso, também é com Gauss que a mera questão do "cálculo" das raízes[6] dá lugar à questão da prova de existência de raízes como questão preliminar e fundamental para qualquer busca subsequente.

Uma demonstração do TFA

Na demonstração que vamos fazer apenas utilizamos a continuidade das funções polinomiais,[7] o teorema de Weierstrass no plano, acima mencionado, e o *princípio de ínfimo*, que diz que todo o conjunto não vazio e minorado de números reais tem ínfimo (o maior dos minorantes). Estes resultados são conhecidos das cadeiras de cálculo infinitesimal do 1º e 2º ano de qualquer licenciatura científica. A demonstração apresentada é relativamente simples e informal, apenas para benefício daqueles leitores que conhecem bem o TFA de tanto ouvirem falar dele, sem nunca terem tido a oportunidade de conhecer uma sua demonstração. Necessitamos de estabelecer dois resultados preliminares, dos quais o teorema é simples consequência.

6 Questão bem diversa, já referida anteriormente, é a de exprimir as raízes por meio de radicais.

7 Definimos polinómio numa indeterminada x, $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ como uma expressão de tipo especial. Outra coisa é a *função polinomial complexa de variável complexa* $P\colon C\to C$ por ele definida, tal que para todo $z\in C$, $P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$.(Será uma função real de variável real, se o polinómio for real). Por abuso, identificável pelo contexto, também utilizamos, por vezes, a mesma designação $P(x)$ para o polinómio e para a função polinomial associada.

Lema 1

Se $P(x)$ é um polinómio complexo, então a função real de variável real $x \mapsto |P(x)|$ tem um mínimo em algum ponto $x_0 \in \mathbf{C}$.

***Demonstração**.* Supondo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ de grau $n \geq 1$[8], é óbvio que

$$|P(z)| = |z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right| \to +\infty \text{ quando } |z| \to +\infty .$$

Deste modo, o conjunto de números reais $\{|P(z)| : z \in \mathbf{C}\}$ é limitado inferiormente e é não vazio, logo tem ínfimo, digamos m. Mas, como $|P(z)|$ é grande para $|z|$ grande, m é também o ínfimo dos valores de $|P(z)|$ para z num disco ou círculo de raio r, $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$ com r suficientemente grande. Como a função polinomial $P(x)$ é contínua em todo o plano e, em particular, no disco D, que é um conjunto limitado e fechado, então ela tem mínimo em algum ponto de D.□

Lema 2

Seja $P(x)$ um polinómio complexo não constante. Se $P(z_0) \neq 0$, então $|P(z_0)|$ não é o valor mínimo absoluto de $|P(x)|$.

Demonstração. Seja $P(x)$ um polinómio complexo não constante, $z_0 \in \mathbf{C}$ tal que $P(z_0) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor $P(0) = 1$.[9]

---

8 A questão é trivial para $n = 0$ (polinómio constante).

9 Fazendo a mudança de variável $z \mapsto u = z + z_0$ (translação) obtemos um polinómio $Q(u)$ tal que $Q(0) \neq 0$, e dividindo por $Q(0)$, se necessário, obtemos um polinómio que toma o valor 1 na origem. Por exemplo, se $P(x) = x^2 - 1$, $P(2) = 3$, $u = z + 2$, $Q(u) = P(u-2) = (u-2)^2 - 1 = u^2 - 4u + 3$, $Q(0) = 3$, $H(u) = Q(u)/3$, $H(0) = 1$.

Temos de mostrar que 1 não é o valor mínimo de $|P(x)|$.

Seja k o expoente mais pequeno, não nulo, das potências de x que ocorrem em $P(x)$. Então $P(x)$ é da forma

$$P(x) = 1 + ax^k + (\text{termos de grau } > k) \ .$$

Seja ainda α uma raíz índice k de $-a^{-1}$, isto é, $\alpha^k = -1/a$. Façamos uma mudança de variável $x \mapsto \alpha x$ (homotetia), de modo que podemos supor $P(x)$ da forma

$$P(x) = 1 - x^k + x^{k+1}Q(x) \text{ para algum } Q(x) \, .$$

Para $x > 0$ real suficientemente pequeno tem-se $x^k < 1$, isto é, $1 - x^k > 0$, donde

$$|P(x)| \leq |1 - x^k| + |x^{k+1}||Q(x)| = 1 - x^k + x^{k+1}|Q(x)| = 1 - x^k(1 - x|Q(x)|) \, .$$

Ora, $x|Q(x)|$ também se torna tão pequeno quanto se queira, de modo que existe x_0 positivo tal que $x_0|Q(x_0)| < 1$, donde

$$x_0^{\,k}(1 - x_0|Q(x_0)|) > 0$$

e, portanto,

$$|P(x_0)| < 1 = |P(0)| \, ,$$

o que mostra que $|P(0)|$ não é o valor mínimo de $|P(x)|$ e prova o lema.□

Estamos em condições de demonstrar o teorema fundamental.

Teorema Fundamental da Álgebra

Se $P(x)$ é um polinómio complexo não constante, então $P(x)$ tem, pelo menos, uma raíz em $\mathbf{C}$.

Demonstração. Pelo lema 1, $|P(x)|$ tem mínimo em algum ponto $z_0 \in \mathbf{C}$, mas, pelo lema 2, vem $|P(z_0)| = 0$, donde $P(z_0) = 0$.□

Corolário 1

Um polinómio complexo não constante factoriza-se completamente em factores lineares (reais ou complexos).

Demonstração. Basta considerar polinómios mónicos pois, se $a_n \neq 0$, as equações $a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$ e $x^n + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n} = 0$ têm exactamente as mesmas raízes. A demonstração é por indução completa no grau n do polinómio. Se $n = 1$, o polinómio é linear e nada mais há a fazer. Suponhamos (hipótese de indução) que o resultado é verdadeiro para todos os polinómios mónicos não constantes de grau menor do que n, e que $P(x)$ é um polinómio mónico não constante de grau $n > 1$. Pelo TFA, $P(x)$ tem, pelo menos, uma raíz, digamos z_1, logo $x - z_1$ divide $P(x)$ e $P(x) = (x - z_1)Q(x)$ para algum polinómio quociente (mónico) $Q(x)$ de grau $n - 1 < n$. Pela hipótese de indução, $Q(x)$ factoriza-se completamente em factores lineares (reais ou complexos), e é claro que também é assim para $P(x)$, cujos factores são $x - z_1$ e os factores de $Q(x)$.□

A demonstração anterior contém também a informação suficiente para se poder extrair a conclusão adicional seguinte, uma vez que, de cada vez que se divide um polinómio de certo grau por um binómio (mónico), o grau do polinómio quociente baixa uma unidade, mas só é possível fazer isto n vezes, se n é o grau do polinómio inicial.

Corolário 2

Se $P(x)$ é um polinómio complexo de grau $n \geq 1$ e as suas raízes (possivelmente com repetições) são $z_1, z_2, \ldots, z_n$, então

$$P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) \text{, com } a \in \mathbf{C}. \square$$

Observe-se também que mais de n raízes distintas não poderá haver, pois se c é uma raíz qualquer e $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n)$, então

$$P(c) = a(c - z_1)(c - z_2)\cdots(c - z_n) = 0,$$

mas um produto de números complexos (ou reais) só se anula quando um factor, pelo menos, for nulo, de modo que terá de ser $c = z_i$ para algum i.

A terminar, mostramos que o TFA, na forma enunciada, não deixa de ser válido se apenas for demonstrado que todo o polinómio real não constante possui uma raíz complexa. Para polinómios reais de grau ímpar, a existência de raízes reais até sai do conhecido *teorema dos valores intermédios de Bolzano*, pois toda a função polinomial real é contínua e, se o polinómio é de grau ímpar, assume valores positivos e negativos, como é fácil de verificar. Mas para polinómios reais de grau par a questão não é tão simples. Precisamos de algumas noções e resultados preliminares.

O conjugado de um polinómio complexo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é o polinómio complexo cujos coeficientes são os conjugados dos coeficientes de $P(x)$, $\overline{P}(x) = \overline{a_n} x^n + \overline{a_{n-1}} x^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} x + \overline{a_0}$. Algumas propriedades simples:

Lema 3

Para qualquer polinómio complexo $P(x)$,

(i) $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$, *para todo* $z \in \mathbf{C}$;

(ii) $P(x)$ *é um polinómio real sse* $P(x) = \overline{P}(x)$;

(iii) *se* $H(x) = P(x) \cdot Q(x)$, *então* $\overline{H}(x) = \overline{P}(x) \cdot \overline{Q}(x)$;

(iv) *se* $G(x)$ *é um polinómio complexo, então* $H(x) = G(x) \cdot \overline{G}(x)$ *é um polinómio real.*

Demonstração. (i) Com $z \in \mathbf{C}$, $P(x) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, tem-se

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_0} = \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \cdots + \overline{a_0} = \overline{a_n}\,\overline{z}^n + \cdots + \overline{a_0} = \overline{P}(\overline{z})$$

pois, como é sabido, o conjugado da soma e o conjugado do produto de dois números complexos são a soma e o produto dos conjugados, respectivamente.[10]

(ii) Se $P(x)$ é real, então $a_i = \overline{a_i}$ para $i = 0, \ldots, n$, logo $P(x) = \overline{P}(x)$. Reciprocamente, se $P(x) = \overline{P}(x)$, então $a_i = \overline{a_i}$ para todo o coeficiente a_i, logo $a_i \in \mathbf{R}$ e $P(x)$ é real.

(iii) Exercício de contas.

(iv) Pois $\overline{H}(x) = \overline{G(x) \cdot \overline{G}(x)} = \overline{G}(x) \cdot \overline{\overline{G}}(x) = \overline{G}(x) \cdot G(x) = H(x)$, logo $H(x)$ é real pela parte (ii).□

Destas propriedades resulta imediatamente o facto já mencionado de que as raízes complexas de um polinómio real vêm sempre aos pares. Pois se $P(x)$ é real e $P(z_0) = 0$, então $\overline{P(z_0)} = 0 = \overline{P}(\overline{z_0}) = P(\overline{z_0})$.

Podemos concluir da seguinte maneira que se o TFA é válido para os polinómios reais, então é válido para os polinómios complexos. Pois seja $P(x)$ um polinómio complexo não constante, e seja $Q(x) = P(x) \cdot \overline{P}(x)$, que é real, pela parte (iv) do lema 3. Por hipótese, existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tal que $Q(z_0) = P(z_0) \cdot \overline{P}(z_0) = 0$, logo $P(z_0) = 0$ ou $\overline{P}(z_0) = 0$. No primeiro caso, z_0 é uma raíz de $P(x)$, e no segundo caso, tem-se

10 Para quaisquer complexos z e w, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ e, para qualquer inteiro positivo n, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

$\overline{P}(z_0) = 0 = \overline{\overline{P}(z_0)} = \overline{\overline{P}}(\overline{z_0}) = P(\overline{z_0})$ pela parte (i) do lema 3, o que mostra que $\overline{z_0}$ é raíz de $P(x)$.

Exercícios

1) Determine o polinómio real $P(x)$ de grau ≤ 2 tal que $P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 2$.

2) Determine o quociente e o resto da divisão de $A(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 1$ por $B(x) = x - 1$ (*Regra de Ruffini*).

3) Mostre que $P(x) = x^2 + x + 4$ não se factoriza em factores lineares reais, mas factoriza-se em factores lineares complexos, e dê uma factorização.

4) Mostre que para todo o número complexo z, $(x - z)(x - \overline{z})$ é um polinómio quadrático real.

Bibliografia

D. M. BURTON — *The History of Mathematics, Na Introduction,* Third edition, McGraw-Hill, 1997.

B. FINE, G. ROSENBERGER — *The Fundamental Theorem of Algebra,* Springer-Verlag, 1997.