

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

**PROGRAMA DE MATEMÁTICA
APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS**

10º e 11º ou 11º e 12º Anos

Curso Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas

10º, 11º e 12º Anos

Curso Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente

Autores

Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)
Maria Eugénia Graça Martins (Coordenadora)
Arsélio Almeida Martins
Luisa Canto e Castro de Loura

Homologação
16/05/2001

Departamento do Ensino Secundário

Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas

Curso Tecnológico de Ordenamento do Território

1 Introdução

A disciplina de *Matemática Aplicada às Ciências Sociais* destina-se aos Cursos *Geral de Ciências Sociais e Humanas* e *Tecnológico de Ordenamento do Território*. Para o Curso Geral trata-se de uma disciplina bienal da componente de formação específica com uma carga horária distribuída por 3 aulas de 90 minutos por semana. Para o Curso Tecnológico é uma disciplina trienal da componente de formação científico-tecnológica com uma carga horária semanal distribuída por 2 aulas de 90 minutos.

Esta disciplina pretende desempenhar um papel incontornável para os estudantes dos cursos referidos, contribuindo para uma abordagem tão completa quanto possível de situações reais, ao desenvolver a capacidade de formular e resolver matematicamente problemas e ao desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas (os estudantes devem saber ler e escrever textos com conteúdo matemático descrevendo situações concretas).

Mais do que pretender que os estudantes dominem questões técnicas e de pormenor, pretende-se que os estudantes tenham experiências matemáticas significativas que lhes permitam saber apreciar devidamente a importância das abordagens matemáticas nas suas futuras actividades. Assim, este programa admite diferentes níveis de aprofundamento das diversas rubricas (podendo mesmo ficar-se por uma simples referência) desde que tal se traduza em vantagem para o trabalho dos estudantes de modo a garantir que tenham experiências matemáticas significativas.

Ao definir o currículo de uma disciplina desta índole, também se tem em vista propósitos de Educação para a cidadania e o papel importante assumido pela Escola, para esse fim.

O contexto que se nos apresenta é privilegiado pois o objectivo aqui vai ser o de introduzir e desenvolver alguns conceitos matemáticos através de problemas da vida real, mais numa perspectiva de formação cultural do que de formação estritamente técnica.

De entre inúmeros assuntos interessantes que ligam a Matemática à vida de todos os dias, foram seleccionados alguns que são potencialmente mais aliciantes, nomeadamente:

1. Métodos de apoio à decisão:

- Teoria matemática das eleições
- Teoria da partilha equilibrada

2. Modelação matemática

- Modelos de crescimento Populacional (linear e não linear)
- Modelos Financeiros
- Modelos de Grafos

3. Estatística (e Probabilidades)

O primeiro tema deve a sua pertinência ao facto de vivermos numa sociedade democrática e estarmos constantemente a ser solicitados para tomar decisões, tanto na escolha dos políticos que nos governam (*Teoria das eleições*), como ao nível da divisão mais justa do poder em comissões ou de alguns bens materiais, como por exemplo a partilha de uma herança pelos herdeiros (*Teoria da partilha equilibrada*). Além disso estas áreas são temas muito importantes das Ciências Sociais e as ferramentas matemáticas dão contributos incontornáveis para a tomada de decisões.

Com o segundo tema pretende-se mostrar como alguns modelos matemáticos, ainda que simples, podem ser úteis (o estatístico Georges Box afirmava que "Todos os modelos são maus, alguns modelos são úteis") tanto para explicar o crescimento de populações biológicas, como o crescimento das poupanças no banco. É importante, nomeadamente, tomar consciência de como a forma de utilização dos recursos naturais, como florestas e população de peixes, pode ser fundamental para evitar a sua extinção. Os modelos de grafos introduzem outra forma de mobilizar a Matemática para outros fins e pensando de maneira não usual. E pretendem ser modelos úteis para enfrentar problemas de gestão e iniciar intervenções sociais ao nível da compreensão dos sistemas de distribuição ou recolha (tanto no que se refere à distribuição de bens alimentares, de correio ou de recolha do lixo, como às decisões sobre localização de serviços que careçam de controladores, vendedores, etc).

Finalmente, um lugar de destaque é dado à Estatística, que hoje em dia ocupa uma posição marcante junto de todas as profissões. É uma ciência que fornece os instrumentos próprios para melhor seleccionar e tratar a quantidade de informação que nos chega. Do mesmo modo que foi importante para os nossos pais aprender a ler as palavras, hoje em dia é imprescindível aprender a "ler" os números. A Sociedade está em mudança, pelo que é necessário estarmos atentos e sabermos acompanhar essa mudança, pois só assim poderemos desempenhar o papel a que fomos solicitados.

Tentar-se-á ainda mostrar como se podem tirar conclusões a partir do estudo dos dados, fazendo assim uma introdução à Inferência Estatística. Será nesta fase que mostraremos toda a potencialidade da Estatística, pois veremos como se podem tirar conclusões, partindo do particular para o geral, ao mesmo tempo que se quantifica o erro cometido. Realçaremos o papel desempenhado pela Probabilidade, cujo conceito será também trabalhado. Nos exemplos apresentados limitaremos-nos à construção de intervalos de confiança, recorrendo a exemplos simples, nomeadamente

que tenham sido objecto de estudo na parte da Estatística Descritiva, anteriormente dada. No entanto, vão-nos permitir mostrar como se pode fechar o ciclo de um procedimento estatístico, que se iniciou com o planeamento da experiência e uma consequente recolha de dados, com o objectivo de uma tomada de decisões.

Há a consciência de que muitas das rubricas do programa não são habituais em Portugal. Por isso e para que os professores possam ter uma ideia de como se pode concretizar a metodologia indispensável ao sucesso deste programa, será conveniente elaborar alguns textos de apoio que não serão considerados obrigatórios nem como fazendo parte do programa e não substituem a edição das brochuras necessárias para fornecer um sólido enquadramento científico e metodológico.

Este programa encontrará certamente dificuldades pelo facto de se dirigir a um sector de estudantes que não tem sido suficientemente conquistado para a Matemática. Os temas propostos e as metodologias preconizadas pretendem responder a este problema. Contudo, como os temas não são habituais e como as metodologias envolvem problemas reais e projectos que intersectam naturalmente outras áreas disciplinares, poderão surgir novas dificuldades. Tem-se consciência de que a implementação deste programa só poderá ser feita gradualmente, devendo os professores esforçar-se por cumprir mais cabalmente os objectivos propostos de ano para ano. A satisfação dos professores, ao conseguir que estes estudantes se apercebam como a Matemática é uma ferramenta importante para a sua vida, ajudará certamente essa evolução.

2 Apresentação do Programa

2.1 Finalidades

São finalidades da disciplina:

- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.
- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas simples em situações do dia a dia e no domínio das Ciências Sociais.
- Desenvolver a capacidade de interpretar textos escritos em linguagem matemática, a capacidade de comunicar e o espírito crítico.
- Contribuir para formar uma atitude positiva face à ciência e particularmente para com a Matemática.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade.

- Desenvolver capacidades de intervenção social pela compreensão e discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

2.2 Objectivos gerais e competências a desenvolver:

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver a confiança em si próprio:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Expressar e fundamentar as suas opiniões. ■ Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios. ■ Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade. ■ Procurar a informação de que necessita. 	<p>Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução. ■ Reconhecer o alcance e limitações de um modelo matemático. ■ Reconhecer que um mesmo modelo matemático pode permitir analisar situações diversas. ■ Seleccionar estratégias de resolução de problemas. ■ Formular hipóteses e prever resultados. ■ Interpretar e criticar resultados no contexto do problema. ■ Compreender a aleatoriedade presente em situações do dia a dia e em diferentes fenómenos. 	<p>Conhecer alguns métodos de apoio à decisão:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Reconhecer diferenças entre diversos métodos eleitorais. ■ Reconhecer que certos métodos eleitorais podem ser melhorados, mas que há limites a essa melhoria. ■ Conhecer alguns métodos de divisão proporcional e interpretar as suas consequências.
<p>Desenvolver interesses culturais:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa. ■ Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas. ■ Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo. 	<p>Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Descobrir relações entre conceitos matemáticos. ■ Formular generalizações a partir de experiências. ■ Observar regularidades em conjuntos de dados. ■ Formular hipóteses sobre conjuntos de dados. ■ Validar conjecturas. ■ Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade 	<p>Conhecer diferentes modelos matemáticos:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Conhecer modelos envolvendo funções lineares, exponenciais, logarítmicas e logísticas. ■ Explorar problemas concretos envolvendo modelos financeiros. ■ Explorar problemas concretos modelados com grafos.

Valores/Atitudes	Capacidades/Aptidões	Conhecimentos
<p>Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada. ■ Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova. <p>Desenvolver o sentido da responsabilidade:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas. ■ Avaliar situações e tomar decisões. <p>Desenvolver o espírito de tolerância e de co-operação:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades. ■ Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças. ■ Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere. 	<p>Desenvolver a capacidade de comunicar e transmitir a informação organizada:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e rigor. ■ Organizar a informação extraída de conjuntos de dados. ■ Interpretar textos de Matemática. ■ Expressar o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens. ■ Apresentar os textos de forma clara e organizada. <p>Desenvolver as capacidades de utilização das novas tecnologias: calculadora gráfica, computadores e internet.</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Tratar, explorar e transmitir dados numéricos e gráficos. ■ Desenvolver projectos que incluam pesquisa de informação. ■ Analisar criticamente dados, informação e resultados obtidos. 	<p>Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Interpretar e comparar distribuições estatísticas. ■ Resolver problemas de contagem. ■ Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade. <p>Conhecer aspectos da História da Matemática:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Conhecer algumas personalidades da História da Matemática, com particular incidência na Matemática contemporânea. ■ Conhecer alguns factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social.

2.3 Visão geral dos conteúdos/temas

A distribuição das diferentes rubricas pelos diferentes anos de escolaridade, assim como o número de aulas recomendadas, é apresentada a seguir. Observe-se, no entanto, que, excepto a Teoria Matemática das Eleições que funciona como módulo inicial, todas as outras rubricas podem ser arrumadas de outro modo se o professor entender que, nas condições em que trabalha, daí advem maior proveito para os estudantes.

Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas

Distribuição dos temas/conteúdos pelos anos de escolaridade

10. Ano	11. Ano
<p>1. Métodos de apoio à Decisão - 40 aulas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Módulo inicial Teoria matemática das eleições. ■ Teoria da partilha equilibrada. <p>2. Estatística - 40 aulas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos. ■ Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos. ■ Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples. ■ Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados. ■ Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas consideradas. ■ Introdução gráfica à análise de dados bivariados. quantitativos ■ Modelos de regressão linear. ■ Relação entre variáveis qualitativas. <p>3. Modelos matemáticos - 10 aulas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Modelos financeiros. 	<p>1. Modelos matemáticos - 30 aulas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Modelos de grafos. ■ Modelos populacionais. <p>2. Modelos de Probabilidade - 35 aulas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Fenómenos aleatórios. ■ Argumentos de simetria e Regra de Laplace. ■ Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade. ■ Probabilidade condicional. Árvores de probabilidade. Acontecimentos independentes. ■ Probabilidade Total. Regra de Bayes. ■ Valor médio e variância populacional. ■ Espaço de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos. ■ Exemplos de modelos contínuos. ■ Modelo Normal. <p>3. Introdução à Inferência Estatística - 25 aulas</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Parâmetro e estatística. ■ Distribuição de amostragem de uma estatística. ■ Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio. ■ Importância da amostragem aleatória, no contexto da Inferência Estatística. Utilização do Teorema do Limite Central na obtenção da distribuição de amostragem da média. ■ Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio de uma variável. ■ Estimativa pontual da proporção com que a população verifica uma propriedade. ■ Construção de intervalos de confiança para a proporção. ■ Interpretação do conceito de intervalo de confiança.

A escolha dos temas propostos, como já se disse na introdução, teve em conta um dos objectivos prioritários da escola, que é o da educação para a cidadania. Esta educação subentende uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia, pelo que é necessário dotar os jovens das ferramentas necessárias para mais rapidamente e em melhores condições responderem às inúmeras solicitações do meio em que se integram. Também se consideram recomendações internacionais que defendem insistentemente o desenvolvimento de temas de Matemática Discreta, particularmente para áreas de Ciências Sociais.

Os três temas seleccionados encerram objectivos diversos, permitindo desenvolver capacidades distintas e fazer aparecer diferentes conceitos matemáticos.

2.4 Sugestões Metodológicas Gerais

Convém ter presente que, neste programa, são determinantes as capacidades de usar a matemática em situações reais, formular e resolver problemas e comunicar ideias matemáticas. Menos importantes são o conhecimento e a utilização de rotinas e técnicas de cálculo e o domínio dos conceitos como objectos matemáticos. Neste contexto, o maior ou menor aprofundamento de cada rubrica dependerá das opções que o professor fizer tendo em conta as características dos estudantes e os recursos disponíveis, analisando cuidadosamente quais as rubricas onde, nessas condições, poderá desenvolver com os estudantes projectos mais significativos (no sentido de ajudar os estudantes a desenvolver as capacidades já mencionadas).

Assume grande importância a interpretação de problemas realistas e a investigação que se faz nas fontes e nas instâncias de decisão para as diversas situações. É importante o professor apresentar ou sugerir situações que possam vir a ser objecto de estudo e em cada oportunidade esclarecer a matemática necessária para as diversas situações e para a comunicação inteligente e justificada das decisões. As técnicas matemáticas a estudar são assim as necessárias ao estudo e interpretação das situações propostas. Se é verdade que os estudantes devem usar correctamente o vocabulário e simbologia específicos da Matemática, também se deve ter em conta que estes não são o centro da aprendizagem nem devem ser confundidos com rigores formais que a desvirtuem.

A abordagem dos temas de Estatística, Probabilidades e Inferência Estatística aplicada às Ciências Sociais é feita neste programa de uma forma muito virada para os interesses e necessidades dos estudantes dos Cursos em que esta disciplina se integra. É por isso que estes temas são tratados com muitos exemplos e detalhe metodológico.

O estabelecimento de conexões entre os diferentes temas fornece oportunidades ao estudante de observar como os assuntos se poderão combinar para abordar problemas mais complexos e permitirá visitar temas já estudados. Para dar aos estudantes uma visão mais completa da Matemática, os professores poderão estabelecer conexões com outros temas abordados no 3º ciclo, nomeadamente com a Geometria. As ferramentas próprias deste tema (material de desenho, *software* de geometria dinâmica, etc) poderão então ser mobilizadas e poderá ser dado tempo aos estudantes para recordarem o seu uso.

Não há formação matemática equilibrada sem uma referência à História da Matemática. Um estudante precisa de saber que as descobertas matemáticas se sucedem a um ritmo vertiginoso

e que, juntamente com todas as das outras áreas do saber, têm contribuído ao longo dos tempos para a compreensão e resolução dos problemas do Homem. Como a maioria das rubricas deste programa está relacionada com matemática contemporânea, é natural que a maioria das referências inclua trabalhos matemáticos mais recentes; não há qualquer inconveniente com esse facto, pelo contrário, tal mostra a vitalidade da Matemática. Assim, sempre que possível, devem ser usados exemplos históricos interessantes (uso de estatísticas pela enfermeira Florence Nightingale, análises de Malthus sobre o crescimento populacional, casos célebres de utilização incorrecta da Estatística, controvérsias eleitorais, etc).

2.4.1 Avaliação

A natureza da disciplina e, em particular, o tipo de trabalho que se pretende desenvolver com os estudantes implica decisivamente uma alteração nos instrumentos de avaliação. As provas escritas (ou testes) tradicionais de questionamento sobre os conceitos matemáticos em si mesmos ou com exigência de prova do manejo de técnicas matemáticas ou de manipulação da simbologia matemática perdem sentido e oportunidade como instrumentos privilegiados para as tarefas de avaliação. A actividade dos estudantes e o aproveitamento que se pretende verificar são mais cabalmente medidos com a apreciação dos trabalhos de grupo e individuais realizados, sendo importante que assumam diversos formatos: composições e notas de leitura, relatórios de actividades desenvolvidas, preparação de apresentações e participação em debates com temas seleccionados adequadamente ligados aos assuntos de ensino.

2.5 Recursos

A didáctica prevista para a Matemática Aplicada às Ciências Sociais no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- Livros para consulta e manuais;
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...). Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...);
- Calculadoras gráficas e computadores.

É considerado indispensável o uso de

- calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com "view-screen");
- uma sala de computadores com "software" adequado para trabalho tão regular quanto possível;
- um computador ligado a um "data-show" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os estudantes ao mesmo tempo.

Todas as Escolas Secundárias devem estar equipadas com Laboratórios de Matemática que integrem estes recursos e outros que se venham a revelar necessários. Os recursos escolhidos deverão ter em vista tanto a sua utilização na própria sala do Laboratório de Matemática, como uma utilização de recursos adequados em salas de aulas indiferenciadas.

A modelação matemática assume neste programa um papel importante; um modelo incluirá, normalmente, uma descrição matemática, gráfica ou verbal da realidade em estudo. Assim, o trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo de modelação matemática, embora não seja exigível que sejam todas tratadas simultaneamente em todas as ocasiões; em particular, recomenda-se a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, nalgumas situações, os estudantes tentarem identificar "modelos matemáticos que permitam a sua interpretação" (por exemplo, para fazer trabalhos estatísticos).

O uso de tecnologia facilita ainda uma participação activa do estudante na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no "Guia para a utilização do Compêndio de Matemática" que "haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino fosse tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo". O estudante deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia.

Uso de calculadoras gráficas

O uso de calculadoras gráficas é obrigatório neste programa. Contudo, os estudantes precisam de ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com outros conhecimentos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a "copiar" o que vêem.

É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta. É importante ir sempre treinando os estudantes na confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos.

Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios do tratamento dos dados e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores. Programas de Cálculo Numérico e Estatístico, particularmente uma Folha de Cálculo, de Gráficos e Simulação, fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes.

Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. O trabalho com computadores deverá ainda ser explorado e desenvolvido na Área de Projecto e em actividades complementares, não podendo, contudo, o trabalho com computadores ser remetido exclusivamente para fora do trabalho regular da aula de Matemática.

Internet

Estando todas as Escolas Secundárias ligadas à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação. Na bibliografia final são indicados alguns sítios recomendados; esses sítios contêm ligações para muitos outros sítios de interesse. Para o trabalho com os estudantes apresenta-se como exemplo de trabalho proveitoso o de projectos como "Pergunta Agora" ou "Investiga e Partilha" onde os estudantes podem colocar dúvidas ou partilhar a resolução de problemas (os projectos podem ser acedidos a partir da página da APM-Associação de Professores de Matemática).

Como exemplo de um projecto de interesse geral para professores e estudantes e para divulgação da matemática aponta-se o do projecto "Atractor-Matemática Interactiva" que pode ser visto em:

<http://www.fc.up.pt/atractor>

3 Desenvolvimento dos temas e indicações metodológicas

Teoria Matemática das Eleições

Este tema funciona, neste programa, como **módulo inicial**. As técnicas matemáticas que envolve (numa abordagem elementar, como tem de ser a de um programa desta índole) são todas leccionadas no 2º e 3º ciclos. Assim, poderá começar a insistir-se num trabalho metodológico mais avançado, que é a base fundamental para o sucesso de uma disciplina deste tipo.

Como este tema trata de um assunto correntemente abordado na comunicação social, não será difícil encontrar exemplos concretos ou mesmo fazer simulações na sala de aula. O assunto em si está também claramente dentro dos interesses dos estudantes deste agrupamento e poderá assim constituir uma boa introdução ao estudo da Matemática para os estudantes de Ciências Sociais e Humanas.

Podemos ainda apresentar as seguintes vantagens de um trabalho com este tema:

- aborda um assunto muito importante para qualquer regime político democrático;
- ajuda a recordar técnicas e conceitos matemáticos já abordados no ensino básico, tais como cálculo, percentagens e desigualdades;
- alerta os estudantes para a importância de modelos matemáticos em áreas fora das ciências e da engenharia;
- mostra as limitações de um modelo matemático;
- permite uma forma de trabalho em que o investigar situações, o recolher dados, o analisar situações e o escrever de pequenos relatórios desempenham um papel preponderante.

Nesta ordem de ideias apresenta-se a seguir uma possível sequência de trabalho:

Estudo de algumas eleições.

Objectivos a atingir:

- Perceber como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições.

- Perceber que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes.

Todo o trabalho ganha se for feito a partir de exemplos concretos que tanto podem vir de votações feitas entre os próprios estudantes (cores, sabores, clubes, países, etc.), como podem vir de dados de eleições já realizadas, com particular relevância para as eleições nacionais, regionais e locais portuguesas; devem contudo evitar-se exemplos demasiado recentes passíveis de gerar efervescência desnecessária na sala de aula. Devem também ser usados alguns exemplos históricos significativos, de diferentes épocas e países que tenham usado diferentes sistemas de votação.

O professor deve usar a metodologia que achar mais adequada de modo a que os estudantes participem activamente no estudo dos exemplos e modelos propostos.

Os estudantes devem recorrer à tecnologia (calculadoras gráficas ou computadores) para simular variações das situações estudadas e tentar retirar algumas conclusões, elaborando pequenos relatórios.

Como melhorar o sistema de votação.

Objectivos a atingir:

- Estudar algumas situações paradoxais.
- Analisar algumas condições para ter um sistema adequado.
- Perceber que há limitações à melhoria dos sistemas.

A situação paradoxal mais interessante que se pode estudar é a do paradoxo de Condorcet que é facilmente entendido através de um exemplo concreto.

Os diferentes sistemas de votação e métodos de contabilização de mandatos que poderão ser estudados são: por ordem de preferência, maioritário com duas ou mais voltas, proporcional (com diferentes métodos de traduzir a proporcionalidade), de aprovação. Cada sistema estudado deve ser acompanhado de uma pequena análise das suas principais consequências.

O teorema de Arrow, que mostra as limitações de um sistema matemático de votação e de contabilização dos mandatos em eleições, pode ser trabalhado com diferentes níveis de aprofundamento, podendo contudo fazer-se apenas uma breve referência à sua existência. Esta é uma boa oportunidade para fazer uma referência histórica ao matemático Kenneth Arrow que foi galardoado com o prémio Nobel da Economia em 1972.

Não se pretende desenvolver uma teoria matemática das eleições, mas tão só alertar os estudantes para uma área de importância fundamental na sociedade actual e como a matemática é uma ferramenta incontornável (embora de modo nenhum seja a única ferramenta relevante).

Teoria da Partilha Equilibrada

Dificuldades da partilha.

Objectivos a atingir:

- Familiarizar os estudantes com as dificuldades de uma partilha equilibrada.

Para os estudantes entenderem melhor o problema poderão trabalhar com diversas situações elementares (divisão de um bolo, criação de uma comissão representativa dos alunos do 10^o, 11^o e 12^o anos numa escola secundária, herança, etc.) propondo os métodos de partilha que lhes parecerem mais adequados (havendo normalmente desacordo sobre o melhor método).

Para os estudantes observarem melhor as dificuldades do problema poderão ser propostos problemas clássicos de divisão (como o dos camelos de Malba Tahan); os estudantes poderão também discutir alguns casos concretos de heranças (com referências socio-culturais às regiões de inserção) procurando compreender os procedimentos ancestrais das comunidades para a divisão de bens. Sobre estas questões históricas e da sua herança cultural devem realizar trabalhos em que esclareçam a matemática usada.

Partilhas no caso discreto.

Objectivos a atingir:

- Experimentar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (actual ou histórica).
- Comparar a aplicação de dois algoritmos que produzam resultados diferentes numa mesma situação.

Para o caso discreto poderão ser estudados os algoritmos usados no Congresso dos Estados Unidos para determinar o número de lugares de cada Estado (métodos de Hamilton, de Jefferson, de Webster, de Hill, etc), o algoritmo usado para determinar o número de lugares nos parlamentos de Portugal e de outros países assim como no Parlamento Europeu.

Os estudantes poderão experimentar quais as alterações que o uso de um método diferente traria. Isso fornecerá oportunidades para trabalhos individuais e de grupo que devem dar origem a diferentes composições, relatórios ou investigações históricas.

Partilhas no caso contínuo.

Objectivos a atingir:

- Experimentar pelo menos um algoritmo usado numa situação real (actual ou histórica).
- Comparar a aplicação de dois algoritmos que produzam resultados diferentes numa mesma situação.

Para o caso contínuo poderão ser estudados os algoritmos da "divisão de Steinhaus - pelo último a escolher", da "divisão de Banach e Knaster - último a diminuir" ou da "divisão livre de inveja de Taylor e Brams".

Poderá ser aproveitado algum dos algoritmos discutidos para fazer considerações históricas (se se tratar de um matemático contemporâneo poderá ser referida a sua formação, o seu trabalho actual, assim como outras áreas de actuação).

Estatística

Interpretação de tabelas e gráficos através de exemplos.

Objectivos a atingir:

- Familiarizar os estudantes com a leitura e interpretação de informação transmitida através de tabelas e gráficos.

De forma a cimentar alguns dos conhecimentos adquiridos no Ensino Básico, na introdução do tema Estatística, propomos que se comece com a interpretação de tabelas e gráficos, já construídos, que são instrumentos privilegiados em qualquer procedimento estatístico. Pretendemos chamar a atenção para o quanto estes processos podem ser ricos na transmissão de informação, mas também alertar para algumas representações que podem levar a interpretações erradas. Os exemplos devem ser sugestivos, ligados a actividades do mundo real.

Pretende-se que no fim deste módulo os estudantes estejam familiarizados com os diferentes tipos de gráficos e tabelas, que são usados para reduzir a informação contida num conjunto de dados, sem terem a preocupação de quais as regras ou metodologias utilizadas na sua construção. No texto de apoio que acompanha o programa sugerimos alguns exemplos que podem ajudar a clarificar a metodologia proposta.

Planeamento e aquisição de dados. Questões éticas relacionadas com as experimentações. Exemplos.

Objectivos a atingir:

- Apresentar as ideias básicas dos processos conducentes à recolha de dados válidos.
- Fazer sentir a necessidade de aleatorizar os processos de recolha de dados.

Neste módulo, que consideramos de grande importância, é que se tem a oportunidade de dar a entender o que é a Estatística, como ciência. Em qualquer procedimento estatístico estão, de um modo geral, envolvidas duas fases importantes, nomeadamente a fase que diz respeito à organização dos dados – *Análise de dados*, e a fase em que se procura retirar conclusões a partir dos dados, dando ainda informação de qual a confiança que devemos atribuir a essas conclusões – *Inferência Estatística*. Existe no entanto uma fase pioneira, que diz respeito à *Produção ou Aquisição de Dados*. Como é referido em **Tannenbaum et al.** (1997), p. 426,

”Behind every statistical statement there is a story, and like any story it has a beginning, a middle, an end, and a moral. In this first statistics chapter we begin with the beginning, which is statistics typically means the process of gathering or collecting data. Data are the raw material of which statistical information is made, and in order to get good statistical information one needs good data”.

Aplicação e concretização dos processos anteriormente referidos, na elaboração de alguns pequenos projectos com dados recolhidos na Escola, com construção de tabelas e gráficos simples.

Objectivos a atingir:

- Fazer sentir a necessidade de organizar os dados, de forma a fazer sobressair a informação neles contida.
- Fazer sentir a necessidade de alguma metodologia na organização dos dados.

Neste módulo pretende-se que os estudantes elaborem pequenos estudos em que face a um determinado problema, identifiquem a População objectivo, seleccionem uma amostra representativa, quando não for possível estudar a População toda e façam a redução dos dados obtidos através de uma sondagem. Nesta fase é importante que o Professor dê a ajuda necessária, quando não for imediata a forma de organizar os dados.

Os projectos efectuados devem estar relacionados com dados recolhidos na Escola ou no meio que rodeia a escola, pois de um modo geral os estudantes ficam motivados por estes estudos, já que gostam de conhecer a realidade da sua Escola.

Classificação de dados. Construção de tabelas de frequência. Representações gráficas adequadas para cada um dos tipos de dados considerados.

Objectivos a atingir:

- Habilitar na utilização das ferramentas mais adequadas para o tratamento dos diferentes tipos de dados.
- Ensinar a fazer uma leitura adequada dos gráficos.

Neste módulo procede-se à organização e redução dos dados obtidos através de sondagens ou experimentações. É importante ter presente o tipo de dados objecto de estudo, pois nem sempre se pode aplicar a mesma metodologia estatística a todos os tipos de dados.

Nesta fase de organização dos dados é essencial construirmos “bons” gráficos, para que tenha sentido a frase vulgarmente utilizada “um gráfico vale mais do que mil palavras”.

Cálculo de estatísticas. Vantagens, desvantagens e limitações das medidas consideradas.

Objectivos a atingir:

- Apresentar umas medidas, que tal como as representações gráficas, permitem reduzir a informação contida nos dados.
- Chamar a atenção para as vantagens e para as situações em que não se devem calcular.

Além das representações gráficas também se utilizam medidas calculadas a partir dos dados – *estatísticas*. Destas medidas destacam-se as medidas de localização, nomeadamente as que localizam o centro da amostra, de que destacamos a *média* e a *mediana*, e medidas de dispersão, que medem a variabilidade apresentada pelos dados, de que destacamos o *desvio padrão* e a *amplitude inter-quartil*. Outras medidas de localização a considerar são os *quantis*, nomeadamente os *quartis* e os *percentis*.

Deve-se observar que ao reduzir a informação contida nos dados sob a forma de alguns números, se está a proceder a uma redução drástica desses dados, pelo que as estatísticas consideradas devem ser convenientemente escolhidas de modo a representarem o melhor possível os dados que pretendem sumariar.

Nesta secção, em que se refere a pouca utilidade do par (média, desvio-padrão), para caracterizar distribuições de dados fortemente enviesadas, pode-se falar de *transformações* de dados que

permitem reduzir o enviesamento e conduzir a distribuições aproximadamente simétricas, onde já tem sentido falar naquelas medidas que são as mais divulgadas e mais conhecidas.

Introdução gráfica à análise de dados bivariados.

Objectivos a atingir:

- Apresentar um modo eficaz de visualizar a associação entre duas variáveis.
- Saber interpretar o tipo e a força com que duas variáveis se associam.

Pode acontecer que sobre um indivíduo da população a estudar se recolha informação sobre duas características ou variáveis quantitativas, obtendo assim um conjunto de dados sobre a forma de pares de dados. Normalmente o que se pretende neste caso é estudar a relação entre as duas variáveis, que se supõe estarem relacionadas. O processo adequado para descrever esta relação é começar pela representação gráfica conhecida por diagrama de pontos ou diagrama de dispersão. O que se pretende retirar de uma representação deste tipo é a forma, direcção e grau de associação entre as variáveis.

Devem ser exemplificadas as diferentes situações que podem surgir, reflectindo os diferentes tipos e graus de associação que se pode verificar entre as variáveis.

Se se concluir que tem sentido falar numa associação entre as variáveis, então passa-se a uma fase posterior, da construção de um modelo que permita conhecer como se reflectem numa das variáveis as modificações processadas na outra, o que conduzirá aos modelos de regressão, a estudar a seguir.

Modelos de regressão linear

Objectivos a atingir:

- Ensinar a sumariar a relação linear existente entre duas variáveis, através de uma recta.
- Apresentar uma medida que além de indicar a força com que duas variáveis se associam linearmente, também dá indicação da “bondade” do ajustamento linear.

No módulo anterior em que se representaram graficamente conjuntos de pontos (x_i, y_i) num diagrama de pontos ou diagrama de dispersão, verificou-se que para alguns conjuntos de pontos, se verificava a existência de uma certa associação linear traduzida pelo padrão da nuvem de pontos, na forma de uma oval, mais ou menos alongada. Pretende-se, nestes casos, introduzir um modelo matemático que traduza a relação entre os pontos, nomeadamente proceder a um *ajustamento de uma recta* a esses conjunto de pontos.

Utilizar a recta de regressão num dos seus objectivos fundamentais, isto é na predição de um valor para a variável resposta, a partir de um valor dado para a variável explicativa.

Devem ser referidas, nomeadamente dando exemplos, limitações da recta de regressão, quando existem *outliers*.

Posteriormente recomenda-se a definição do coeficiente de correlação, como uma medida que mede o maior ou menor grau de associação linear, com que as variáveis se associam. Deve ser apresentada a fórmula

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

que permite o seu cálculo e que deve ser utilizada para justificar graficamente o maior ou menor valor obtido para o coeficiente de correlação, conforme o aspecto da nuvem de pontos.

Devem ser referidas, nomeadamente dando exemplos, limitações do coeficiente de correlação, quando existem *outliers*.

Na interpretação do coeficiente de correlação deve-se chamar a atenção para o facto de que a existência de correlação elevada entre duas variáveis não significa necessariamente uma relação de causa-efeito.

Recomenda-se que se enuncie o resultado, que permite interpretar o coeficiente de correlação no contexto da recta de regressão.

Deve ser ainda chamada a atenção para o perigo da utilização da recta de regressão para fazer extrapolações.

Relação entre variáveis qualitativas

Objectivos a atingir:

- Apresentar um modo eficaz de organizar informação de tipo qualitativo.
- Chamar a atenção para a utilização incorrecta que, por vezes, se faz da leitura de percentagens a partir de tabelas.

No módulo anterior foram exploradas as relações entre variáveis de tipo quantitativo. Pretende-se neste módulo estudar algumas formas de explorar as relações entre variáveis de tipo qualitativo. Chama-se a atenção para o facto de que as variáveis envolvidas podem ser por inerência de tipo qualitativo (sexo, estado civil, etc), enquanto que outras foram categorizadas por se ter procedido a agrupamentos de variáveis de tipo quantitativo (idade, altura, etc).

O instrumento básico para a análise de dados bivariados, de tipo qualitativo é a representação dos dados em tabelas de contingência, cuja análise se faz calculando percentagens adequadas.

Modelos Financeiros

Não se pretende que os estudantes realizem quaisquer actividades puramente matemáticas ou de matemática aplicada à economia ou finança. O que se pretende é colocar os estudantes perante preocupações bem reais da vida humana e social, cujos modelos podem ser considerados modelos financeiros simples.

É bom chamar a atenção dos estudantes para o facto de se ir sempre lidar com modelos simplificados e que não devem pensar que vão ficar a dominar completamente as situações abordadas; apenas vão ficar mais despertos para algumas das dificuldades envolvidas.

Sensibilização para os problemas matemáticos da área financeira

Objectivos a atingir:

- Familiarizar os estudantes com alguns problemas do domínio financeiro.
- Recordar técnicas e conceitos matemáticos já abordados no ensino básico.

Os estudantes devem trabalhar duas ou três pequenas situações, com uma abordagem exploratória, comparando a influência de diversas das variáveis em jogo.

As situações escolhidas devem ser, ao mesmo tempo, acessíveis e motivadores para os estudantes. Exemplos: impostos e reformas; actividade bancária – poupança e juros, diferentes tipos de contas e de empréstimos, investimentos; custo de vida, inflação; planos, contratos e assinaturas de telemóveis; situações de aluguer ou compra – vantagens e inconvenientes; seguros; etc. A utilização da calculadora e do computador (nomeadamente de folhas de cálculo) é particularmente útil na exploração de situações envolvendo várias variáveis.

Estudo detalhado de um modelo envolvendo juros

Objectivos a atingir:

- Identificar a matemática utilizada em situações realistas.
- Desenvolver competências sociais de intervenção - tomar conhecimento dos métodos utilizados pelas instituições (públicas e privadas) que influenciam a vida dos cidadãos, ganhar capacidade para construir e criticar opções e utilizar o conhecimento para decidir sobre opções individuais.
- Desenvolver competências de cálculo e de selecção de ferramentas adequadas a cada problema: calculadora, computador e folha de cálculo.

Vários contextos acessíveis e motivadores para os estudantes podem ser utilizados. Exemplos de contextos: poupança com vista a um gasto específico (despesas de férias, etc.) ou com vista a uma utilização genérica (conta poupança habitação, etc), diferentes tipos de empréstimos, depósitos em fundos de investimento; situações de aluguer ou compra com empréstimo – comparação entre diferentes modalidades; seguros de vida com investimento; etc.

Uma actividade deste tipo levará de uma forma natural o estudante a resolver problemas, investigar, recolher dados e termos utilizados em diversas actividades humanas, analisar situações e a escrever pequenos relatórios

Pretende-se que os estudantes trabalhem individualmente e em grupo em interacção com empresas e instituições instaladas na comunidade local, desde agências bancárias até empresas ou delegações locais de empresas, procurando compreender situações e mecanismos que lhes são aplicáveis.

O professor pode apresentar situações ou problemas para os quais os estudantes devam fazer simulações de acordo com as condições iniciais e cenários possíveis de evolução do mercado (há vantagem em considerar sempre dados oficiais), produzindo pareceres e propostas para apoiar uma decisão ou escolha.

Modelos de Grafos

Pretende-se que os estudantes interpretem algumas situações de sistemas de distribuição e explorem diversas soluções para problemas que lhes sejam postos em cada situação. As situações a escolher devem poder ser representadas na essência por um sistema de pontos e de linhas unindo alguns desses pontos.

Está fora de questão uma introdução teórica sistematizada da teoria de Grafos, mas alguns dos raciocínios comuns aos teoremas e problemas dos circuitos de Euler e Hamilton não devem ser evitados.

Definições e notações podem ser introduzidas à medida que forem sendo necessárias e úteis para economia e clareza da linguagem e devem ser tanto quanto possível inteligíveis no âmbito das situações em estudo.

Os problemas históricos podem ser apresentados nas aulas, mas podem servir para desenvolver actividades de consulta e projectos.

Se os exemplos apresentados se referirem a situações concretas nas comunidades, as propostas de solução podem ser apresentadas aos responsáveis. Desse modo, desenvolvem-se competências úteis para a intervenção cívica ao mesmo tempo que se desenvolvem competências fundamentais ao nível da comunicação envolvendo matemática.

Sistemas de distribuição – postal, de limpeza de ruas e recolha de lixo, de patrulhamento e controle de equipamentos sociais

Objectivos a atingir:

- Desenvolver competências para determinar o essencial de uma determinada situação de modo a desenhar esquemas apropriados a uma boa descrição;
- Procurar modelos e esquemas que descrevam situações realistas de pequenas distribuições;
- Tomar conhecimento de métodos matemáticos próprios para encontrar soluções de problemas de gestão;
- Encontrar estratégias passo a passo para encontrar possíveis soluções;
- Descobrir resultados gerais na abordagem de uma situação.

O professor pode apresentar situações que sejam modeladas por grafos de arestas (sistemas de distribuição - carteiros, etc; patrulhamento e controle de equipamentos sociais - parçómetros, etc; sistemas de limpeza de ruas e de recolha de lixo, etc).

Níveis crescentes de exigência nos problemas apresentados podem servir para introduzir noções e técnicas. Um problema de patrulhamento ou distribuição postal pode ser proposto sobre um mapa desde encontrar quaisquer caminhos possíveis, passando por encontrar caminhos sem repetir arestas, até à necessidade de caminhos sem repetições a começar e a acabar num mesmo ponto.

As noções de vértice, aresta, caminho, circuito são óbvias. Obrigatórias são também as condições para que um grafo admita circuitos de Euler e a procura de algoritmos para encontrar uma solução com o mínimo de repetições na falta de uma solução sem repetições. Podem ser introduzidos sentidos nas ruas (arestas) e a grafos orientados.

Planos de viagens, problemas de caixeiros viajantes, localização de sedes ou grandes equipamentos que carecem de abastecimento a partir de vários pontos de uma região

Objectivos a atingir:

Para além de prosseguir os objectivos já definidos para a primeira parte do tema, há objectivos específicos, a saber,

- Para cada modelo, procurar esquemas combinatórios (árvores) que permitam calcular pesos totais de caminhos possíveis;
- Encontrar algoritmos – decisões passo a passo para encontrar soluções satisfatórias;
- Discussão sobre a utilidade e viabilidade económica (e não só) da procura das soluções óptimas.

Apresentam-se algumas situações que sejam modeladas por grafos de vértices, em que o que interessa é visitar todos os vértices de preferência sem repetições e com partida e chegada do mesmo ponto, isto é, afigura-se obrigatória uma abordagem dos circuitos hamiltonianos e um exemplo para introdução do Problemas do Caixeiro Viajante. Também é absolutamente

necessário o trabalho com "árvores" que visa facilitar as somas de pesos atribuídos às arestas de modo a ser possível comparar os pesos totais das várias soluções. A procura de algoritmos próprios para obter soluções aceitáveis é também um exercício de importante utilidade formativa.

A atribuição de pesos às arestas deve ser acompanhada da discussão dos seus diversos sentidos – maior número de quilómetros, maior consumo de combustível, mais poluição, menos lucro, preços mais altos – e isso deve ser discutido com situações que envolvam a localização dos grandes armazéns de uma cadeia de distribuição comercial, utilizando uma frota de camiões num dado território, localização de equipamentos sociais (unidades de tratamento de resíduos, aterros sanitários, etc) introduzindo os factores das deslocações e da combustão no tráfego, etc

Modelos Populacionais

Modelos discretos.

Objectivos a atingir:

- Familiarizar os estudantes com modelos discretos de crescimento populacional.
- Comparar o crescimento linear com o crescimento exponencial através do estudo de progressões aritméticas e geométricas.

Se o trabalho for feito a partir de exemplos concretos (e recorrendo a dados da realidade portuguesa) será mais fácil que os alunos participem activamente no estudo dos exemplos e modelos propostos. Haverá também vantagem em usar alguns exemplos históricos significativos (Malthus será uma referência incontornável).

O professor pode apresentar situações ou problemas com os quais os estudantes possam fazer simulações de acordo com as condições iniciais e cenários possíveis de evolução mundial (dados oficiais devem ser sempre preferidos), produzindo pareceres e propostas para apoiar uma decisão ou escolha.

Modelos contínuos.

Objectivos a atingir:

- Familiarizar os estudantes com modelos contínuos de crescimento populacional.
- Comparar os crescimentos linear, exponencial, logarítmico e logístico.

As funções exponencial, logarítmica e logística devem ser introduzidas em situações concretas, sendo referidas apenas as propriedades bastantes para o respectivo trabalho algébrico (salientando-se, quando for o caso, a generalização de situações anteriormente encontradas – por exemplo o estudo das progressões aritméticas e geométricas pode servir para introduzir a função logarítmica).

Neste tema, o aluno tomará contacto com várias famílias de funções. Não se pretende um estudo detalhado e exaustivo, mas apenas uma análise de comportamentos em contextos concretos relativos à evolução de populações.

Os alunos devem recorrer à tecnologia (calculadoras gráficas ou computadores) para estudar as famílias de funções que forem encontrando e simular variações de dados nos modelos analisados. Os alunos poderão usar as diferentes regressões para obter modelos abstractos a partir de dados

recolhidos de fontes diversas. É essencial uma análise crítica dos modelos escolhidos para cada caso.

Se houver tempo poderá ser feita uma pequena análise das vantagens e desvantagens do uso de modelos discretos e de modelos contínuos.

Modelos de Probabilidade

Fenómenos aleatórios

Objectivos a atingir:

- Dar a entender aos estudantes a diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório.
- Alertar para as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para este tipo de fenómenos.

A existência de fenómenos que, por razões diversas, não são passíveis de ser descritos por leis determinísticas é a grande motivação para o aparecimento de modelos de probabilidade.

Neste módulo sugerimos que se comece por dar exemplos de fenómenos físicos determinísticos (queda de um grave, movimento de um pêndulo,...) em contraponto com fenómenos que se podem considerar aleatórios devido à grande complexidade das leis físicas subjacentes (movimento de um dado ao ser lançado, movimento das partículas numa nuvem de pó, temperatura máxima observada numa data futura,...).

Argumento de Simetria e Regra de Laplace.

Objectivos a atingir:

- Construir modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio.
- Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir dos modelos construídos.
- Construir modelos de probabilidade para situações um pouco mais complexas utilizando a regra do produto.

Pretende-se que os estudantes sejam capazes de entender o argumento de simetria que está subjacente à atribuição de probabilidades a cada um dos resultados de certas experiências aleatórias (em exemplos ligados aos chamados jogos de azar é quase sempre possível encontrar um espaço de resultados para cujos elementos, à partida, não se tem razão para admitir que não tenham igual probabilidade de ocorrer). Estes modelos muito simples irão permitir uma primeira abordagem à noção de acontecimento e a apresentação da Regra de Laplace. Experiências um pouco mais complexas poderão ser modeladas recorrendo à Regra do Produto.

Não se justifica, nesta disciplina, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório.

Este módulo deve ser finalizado com a apresentação e discussão com os estudantes de alguns exemplos de fenómenos aleatórios para os quais não faça sentido utilizar argumentos de simetria.

Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade.

Objectivos a atingir:

- Aprender as propriedades básicas de uma função massa de probabilidade.
- Identificar acontecimentos em espaços finitos.
- Saber calcular as probabilidades de alguns acontecimentos utilizando propriedades da probabilidade.

Neste módulo irá ser feita a apresentação formal de modelo de probabilidade no caso muito particular em que o espaço de resultados seja finito e contido no conjunto dos números reais. A função *massa de probabilidade* ou *distribuição de probabilidade* é aqui o elemento básico de trabalho e o estudante deverá compreender a sua utilidade e conhecer bem as suas propriedades. Definindo acontecimento neste caso particular como sendo qualquer dos subconjuntos do espaço de resultados o professor deverá aproveitar a oportunidade para ilustrar através de exemplos algumas das propriedades da probabilidade (probabilidade da união, do complementar e da diferença).

Probabilidade condicional. Árvore de probabilidades. Acontecimentos independentes.Objectivos a atingir:

- Fazer compreender a noção de probabilidade condicional através de exemplos simples.
- Mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias.
- Ilustrar a forma de cálculo de probabilidades de acontecimentos utilizando uma árvore de probabilidades.
- Apresentar a definição de probabilidade condicional (tomando como base uma representação em diagrama de Venn de uma população classificada de forma cruzada segundo diversas categorias).
- Utilizar a definição de probabilidade condicional para formalizar a noção intuitiva de acontecimentos independentes. Apresentar a definição de acontecimentos independentes.

A noção de probabilidade condicional é, em geral, intuitiva para os estudantes quando é aplicada no cálculo de probabilidades de cadeias de acontecimentos (ao retirar bolas de uma urna sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos que saíram nas extracções anteriores). Deve-se pedir aos estudantes que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos aproveitando para lhes propôr esquemas em árvore como forma de organização da informação disponível.

A partir de informação registada numa tabela de contingência os estudantes deverão ser capazes de calcular correctamente probabilidades condicionais. A definição de probabilidade condicional poderá então ser apresentada começando por representar a informação da tabela num diagrama de *Venn*.

Probabilidade total. Regra de Bayes.Objectivos a atingir:

- Introduzir os estudantes nas técnicas Bayesianas, que se baseiam no seguinte princípio: começa-se por atribuir uma probabilidade a um acontecimento, tendo em consideração a informação disponível – probabilidade *a priori*; posteriormente, mediante nova informação entretanto adquirida,

obtém-se uma nova probabilidade para esse acontecimento – probabilidade *a posteriori*. Esta pode ser entendida como uma correcção da probabilidade anteriormente atribuída.

Conhecendo as “probabilidades *a priori*” de um certo efeito A ser originado por cada uma de n “causas” possíveis e mutuamente exclusivas e conhecendo o modelo de probabilidade para essas “causas”, a regra de Bayes permite calcular a “probabilidade *a posteriori*” – após a ocorrência de A – de ter sido uma determinada, a causa que originou A. Os estudantes deverão analisar e trabalhar muitos exemplos que lhes permitam não só clarificar a noção de causa/efeito como ilustrar a utilidade da *regra de Bayes*.

Valor médio e variância populacional.

Objectivos a atingir:

- Fazer a distinção entre valor médio (ou média) populacional e média amostral e também, de modo idêntico, para a variância e outras características já referidas no estudo descritivo de amostras.
- Alargar a noção de população como um conceito subjacente a um modelo de probabilidade.
- Apresentar de forma justificada as fórmulas de cálculo do valor médio e da variância para modelos quantitativos de espaço de resultados finito.

Este é o módulo fundamental para a compreensão dos tópicos que irão ser tratados no capítulo da inferência estatística. Mais precisamente, no capítulo da inferência estatística irão ser dados resultados que irão permitir fazer certas afirmações (probabilísticas) sobre características de interesse numa população tendo como base unicamente a informação constante numa pequena parte dessa população (amostra).

Deve ficar claro para os estudantes que se utilizam termos análogos (média, variância, quantis) em três contextos distintos: amostra, população, modelo de probabilidade. É ainda de extrema importância fazer compreender de que modo é possível alargar o conceito de população de modo a que se possa falar de população subjacente a um modelo.

Espaços de resultados infinitos. Modelos discretos e modelos contínuos. Exemplos.

Objectivos a atingir:

- Mostrar o interesse em adoptar modelos com suporte não finito em situações onde o conjunto de resultados possíveis não seja conhecido na sua totalidade ou seja demasiado extenso.
- Calcular probabilidades de acontecimentos a partir de alguns modelos contínuos simples.

Através da discussão de alguns exemplos comuns (n^o de filhos das famílias portuguesas, alturas de todos os rapazes da escola, tempo de duração de um equipamento, etc.) alertar para as vantagens de se escolher um modelo de suporte infinito.

Os estudantes deverão compreender que qualquer função cujo gráfico nunca passe abaixo do eixo das abcissas, e tal que a área compreendida entre o gráfico e esse eixo seja igual a uma unidade, identifica um modelo de probabilidade no conjunto dos números reais. Deverão ainda ser capazes de associar a probabilidade de um intervalo à área, determinada por esse intervalo, entre o gráfico e o eixo.

Modelo Normal.

Objectivos a atingir:

- Salientar a importância deste modelo referindo o *Teorema Limite Central*.
- Referir as principais características de um modelo *Normal* ou *Gaussiano*.
- Calcular probabilidades com base nesta família de modelos recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard*.

O modelo Normal é um dos modelos mais utilizados em Estatística, devendo a sua relevância a um dos teoremas mais importantes da teoria da Probabilidade – o Teorema do Limite Central. Efectivamente, como veremos no módulo da Inferência Estatística, este teorema é a base de técnicas de inferência estatística largamente utilizadas, pois permite considerar as distribuições de amostragem, para a média e a proporção, como sendo aproximadamente normais.

Para além disso muitas características de interesse ligadas a fenómenos naturais (altura de um indivíduo, perímetro do tronco de uma árvore, peso de um certo tipo de fruto, etc) podem ser encaradas como resultantes do contributo (de forma aditiva) de muitas variáveis. O TLC justifica a utilização do modelo Normal na modelação deste tipo de grandezas.

Introdução à Inferência Estatística

Parâmetro e estatística

Objectivos a atingir:

- Apresentar as ideias básicas de um tipo de raciocínio com que os estudantes são confrontados pela primeira vez, em que a partir das propriedades estudadas num conjunto de dados, se procurarão tirar conclusões para um conjunto de dados mais vasto.

Neste módulo deve-se começar por recordar o que foi estudado no capítulo da produção e aquisição de dados, objecto de estudos estatísticos. Deve ser recordado que nos processos utilizados para produzir dados, foi realçada a necessidade de que estes devem ser baseados em métodos probabilísticos. Neste contexto destacam-se os métodos de amostragem que conduzem às amostras aleatórias, em que existe um mecanismo aleatório que faz com que um elemento da população faça parte da amostra, assim como as experimentações controladas, em que cada indivíduo é escolhido aleatoriamente para lhe ser atribuído um tratamento. As razões invocadas na altura prendem-se sobretudo com a recolha de amostras não enviesadas.

Neste módulo compreender-se-á todo o alcance desta necessidade de aleatorizar o processo de recolha de dados, pois veremos que esse facto nos vai permitir utilizar a teoria das probabilidades para descrever o comportamento do processo associado com a recolha e sumariação dos dados, um grande número de vezes.

Um dos objectivos que se tem ao recolher uma amostra de uma População que se pretende estudar é o de retirar conclusões sobre os parâmetros (características numéricas) dessa População. Assim, quando se pretende estimar (obter um valor aproximado) um determinado parâmetro, considera-se uma função conveniente que só dependa dos elementos da amostra — estatística. Deve-se chamar a atenção para o facto de se utilizar um tipo de raciocínio indutivo, em que se vai procurar tirar conclusões, indo do particular para o geral. Este tipo de raciocínio é contrário ao tipo de raciocínio matemático, essencialmente dedutivo.

Noção de estimativa pontual. Estimação de um valor médio e de uma proporção. Distribuição de amostragem.

Objectivos a atingir:

- Apresentar as ideias básicas de um processo de inferência estatística, em que se usam estatísticas para tomar decisões acerca de parâmetros.

À estatística utilizada para estimar um determinado parâmetro chamamos estimador do parâmetro. Quando se recolhe uma amostra, calcula-se a partir dos dados da amostra recolhida o valor do estimador, que dá uma estimativa do parâmetro. Se se recolher outra amostra da mesma População e da mesma dimensão, é natural obter uma estimativa para o parâmetro, diferente da primeira. Quantas amostras recolhermos, quantas as estimativas diferentes que podemos obter para o parâmetro. É importante chamar a atenção para que não podemos dizer qual das estimativas pontuais é melhor, já que não se conhece o valor do parâmetro a estimar.

Esta variabilidade apresentada pelas estimativas, é inerente à aleatoriedade da escolha da amostra e uma questão que se coloca é a de saber se o estimador que se está a considerar é um “bom” estimador ou não, isto é, se por um lado as estimativas que produz são próximas umas das outras, ou apresentam uma grande variabilidade, e se por outro lado, no caso de apresentarem pequena variabilidade, se serão aproximadas do parâmetro que se pretende estimar.

A resposta a esta questão é dada construindo a distribuição de todos os valores apresentados pela estatística que se está a utilizar para estimar o parâmetro, para todas as amostras possíveis, da mesma dimensão. A esta distribuição dá-se o nome de distribuição de amostragem da estatística. Ao aleatorizar o processo de selecção das amostras, faz com que se possa utilizar a distribuição de amostragem de uma estatística para descrever o comportamento dessa estatística, quando se usa para estimar um determinado parâmetro. Se a média da distribuição de amostragem da estatística coincidir com o valor do parâmetro a estimar, dizemos que o estimador é não enviesado. Quanto à variabilidade apresentada pela distribuição de amostragem da estatística, quanto menor ela for, mais perto do parâmetro estão as estimativas obtidas a partir da estatística considerada.

A compreensão das diferenças entre parâmetro e estatística e do que é uma distribuição de amostragem, é a base dos processos de Inferência Estatística. Os parâmetros que se procuram estimar são: o valor médio – medida de localização do centro da distribuição dos valores assumidos por uma dada variável, cujo estimador será a média de uma amostra de observações dessa variável; a proporção ou frequência relativa com que se verifica uma determinada característica na População, cujo estimador será a proporção de vezes que essa característica se verifica nos elementos da amostra recolhida dessa População.

Construção de estimativas intervalares ou intervalos de confiança para o valor médio e para a proporção.

Objectivos a atingir:

- Mostrar toda a potencialidade da Estatística, que nos permite tirar conclusões e tomar decisões, indo do particular para o geral, quantificando o erro cometido nessa tomada de decisões.

Sendo a noção de distribuição de amostragem a base da maior parte das técnicas de inferência estatística, é importante exemplificar o seu processo de construção, podendo para começar, considerar um dos casos mais simples que é o de estimar um valor médio.

Nesta altura deve-se também chamar a atenção e exemplificar o papel desempenhado pela dimensão da amostra, para a precisão dos resultados, na medida em que diminui a variabilidade apresentada pela distribuição de amostragem.

Começa-se aqui a introduzir o conceito de confiança estatística, como resultado do estudo da distribuição de amostragem.

Uma vez trabalhado e entendido o conceito de distribuição de amostragem, deve-se recordar um resultado teórico, já enunciado no módulo da Probabilidade, com a maior relevância para a Estatística, conhecido pelo Teorema do Limite Central. Este teorema legitima, de certa maneira, a grande utilização do modelo Normal como modelo de variáveis que resultem de medições de grandezas naturais como a altura, peso, etc, que se admitem serem o resultado de um grande número de contribuições cumulativas. Estando a média e a proporção neste caso, este resultado poupa o trabalho de estar a obter as suas distribuições de amostragem, desde que as amostras tenham dimensão suficientemente grande, e o processo utilizado para as recolher tenha sido aleatório.

O processo da construção de distribuições de amostragem estende-se à proporção amostral, estatística utilizada para estimar o parâmetro proporção (probabilidade) de elementos da População que verificam uma determinada propriedade. O processo a seguir para o estudo da proporção pode ser o de considerar esta como um caso particular de uma média quando os elementos que têm a propriedade em estudo são representados por 1, enquanto que os outros são representados por 0.

Finalmente introduzir-se-á o conceito de intervalo de confiança tanto para o valor médio da característica em estudo da População, como para a proporção com que uma determinada característica está presente nos elementos da População. Deverá ser chamada a atenção para a interpretação correcta do que é que se entende por confiança, ao considerar um intervalo de confiança. Considera-se importante que os estudantes interpretem a amplitude do intervalo, como a maior ou menor precisão, isto é, como a margem de erro dos resultados obtidos quando se considera uma determinada confiança e uma determinada dimensão para a amostra. Deverá ser realçado o facto de a amplitude do intervalo de confiança depender da variabilidade da estatística utilizada.

O conceito de intervalo de confiança deverá ser trabalhado de forma a que os estudantes fiquem aptos a interpretar resultados veiculados pela comunicação social tais como: “o resultado da sondagem é de 76 uma margem de erro de 3 pontos percentuais”.

Os exemplos relacionados com as sondagens em tempo de campanhas eleitorais ou relativamente a outros problemas têm muito interesse, pois muito facilmente se encontram exemplos na comunicação social. Aliás, deve ser incentivada a leitura dos jornais e a recolha de assuntos que enunciem resultados objecto de tratamento estatístico.

Deverão também ser trabalhados vários exemplos que permitam descobrir o efeito de se utilizarem amostras de maior ou menor dimensão na determinação dos intervalos de confiança, quando a dimensão da População é muito superior à dimensão das amostras com que se trabalha. Sugere-se que se apresente a seguinte regra: Se a dimensão da População for muito superior à dimensão da amostra (por exemplo 100 vezes superior), a variabilidade da distribuição

de amostragem é a mesma para qualquer dimensão da População. Esta regra traduz uma característica importante dos processos de amostragem, na medida em que traduz o facto de as distribuições de amostragem não dependerem (muito) da dimensão da População.

Finalmente deve-se chamar a atenção para o facto de que se as amostras recolhidas forem enviesadas, os intervalos de confiança também virão enviesados, não tendo portanto qualquer utilidade.

Bibliografia

Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J.P. et al. (1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Abrantes, P.; Ponte, J.P. et al. (1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo "Matemática para todos-investigações na sala de aula", Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Estes livros reúnem um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto "Matemática para Todos" à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes, "as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática". De acordo com os organizadores dos livros "o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas".

Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática Col.* Ciência Aberta, Vol. 98 (2ª ed., 1998). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é "um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação" ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática "mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real". Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

COMAP. (1999) *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP

Este é um pequeno livro didáctico com uma introdução muito simples à teoria de grafos. Espera-se que esteja brevemente disponível em língua portuguesa.

Crisler, N., Fischer, P., Froelich, G. (2000). *Discrete Mathematics through Applications*. New York: W. H. Freeman and Co.

Este é um livro de texto para o ensino secundário que aborda temas como a teoria das eleições, a partilha equilibrada, os grafos e as probabilidades, com a abordagem metodológica preconizada neste programa, isto é, a abordagem de problemas matemáticos através de aplicações concretas. São particularmente relevantes os muitos exercícios propostos e as abundantes notas históricas.

Departamento de Educação Básica (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

Esta publicação do Departamento de Educação Básica constitui uma importante fonte de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessária para quem lecciona no ensino secundário.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM (1999) *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Lisboa: APM

Esta publicação contém actividades sobre Estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

Iman, R. e Conover, W. (1983). *A Modern Approach to Statistics*. John Wiley Sons.

Malkevitch, J. (1999). *The mathematical theory of elections*. COMAP, Lexington: COMAP

Este é um pequeno livro didáctico com uma introdução muito simples à teoria matemática das eleições. Espera-se que esteja brevemente disponível em língua portuguesa.

Mann, P. (1995). *Introductory Statistics*. John Wiley Sons.

Martins, M. E. G. (coord.), Monteiro, C., Viana, J. P. e Turkman, M. A. (1997). *Estatística: Matemática – 10^o ano de escolaridade*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes no domínio da Estatística para o programa de Matemática Aplicada às Ciências Sociais.

Martins, M. E. Graça (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Martins, M. E. Graça, Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Mendenhall. W. Beaver, R. (1994) *Introduction to Probability and Statistics*. Duxbury Press.

Moore, D. (1997). *Statistics – Concepts and Controversies*. Freeman.

- Moore, D. (1995). *The Basic Practice of Statistics*. Freeman.
- Moore, D., McCabe, G. (1993). *Introduction to The Basic Practice of Statistics*. Freeman.
- Murteira, B. (1993). *Análise Exploratória de dados – Estatística Descritiv*. McGraw-Hill de Portugal.
- National Council of Teachers of Mathematics (1981). *Teaching Statistics and Probability. 1981 Yearbook*. Reston, EUA.
- Parks, H. et al. (1997). *Mathematics in Life, Society the World*. Prentice-Hall, Inc.
- Parzen, E. (1969). *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York:Wiley.
- Pisani, R. Purves, R., Adhikari, A. (1991). *Statistics*. W. W. Norton Company.
- Ponte, J. P.(coord.), Boavida, A. M., Graça, M. e Abrantes, P. (1997) *Didáctica: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para qualquer programa de Matemática, pelo que é de consulta indispensável.

- Ponte, J.P.; Canavarro, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol 128). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

- Ponte, J. P.(coord.), Brunheiro, L., Abrantes, P. e Bastos, R. (1998) *Projectos Educativos: Matemática – ensino secundário*. Lisboa: ME – DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para qualquer programa de Matemática, pelo que é de consulta indispensável.

- Rossmann, A. (1996). *Workshop Statistics: discovery with data*. Springer-Verlag New York, Inc.
- Runyon, R. et al. (1996). *Fundamentals of Behavioral Statistics*. McGraw-Hill Companies, Inc.
- Sebastião e Silva, J.(1975-78). *Compêndio de Matemática* (5 vols) Lisboa: MEC – GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário. Recomendam-se em particular os capítulos de Probabilidades e Estatística.

Sebastião e Silva, J.(1975–77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC – GEP.

Este livro continua a ser um ponto de referência de muitos aspectos deste programa e constituem material base indispensável para o trabalho do professor, tanto em termos científicos como metodológicos. As "Normas Gerais" contidas no 1º volume do Guia devem ser objecto de reflexão por parte dos professores. Na primeira dessas Normas pode ler-se: "A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos estudantes é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os estudantes e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta".

Siegel, A. (1988). *Statistics and Data Analysis*. John Wiley Sons.

Steen, L.A.(coord). *For all practical purposes – introduction to contemporary mathematics* COMAP(1999). New York: W.H.Freeman and co.

Este é um livro de texto testado com êxito em vários países, destinado a estudantes do ensino secundário que terminam aqui a sua formação matemática. Contém explicações detalhadas (com numerosas referências históricas) e exercícios relativos, nomeadamente, a eleições, partilha equilibrada, grafos e estatística.

Stewart, Ian (1996). *Os Problemas da Matemática*. Ciência Aberta, Vol. 72, 2ª ed. Lisboa: Gradiva

O que é a Matemática? Segundo Ian Stewart a Matemática é sobre ideias não sobre símbolos e contas que são apenas ferramentas do ofício. O objectivo da matemática é perceber como diferentes ideias se relacionam entre si, pondo de lado o acessório e penetrando no âmago do problema. A Matemática não se preocupa apenas com a obtenção da resposta certa, mas sobretudo com o perceber de como uma resposta é de todo possível e porque tem determinada forma. Ainda segundo Ian Stewart há, pelo menos, cinco fontes distintas de ideias matemáticas: número, ordenação, forma, movimento e acaso. Os problemas são a força motriz da Matemática, sendo os exemplos outra fonte importante de inspiração da Matemática, conforme assinala o mesmo autor.

Struik, D. *História Concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

Este livro é uma referência clássica na História da Matemática, recomendando-se a segunda edição por conter um anexo relativo à História da Matemática em Portugal.

Tannenbaum, P. et al. (1998). *Excursions in Modern Mathematics*. Prentice-Hall, Inc.

Thiessen, H. (1997). *Measuring the Real World*. John Wiley Sons.

Valadares, J.; Graça, M. (1998) *Avaliando ... para melhorar a aprendizagem* Lisboa: Plátano.

Este livro, de muito interesse para qualquer professor de Matemática, analisa diversos aspectos teóricos e práticos da avaliação, sem esquecer uma perspectiva histórica. Contém numerosos exemplos de construção de variados tipos de itens de avaliação (e não só para a Matemática). Analisa com bastante pormenor as diferentes fases do processo de avaliação e as características fundamentais dos instrumentos de avaliação (como a validade e a fidelidade).

Vieira, A.; Veloso, E.; Lagarto, M. J. (org.).(1997) *Relevância da História no Ensino da Matemática*. História da Matemática - Cadernos do GTHEM - 1 APM. Lisboa: APM.

Este livro contém a tradução de três textos essenciais para quem queira reflectir nas vantagens de uso da História da Matemática na sala de aula: "Porquê estudar História da Matemática" de Dirk Struik, "A utilização da História em Educação Matemática" de John Fauvel e "Quer dar significado ao que ensina? Tente a História da Matemática" de Frank Swetz.

Páginas na INTERNET

Associação de Professores de Matemática

<http://www.apm.pt/>

Esta página contém a indicação dos projectos que APM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.

Centro de Competência Nónio século XXI "Softciências"

Mocho e Mocho Sábio

<http://softciencias.ccg.pt/mocho/>

Esta página contém um índice de páginas sobre Matemática em língua portuguesa; o Mocho Sábio contém páginas especialmente recomendadas pela sua qualidade científica e pedagógica.

Financial Mathematics in Context - Teaching and Assessment

<http://education.qld.gov.au/tal/kla/finance/teaching.htm>

Peter Cooper

Esta página contém vários documentos de apoio ao trabalho dos professores no ensino elementar de vários tópicos de matemática financeira.

Iniciação à Teoria de Grafos

<http://membros.aveiro-digital.net/adam/grafos/>

Esta página contém um texto introdutório e vários exercícios que serviram de base a dois cursos de formação via Internet do ex-projecto TRENDS.

Instituto Nacional de Estatística e Escola Secundária Tomaz Pelayo

Projecto ALEA

<http://alea-estp.ine.pt/>

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas de actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um fórum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz

<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/guzman.htm>

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática o seu ensino e a sua história.

Reajustamento do Programa de Matemática

<http://www.terravista.pt/AguaAlto/5783>

Esta página da Internet irá contendo indicações de apoio a este programa, como materiais de apoio e listas de endereços com interesse para professores e estudantes.

Sociedade Portuguesa de Matemática

<http://www.spm.pt/~spm>

Estas páginas contêm a indicação dos projectos que a SPM desenvolve e ligações para outras páginas de interesse.