

CURSOS PROFISSIONAIS DE NÍVEL SECUNDÁRIO

PROGRAMA

Componente de Formação Científica

Disciplina de

Matemática

Direcção-Geral de Formação Vocacional

2004/05

Parte I

Orgânica Geral

Índice:

	Página
1. Caracterização da Disciplina	2
2. Visão Geral do Programa	2
3. Competências a Desenvolver.....	4
4. Orientações Metodológicas / Avaliação	5
5. Elenco Modular	9
6. Bibliografia	11

1. Caracterização da Disciplina

O ensino da Matemática participa, pelos princípios e métodos de trabalho praticados, na educação do jovem para a autonomia e solidariedade, independência empreendedora, responsável e consciente das relações em que está envolvido e do ambiente em que vive.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao jovem fazer escolhas de profissão, ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e sentir-se motivado para continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual o jovem comunica e se relaciona com os outros, e para a qual a Matemática fornece instrumentos de compreensão mais profunda, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário.

Finalmente, a Matemática é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana.

São finalidades desta disciplina:

- desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- desenvolver a capacidade de seleccionar a Matemática relevante para cada problema da realidade;
- desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
- contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade actual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

2. Visão Geral do Programa

A Componente Científica é constituída, em cada curso profissional, por duas ou três disciplinas de natureza científica que correspondem simultaneamente, às exigências de um nível secundário de educação e de uma qualificação profissional de nível 3. Os estudantes desenvolvem conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitem a aprendizagem de um conjunto de competências orientadas para um sector de actividade, profissão ou família de profissões.

Para estes estudantes não é fundamental o desenvolvimento de competências ao nível do domínio das regras lógicas e dos símbolos. Se é legítimo ensinar a manejar as ferramentas de cálculo, o essencial da aprendizagem da Matemática deve ser procurado ao nível das ideias para a resolução de problemas e para as aplicações da Matemática. O uso das ferramentas deve ser ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja vantajoso o seu conhecimento, privilegiando mesmo características típicas do ensino experimental. A

Matemática, nas suas conexões com todos os ramos de saber, é uma contribuição decisiva para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas e tecnológicas.

Os temas a abordar, estruturados em módulos segundo o modelo curricular dos cursos profissionais, são os seguintes: números e geometria, incluindo trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades; matemática discreta.

A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria sintética e métrica, geometria analítica e trigonometria, com as competências de cálculo numérico a elas associadas, com permanentes preocupações de contextualização.

A abordagem das Funções Reais considerará as grandes famílias de funções, desde as algébricas inteiras, passando pelas fraccionárias e acabando nas transcendentais - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. Haverá uma ênfase natural nas aplicações, com particular relevo para as questões de taxa de variação e otimização.

A abordagem da Estatística e das Probabilidades elementares completará as aprendizagens básicas, com algumas noções novas e ferramentas que não podem ser compreendidas no ensino básico.

A Matemática Discreta aparecerá não apenas em ligação com as probabilidades, mas também em várias situações que requerem modelos discretos, como o das sucessões e progressões ou como os modelos matemáticos dos jogos.

Assim, a lista de módulos desta disciplina é constituída por dois grupos. O grupo de módulos A corresponde ao elenco destinado aos cursos cuja carga horária da disciplina é de 300 horas. Os módulos do grupo B destinam-se a ser combinados com módulos A, para a formação dos estudantes em cursos menos exigentes em carga horária. Este grupo de módulos B inclui temas menos aprofundados ou variações em relação aos temas tratados nos módulos A, por forma a responder mais adequadamente às exigências de formação decorrentes das famílias profissionais em que os cursos de enquadram.

Quadro Resumo - Distribuição dos Temas pelos **Módulos A**

Tema Transversal: **Aplicações e Modelação Matemática**

<p>Módulo A1 Geometria Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço.</p> <p>Módulo A2 Funções Polinomiais Funções e gráficos. Funções polinomiais de graus 2 e 3.</p> <p>Módulo A3 Estatística Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).</p>	<p>Módulo A4 Funções Periódicas Movimentos periódicos. Funções trigonométricas.</p> <p>Módulo A5 Funções Racionais Funções racionais. Modelação de situações envolvendo fenómenos não periódicos.</p> <p>Módulo A6 Taxa de Variação Taxa de variação média num intervalo. Taxa de variação num ponto.</p>	<p>Módulo A7 Probabilidade Modelos de Probabilidade.</p> <p>Módulo A8 Modelos Discretos Modelos discretos: sucessões e progressões.</p> <p>Módulo A9 Funções de Crescimento Modelos contínuos não lineares: exponencial, logarítmico e logístico.</p> <p>Módulo A10 Otimização Problemas de otimização. Aplicações das Taxas de Variação. Programação Linear como ferramenta de planeamento e gestão.</p>
--	---	---

Quadro Resumo - Distribuição dos Temas pelos **Módulos B**
 Tema transversal: **Aplicações e Modelação Matemática**

<p>Módulo B1 Funções Periódicas e Não Periódicas Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos e não periódicos. Breve abordagem das funções trigonométricas e das funções racionais.</p> <p>Módulo B2 Estatística Computacional Tratamento exploratório de dados usando uma folha de cálculo.</p> <p>Módulo B3 Modelos de Funções Estudo e resolução de problemas com modelos de funções elementares.</p>	<p>Módulo B4 Programação Linear Domínios planos. Interpretação geométrica de condições.</p> <p>Módulo B5 Jogos e Matemática Desenvolvimento de capacidades matemáticas através do uso de jogos de raciocínio.</p> <p>Módulo B6 Padrões Geométricos Identificação e análise de propriedades de figuras geométricas em situações do mundo real. Regularidades e padrões associados a transformações geométricas.</p>
---	---

O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais, recorrendo com frequência a ferramentas computacionais adequadas. Neste sentido, considera-se que as **Aplicações e Modelação Matemática** constituem um grande tema transversal a todos os módulos. A modelação e os problemas relacionados com as diferentes áreas profissionais constituem tanto a metodologia de trabalho privilegiada na construção dos conceitos matemáticos como uma competência a desenvolver que é imprescindível para estudantes que vão enfrentar no seu trabalho profissional problemas concretos muito variados e terão de saber seleccionar as ferramentas matemáticas relevantes para cada situação. É neste sentido que se assume o realce dado a **Aplicações e Modelação Matemática** como cabeçalho dos quadros-resumo comum a todos os módulos A e B.

Considera-se necessário que, no primeiro módulo do programa de cada curso, os estudantes sejam colocados perante a resolução de problemas escolhidos que permitam despistar dificuldades e deficiências na formação básica. A estratégia assente na resolução de problemas evita que os estudantes sejam desgastados em revisitações expositivas de assuntos que podem até já dominar.

3. Competências a Desenvolver

Espera-se que os estudantes se apropriem de conceitos e de técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. Pretende-se que o estudante seja capaz de formar uma opinião própria, participando nas decisões ou que consiga ele próprio tomá-las.

Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes garantem que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida.

A Matemática constitui um património cultural da humanidade e um modo de pensar que é distinto de outros ligados a diferentes áreas do conhecimento e da actividade humana. O professor proporá situações que levem os estudantes a realizar actividades matemáticas: explorar, procurar generalizações, fazer conjecturas e raciocinar logicamente. Ao realizar este tipo de actividades, cria-se o hábito de experimentar, tentar encontrar generalizações e procurar o que há de invariante numa situação. Se o estudante compreender que não basta que uma hipótese formulada se verifique em alguns casos para poder tomar essa hipótese como uma afirmação verdadeira, sendo necessário encontrar uma argumentação lógica para a validar ou um contra-exemplo para a rejeitar, então o estudante está a desenvolver aspectos essenciais da sua competência matemática.

Para desenvolver a competência matemática consideram-se os seguintes princípios fundamentais.

1. No ensino que parte de propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes dos diversos cursos, a mediação do professor é um dos processos essenciais na estruturação das aprendizagens significativas e no desenvolvimento da competência matemática dos estudantes. Disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias, com este tipo de ensino desenvolve-se a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção na realidade. A análise de situações da vida real, a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, a selecção de estratégias para resolver problemas, a formulação de hipóteses e previsão de resultados são orientações que contribuem para a formação de estudantes que manifestem vontade de aprender e gosto pela pesquisa. Neste âmbito há oportunidade para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.
2. A aprendizagem baseada no trabalho autónomo sobre as situações apresentadas (que podem apresentar vários níveis de resolução) e em actividades que aprofundem os conceitos introduzidos no decurso dos trabalhos, contribui para o desenvolvimento da autoconfiança dos estudantes criando-lhes oportunidades para se exprimirem, fundamentarem as suas opiniões e revelarem espírito crítico, de rigor e confiança nos seus raciocínios.
3. A participação da Matemática no desenvolvimento das competências profissionais contribui para o desenvolvimento da comunicação (dos conceitos, dos raciocínios ou das ideias) com clareza e progressivo rigor lógico. A definição de trabalhos de grupo, de acordo com as motivações dos estudantes, propicia o desenvolvimento do espírito de tolerância, de cooperação, do respeito pela opinião dos outros e a aceitação das diferenças, e pode contribuir para o desenvolvimento de interesses culturais e do gosto pela pesquisa.

4. Orientações Metodológicas / Avaliação

4.1. Aplicações e Modelação

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real e das profissões estão no centro deste programa. As aplicações integradas num contexto significativo para os estudantes, são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, sendo parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos estudantes e usadas como fonte de exercícios. Sendo as actividades de modelação e resolução de problemas centrais neste programa, recomenda-se fortemente que se cumpram os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações devem estar interligadas;
- os problemas apresentados devem estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos;
- os contextos das situações problemáticas apresentadas devem integrar diferentes ideias matemáticas;
- alguns dos problemas a seleccionar devem ser abertos, obrigando os estudantes a escolher as ferramentas matemáticas mais adequadas.

A escolha de situações ricas e variadas é essencial para o cumprimento destes critérios; recomenda-se a colaboração activa dos professores de Matemática e de outras disciplinas, em cada escola e de escolas vizinhas.

Os estudantes (individualmente ou em grupo) devem ter a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução de problemas; o facto de se poder confrontar diferentes processos de resolução de problemas permite fomentar a aprendizagem de uma forma crítica, valorizando o trabalho efectuado.

Assim, para todos os assuntos, sem esquecer a necessidade de contacto com as ideias e os métodos fundamentais da Matemática, a um certo nível, o ensino da Matemática é organizado em volta das aplicações viradas para o desenvolvimento de competências necessárias para o exercício de actividades profissionais qualificadas.

4.2. Comunicação Matemática

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica. É necessário proporcionar ao estudante oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

4.3. Tecnologia

O uso de tecnologias de cálculo, com capacidades gráficas e de comunicação, é fundamental para a criação e o desenvolvimento de competências úteis a todos os desempenhos profissionais. Pelas suas especificidades, a calculadora gráfica e o computador completarão os meios à disposição dos professores e estudantes para executar os diferentes aspectos de uma verdadeira actividade matemática. Com efeito permitem:

- obter rapidamente uma representação do problema, de um conceito, a fim de lhe dar sentido e favorecer a sua apropriação pelo estudante;
- ligar aspectos diferentes (gráfico, numérico e algébrico) de um mesmo conceito ou de uma mesma situação;
- explorar situações fazendo aparecer de forma dinâmica diferentes configurações;
- proceder de forma rápida à verificação de certos resultados.

Não é possível atingir os objectivos deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo, embora não seja exigível que se tratem todas simultaneamente e em todas as ocasiões; em particular, é fundamental a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, em algumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação.

4.3.1. Uso de calculadoras gráficas

As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), ferramentas que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O uso de calculadoras gráficas é obrigatório. Tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, há vantagens em que se explorem com a calculadora gráfica os seguintes tipos de actividade matemática:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; é importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a “copiar” o que vêem.

4.3.2. Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da geometria dinâmica e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa. Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. Programas de Geometria Dinâmica, de Cálculo Numérico e Estatístico, de Gráficos e Simulação, de Álgebra Computacional, fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a estudantes. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente, havendo muito *software* de distribuição livre, como o editado pelo Ministério da Educação no âmbito dos projectos Minerva e Nónio Século XXI. Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os estudantes poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional. Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. Nesse sentido as escolas são incentivadas a equipar-se com o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com a regularidade que o professor julgar aconselhável, recomendando-se que se constituam **Laboratórios de Matemática**.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem:

- observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas da representação gráfica;
- explorar claramente os diversos comportamentos e saber evitar conclusões apressadas;
- ser incentivados a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta e ser sistematicamente treinados na análise crítica de todas as conclusões;
- traçar sempre um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador;
- observar que a representação gráfica depende de forma decisiva do rectângulo de visualização escolhido.

Um estudante pode ser confrontado com situações em que erros de aproximação conduzam a resultados absurdos; quando isso acontecer deve saber analisar criticamente a situação, usando dados do problema em causa. Como forma de diminuir a possibilidade de ocorrência de situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de, nos cálculos intermédios, se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

4.3.3. Uso da Internet

Sendo hoje acessível a todas as escolas portuguesas a ligação à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste novo meio de comunicação, seja como fonte de informação, seja como fonte de recolha de dados realistas. A participação em actividades envolvendo estudantes de escolas diferentes é um bom meio de estimular a realização de actividades ligadas a situações reais e concretas.

4.4. Avaliação

Pretende-se que as situações de avaliação não se restrinjam ao produto final mas atendam essencialmente ao processo de aprendizagem e permitam que o estudante seja um elemento activo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem. As actividades de aprendizagem deverão ser encaradas como tarefas de avaliação. O professor pode ficar a conhecer o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação; esses dados podem ser utilizados para orientar aprendizagens posteriores que ofereçam aos estudantes oportunidade de ir integrando as novas aprendizagens de forma positiva e consciente.

O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificá-las. Recomenda-se fortemente que se usem redacções matemáticas (sob a forma de resolução de problemas, composições/reflexões, projectos, relatórios ou outras) que reforcem a importante componente da comunicação matemática (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou outro julgado adequado). Recomenda-se também a utilização de “testes em duas fases”¹ que permitem o desenvolvimento da persistência na procura de soluções para situações novas, para além de contribuírem para uma atitude de reflexão sobre a aprendizagem.

Em cada módulo são indicadas actividades importantes a realizar, pelo que a avaliação de cada módulo deve valorizar adequadamente a actividade desenvolvida pelo estudante. Como orientação geral são indicadas em cada módulo as formas de avaliação sumativa mais adequadas às actividades desenvolvidas no módulo. Entende-se que os professores poderão substituir cada prova proposta por uma ou mais provas que avaliem de forma equivalente as competências essenciais desenvolvidas em cada módulo.

4.4.1. Avaliação Sumativa Externa

A disciplina de Matemática é sujeita a avaliação sumativa externa concretizada na realização de exames nacionais nos termos e para os efeitos estabelecidos no artigo 11.º do Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março, conjugado com o artigo 26.º da Portaria n.º 550-C/2004, de 21 de Maio.

Assim, esta modalidade de avaliação aplica-se apenas para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior aos alunos dos cursos profissionais, cujas portarias de criação identifiquem a Matemática como disciplina sujeita a exame.

Em cumprimento do n.º 4 do artigo 26.º da portaria acima referida, estabelece-se que as provas de exame incidem sobre os módulos A2, A3, A6, A7, A9 e A10.

¹ PONTE, J. P. (coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1997). *Didáctica: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES. pp. 108-112. Disponível em — <http://mat-no-sec.org> —

5. Elenco Modular

Número	Designação	Duração de referência (horas)
A1	Geometria	36
A2	Funções Polinomiais	36
A3	Estatística	27
A4	Funções Periódicas	36
A5	Funções Racionais	36
A6	Taxa de Variação	27
A7	Probabilidade	21
A8	Modelos Discretos	27
A9	Funções de Crescimento	27
A10	Optimização	27
B1	Funções Periódicas e Não Periódicas	36
B2	Estatística Computacional	36
B3	Modelos de Funções	36
B4	Programação Linear	30
B5	Jogos e Matemática	36
B6	Padrões Geométricos	36

5.1. Articulação Modular

Neste programa é dada uma ênfase especial ao trabalho das Aplicações e Modelação Matemática, e o recurso à Tecnologia desempenha um papel fundamental. As conexões entre os diversos módulos são importantes para que os estudantes possam ver que os temas são aspectos complementares de uma mesma realidade. O professor deve aproveitar todas as ligações entre os módulos, possibilitando a ampliação e consolidação de cada conceito, sempre que ele é reencontrado.

Em cada módulo é importante encontrar-se um equilíbrio entre o desenvolvimento significativo dos conceitos, capacidades e aptidões e o domínio do cálculo. Neste programa está excluída a introdução de qualquer formalismo, a não ser que uma determinada notação se revele vantajosa para a comunicação de uma ideia matemática.

Em cada módulo, a duração de referência será discriminada por forma a indicar as horas de leccionação incluindo as que devem ser dedicadas ao acompanhamento/avaliação de actividades e as horas reservadas para avaliação sumativa final.

É indispensável que o professor tenha um conhecimento global do programa, bem como dos programas dos ciclos do ensino básico. Este programa desenvolve-se em módulos, a tratar pela ordem indicada ou a definir atendendo às precedências entre os conteúdos. Sempre que o projecto desenvolvido pela escola o aconselhar, a ordem poderá ser alterada, devendo tal decisão ficar devidamente registada e ser adequadamente planeada, desde que se respeitem as precedências apresentadas no seguinte quadro:

Número	Designação	Precedências						
A1	Geometria							
A2	Funções Polinomiais							
A3	Estatística							
A4	Funções Periódicas							
A5	Funções Racionais	A2						
A6	Taxa de Variação	A2	A5		ou	A2	B1	
A7	Probabilidade							
A8	Modelos Discretos							
A9	Funções de Crescimento	A2	A5		ou	A2	B1	
A10	Optimização	A2	A5	A6	ou	A2	B1	A6
B1	Funções Periódicas e Não Periódicas	A2						
B2	Estatística Computacional	A3						
B3	Modelos de Funções							
B4	Programação Linear							
B5	Jogos e Matemática	A3						
B6	Padrões Geométricos	A1						

5.2. Diversificação do Elenco Modular

O elenco e a sequência modular A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 e A10 são obrigatórios para os cursos em que a carga horária da disciplina é de 300 horas.

O elenco e a sequência modular A2, B1, A3, A7, A6, A9 e A10 são obrigatórios para os cursos em que a carga horária da disciplina é de 200 horas.

O elenco e a sequência modular para os cursos em que a carga horária da disciplina for de 100 horas, corresponderá a uma combinação de três módulos de entre os seguintes, a definir aquando do planeamento de cada curso, tendo em conta os critérios apresentados:

Módulo Fixo		Módulos Opcionais		Precedências	
A3	Estatística	A1	Geometria	A3	Estatística
		A7	Probabilidade		
		B2	Estatística Computacional	A3	Estatística
		B3	Modelos de Funções		
		B4	Programação Linear	A3	Estatística
		B5	Jogos e Matemática		
		B6	Padrões Geométricos	A1	Geometria

Assim, os chamados módulos opcionais destinam-se a escolhas que se considerem as mais adequadas à natureza e à planificação concreta de cada curso.

As cargas horárias dos módulos, sendo de referência, deverão ser ajustadas sempre que, nestas combinações, o seu somatório não totalize a carga horária global prevista para a disciplina no plano curricular do curso.

6. Bibliografia

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.

DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico — competências essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

Estas publicações do Departamento de Educação Básica constituem importantes fontes de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessárias para quem lecciona no ensino.

PONTE, J. P. (coord.), BOAVIDA, A. M., GRAÇA, M., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1997). *Didáctica: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES.

PONTE, JOÃO PEDRO (coord.), BRUNHEIRA, L., ABRANTES, P. E BASTOS, R. (1998). *Projectos Educativos: Ensino Secundário*. Lisboa: ME-DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contêm numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que são de consulta indispensável.

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática no Secundário: — <http://www.mat-no-sec.org> —

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário (Programa Ajustado), as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de actividades a desenvolver na sala de aula e de actividades interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis.

ABRANTES, P.; PONTE, J.P. et al.(1999) *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Grupo Matemática para todos -- investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática

ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J.P. et al.(1996) *Investigar para aprender matemática*. Grupo Matemática para todos – investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Estes livros reúnem um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto Matemática para Todos à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes, as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática. De acordo com os organizadores dos livros o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR*. Lisboa: APM.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (2002). *Funções no 3º ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Estas publicações contêm actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A primeira publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

PONTE, J.P.; CANAVARRO, A. P. (1997). *Matemática e Novas Tecnologias* (Universidade Aberta, Vol.28). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

PRECATADO, A.; GUIMARÃES, H. (org.), (2001) *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas muito variadas de actividades para a sala de aula, juntamente com um CD contendo os textos das actividades.

PROF. MIGUEL DE GUZMÁN OZÁMIZ: — <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/> —

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática, o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso “Laboratório de Matemática”, as actividades e os textos de divulgação matemática.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO:

Os *Primórdios da História da Matemática*: — http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_acciao/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes e podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

Parte II

Módulos

Índice:

	Página
Módulo A1 Geometria	14
Módulo A2 Funções Polinomiais	18
Módulo A3 Estatística	22
Módulo A4 Funções Periódicas	26
Módulo A5 Funções Racionais	30
Módulo A6 Taxa de Variação	34
Módulo A7 Probabilidade	38
Módulo A8 Modelos Discretos	42
Módulo A9 Funções de Crescimento	47
Módulo A10 Optimização	51
Módulo B1 Funções Periódicas e Não Periódicas	56
Módulo B2 Estatística Computacional	61
Módulo B3 Modelos de Funções	65
Módulo B4 Programação Linear	70
Módulo B5 Jogos e Matemática	75
Módulo B6 Padrões Geométricos	81

MÓDULO A1

Geometria

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática. Deve ainda desenvolver capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita. A leccionação deste módulo deve levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Geometria, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas realistas e na resolução de problemas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Geometria, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- construir modelos (maquetes e desenhos) úteis e adequados à resolução de problemas, com recurso a medições e escalas;
- mobilizar resultados matemáticos básicos necessários apropriados para simplificar o trabalho na resolução de problemas;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- identificar as vantagens do uso de um referencial;
- instalar um referencial numa figura (ou uma figura num referencial) de forma a obter “as melhores coordenadas”;
- reconhecer as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente aos eixos coordenados e, no espaço, relativamente aos planos coordenados;
- escrever a equação de uma recta representada graficamente e vice-versa.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço

Alguns tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:

- estudo de alguns padrões geométricos planos (frisos);
- estudo das pavimentações regulares;
- estudo de alguns problemas de empacotamento;
- composição e decomposição de figuras tridimensionais;
- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.

2. O método das coordenadas para estudar geometria no plano e no espaço

- Referenciais cartesianos ortonormados no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e \mathbb{R}^2 entre o espaço e \mathbb{R}^3 ;
- Equação reduzida da recta no plano e equação $x=x_0$.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos, fazendo surgir, a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução, uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados os nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros).

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos.

Mesmo quando há lugar a resolver um problema por via analítica o professor deve incentivar o esboço de figuras geométricas de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver capacidades de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Para além disso, deve apelar-se sempre à descrição, com algum detalhe, do processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica).

Ao estudante devem ser propostas actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter as melhores coordenadas experimentando com várias figuras no plano e no espaço. Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou o módulo, recorrendo aos modelos já utilizados. No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos

simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissectriz dos

Módulo A1: Geometria

quadrantes ímpares. No espaço, o estudante deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve ser aproveitado noutros módulos. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

Estão previstas seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso, que a seguir se enumeram.

Prova I — um teste escrito com a duração de noventa minutos.

Prova II — apresentação oral de um problema, escolhido pelo estudante, e preparado com a antecedência por este escolhida, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As quatro horas e meia previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

6 Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria - Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

Módulo A1: Geometria

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S.. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

APM. (2000). *Pasta de actividades - Pavimentações*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

GERDES, P. (2003). *Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchoukwe de Angola - os (lu)sona.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_acciao/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

MÓDULO A2

Funções Polinomiais

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

O conceito de função é uma ideia muito importante e unificadora em Matemática por ser uma representação de muitas situações reais. As calculadoras, os sensores de recolha de dados e os computadores, nomeadamente com as folhas de cálculo e os programas de gráficos, permitem que muito cedo o estudante possa fazer uma abordagem das funções sob os pontos de vista gráfico, numérico e algébrico.

A riqueza das situações que as representações gráficas de funções permitem descrever favorece e estimula o raciocínio e a comunicação matemática.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho natural para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade.

Os conhecimentos sobre funções que os estudantes trazem dos ciclos anteriores, vão ser ampliados com o estudo das funções quadráticas e cúbicas, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções Polinomiais, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções Polinomiais, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade do mundo do trabalho, da indústria, do comércio ou do mundo empresarial utilizando diversos tipos de funções;
- fazer o estudo de funções (domínio, extremos se existirem, zeros, intervalos de monotonia) descrevendo e interpretando no contexto da situação;
- reconhecer que o mesmo tipo de função pode ser um modelo de diferentes situações realistas;
- traduzir representações descritas por tabelas ou gráficos;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- usar cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- usar métodos gráficos para resolver condições cuja resolução com métodos algébricos não esteja ao alcance dos estudantes;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Resolução de problemas envolvendo funções

Esta resolução de problemas abrange progressivamente os seguintes temas:

- função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica;
- estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:
 - funções quadráticas;
 - funções cúbicas.

As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos yy e à origem, limites nos ramos infinitos.

Este estudo deve incluir:

- a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);
- transformações simples de funções: considerado o gráfico da função $y=f(x)$, esboçar o gráfico das funções definidas por $y=f(x)+a$, $y=f(x+a)$, $y=af(x)$, $y=f(ax)$, com a número real positivo ou negativo, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Para as actividades de modelação matemática, deve recorrer-se obrigatoriamente a três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Neste módulo, uma ênfase especial é dada ao trabalho em grupo com Aplicações e Modelação Matemática, e em que o recurso às tecnologias desempenha um papel fundamental. As capacidades numéricas e gráficas das calculadoras devem ser utilizadas e explicitadas na resolução de problemas, em especial nos que envolvem inequações ou outras condições, cuja resolução não está ao alcance dos estudantes, com métodos algébricos.

É necessário proporcionar ao estudante oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios ou monografias devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou no computador.

O estudo das famílias de funções é propício à realização de pequenas investigações.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 | Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeo

Polinómios — http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_acciao/videos/ —

Este vídeo, de excelente qualidade, presta-se a diversos tipos de explorações na sala de aula. É acompanhado de um texto de apoio com sugestões de actividades.

MÓDULO A3

Estatística

Duração de Referência: **27 horas**

1 | Apresentação

Algumas noções que se tratam neste módulo já foram abordadas em anos anteriores e, por isso, é possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente.

O estudante deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da estatística contribua para melhorar a capacidade dos estudantes em avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação dos dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este módulo fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os estudantes incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os estudantes devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo a análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem.

No estudo deste módulo o estudante deve recorrer à calculadora gráfica e ao computador e às suas potencialidades para resolver muitos dos problemas.

Propõe-se que este módulo seja trabalhado num ambiente de realização de projectos, natural para a aprendizagem contextualizada e significativa.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Estatística, a competência matemática que todos devem desenvolver incluiu os aspectos seguintes:

- a tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos;
- a predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz de situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões;
- o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Estatística, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- definir o problema a estudar;
- realizar recolhas de dados;
- organizar e tratar os dados através do cálculo das medidas estatísticas (de centralidade e dispersão), sua interpretação e representação gráfica;
- seleccionar as formas de representação gráfica mais adequadas à estatística a trabalhar e interpretá-las criticamente;
- desenvolver o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada,
- comunicar raciocínios e/ou argumentos matemáticos quer na forma oral e/ou escrita.
- realizar um trabalho de projecto, partindo de uma situação problemática da vida real relacionada com percursos profissionais, com necessidades industriais ou comerciais (controle de qualidade da cadeia de produção), com rentabilização de recursos (negociado com os estudantes), garante a concretização dos objectivos que se pretendem. Por isso, recomenda-se que se desenvolva a aprendizagem usando metodologias de trabalho de projecto.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Estatística — Generalidades

- Objecto da estatística. Utilidade na vida moderna.
- Recenseamento e sondagem; população e amostra; critérios de selecção de amostra de uma determinada população.
- Estatística descritiva e indutiva.

2. Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)

- Tipos de caracteres estatísticos: qualitativo e quantitativo (discreto e contínuo).
- Formas de representação: gráficos circulares, diagramas de barras/histogramas, pictogramas, função cumulativa, diagrama de extremos e quartis, tabelas de frequências absolutas e relativas, polígono de frequências.
- Medidas de localização central: moda/classe modal, média, mediana e quartis.
- Medidas de dispersão: amplitude, variância, desvio padrão, amplitude inter-quartis.

3. Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)

- Diagrama de dispersão; dependência estatística e correlação positiva e negativa.
- Coeficiente de correlação e sua variação no intervalo.
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Recta de regressão: sua interpretação e limitações.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Neste módulo, chama-se a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento e a sua utilidade na vida moderna. É importante clarificar quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico e exemplificar com fenómenos da vida real, realçando o papel da Estatística na sua descrição.

A compreensão do conceito de amostragem e o reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas permite a distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Abordam-se, ainda que intuitivamente, os critérios de escolha de uma dada amostra: a aleatoriedade, a representatividade e o ser livre de vícios de concepção.

A Estatística é uma ciência que trata dos “dados”. Em alguma altura do trabalho deste módulo, os estudantes precisam de ficar a compreender que num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases:

- uma fase de organização dos dados recolhidos em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida - Estatística Descritiva, e
- uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados - Inferência Estatística.

Uma fase importante para o trabalho escolar-profissional é a aquisição dos próprios “dados”, que deve ser significativo até ao ponto de realçar que, no início de qualquer estudo estatístico, é imperioso proceder ao planeamento da experiência.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, de igual peso, com duas horas para a realização da primeira prova e quatro horas para a realização da segunda prova, a seguir enumeradas:

Prova I: apresentação oral ou por escrito de um exemplo de uma situação problemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos de uma dada situação;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova II: defesa oral do trabalho de projecto realizado neste módulo, escolhido pelo estudante, e supervisionado pelo professor, a partir do qual realizou a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 | Bibliografia / Outros Recursos

MARTINS, M. E. G. (coord.), MONTEIRO, C., VIANA, J., TURKMAN, M.(1997). *Estatística: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME-DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que é de consulta indispensável

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Estatística e Calculadoras Gráficas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém actividades sobre estatística, redigidas tendo em vista uma possível utilização na sala de aula; contém ainda comentários sobre as actividades e propostas de resolução das mesmas.

MOORE, DAVID (2000). *Statistics, The Science of data. For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World, Part II*, 5th ed. New York: Freeman.

MOORE, DAVID (2000). *The Basic of Statistics*. New York: Freeman.

MOORE, DAVID (2000). *Introduction to the Practice of Statistics*. New York: Freeman.

Livros recomendados pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA E ESCOLA SECUNDÁRIA TOMAZ PELAYO

Projecto ALEA — <http://alea-estp.ine.pt/> —

Esta página contém documentos destinados a apoiar o ensino da Estatística a nível do ensino secundário. Além de uma série de páginas com esclarecimentos sobre temas científicos, tem páginas com temas da actualidade relacionados com a Estatística, jogos didácticos, um fórum de discussão e uma Galeria Virtual com trabalhos de escolas.

MÓDULO A4

Funções Periódicas

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria. Pretende-se agora que recordem esses conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo, enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e aprendam o conceito de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas. As perguntas colocadas sobre cada situação devem considerar ou levar à necessidade da resolução de algumas condições com expressões trigonométricas.

O professor pode apresentar actividades matemáticas em que os estudantes aprofundem as noções ligadas a funções trigonométricas e a técnicas de resolução de condições que não devem passar para listas exaustivas de fórmulas, antes devem ficar pela compreensão sempre ligada à interpretação sobre o círculo trigonométrico.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções Periódicas, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções periódicas;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções Periódicas, os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas para serem utilizados como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam compreensão e intervenção sobre fenómenos periódicos e seu desenvolvimento;
- construir modelos (e maquetes) apropriadas, úteis à resolução dos problemas e à generalização das noções de ângulo e arco, bem como de conceitos como o de radiano, por exemplo, e as definições de seno, co-seno e tangente de um número real;
- identificar as vantagens do uso de referenciais, estabelecendo as conexões entre os cartesianos e polares no plano;
- resolver problemas dentro de situações que exijam a resolução de equações trigonométricas simples, a compreensão das características das funções circulares (simetria, paridade e periodicidade), bem como do comportamento das funções trigonométricas como funções reais de variável real (monotonia, extremos, concavidade e assíptotas);
- resolver problemas em que seja necessário analisar a rapidez de crescimento ou decrescimento da variável dependente em fenómenos variados, construindo e discutindo modelos de diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre as funções polinomiais e as funções trigonométricas;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Movimentos Periódicos. Funções Trigonométricas.
 - Motivação: exemplos de movimentos periódicos.
 - Generalização das noções de ângulo e arco; radiano.
 - Seno, co-seno e tangente de um número real.
 - Resolução de equações trigonométricas muito simples.
 - Utilização das relações entre seno, co-seno e tangente.
 - Funções trigonométricas – domínios, contradomínios, etc.
 - Gráficos das funções seno, co-seno e tangente.
 - Simetria e paridade.
 - Periodicidade.
2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

O professor precisa de propor problemas de diversos tipos para relembrar a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas de ângulos agudos. São exemplos possíveis o cálculo de distâncias directamente inacessíveis. A generalização das noções deve ser intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares. São exemplos possíveis a "roda gigante" das feiras, a roda da bicicleta, motores, etc. É absolutamente imprescindível a insistência no círculo trigonométrico.

As funções trigonométricas podem e devem aparecer como modelos matemáticos que descrevem situações mais ou menos complexas. As situações apresentadas podem considerar a recolha e tratamento de dados. As primeiras respostas a eventuais perguntas podem ser encontradas de forma ingénua e com recurso à tecnologia e representações informais. O modelo que uma função trigonométrica pode representar deve aparecer como forma mais potente e geral para encontrar respostas para a situação em presença e para outras situações do mesmo tipo. Exemplos de situações: movimento pendular, movimento do braço na marcha, movimento das marés, roda da bicicleta ou outras situações com movimentos circulares, moldes de peças, etc. Antes da modelação, deve introduzir-se uma actividade que permita passar do círculo trigonométrico para o conjunto dos pontos $(x, \text{sen}x)$ no plano cartesiano.

O estudo das funções trigonométricas deve incluir a análise de algumas situações de modelação matemática, recorrendo necessariamente a três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1998). *Geometria: Matemática — 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (2000). *Trigonometria e Números Complexos: Matemática — 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1998 e 2000), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VÍTOR TEODORO ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

CARREIRA, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Este estudo tem por fundamento a problemática da introdução de aplicações e modelação no ensino da matemática, encarando a utilização do computador como uma ferramenta de trabalho na realização de actividades de construção e exploração de modelos matemáticos.

PEREIRA, C. ET AL. (1992). *A trigonometria está viva - uma aplicação da matemática à indústria de moldes*. Lisboa: APM.

Este estudo tem por fundamento a problemática da introdução de aplicações e modelação no ensino da matemática, encarando a utilização do computador como uma ferramenta de trabalho na realização de actividades de construção e exploração de modelos matemáticos.

IME-USP-SP, "E-Cálculo" - Funções Trigonométricas:

<http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/funcoes/trigonometricas/ftigonometricas.htm>

Esta página da Universidade de São Paulo contém as definições básicas das funções trigonométricas, exemplos, aplicações e "apliquetas" interactivas.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. Senos e Cosenos I; 2. Senos e Cosenos II; 3. Senos e Cosenos III

http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Trigonometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

MÓDULO A5

Funções Racionais

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

Neste módulo, os estudantes alargam às funções racionais as classes de funções que já conhecem, e, recorrendo essencialmente a trabalho com a calculadora gráfica e o computador, tomam contacto com algumas das suas propriedades de modo a ficarem capazes de escolher, para cada situação concreta, o modelo funcional mais adequado.

A tecnologia propicia boas abordagens para resolver problemas e influencia o tipo de questões a investigar. Os estudantes usam calculadoras gráficas para apoiar as resoluções e as suas investigações mas poderão, sempre que possível, recorrer também aos computadores, utilizar folhas de cálculo, programas de gráficos ou de geometria dinâmica. O recurso à tecnologia torna possível a investigação e a conjectura sobre um maior número de exemplos.

Em módulos anteriores, os estudantes tiveram contacto com problemas que destacaram o papel dos conceitos de variável e de função assim como algumas propriedades das funções polinomiais. É necessário que partam para a resolução de novas situações tendo como ponto de partida as experiências e conhecimentos anteriores.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções Racionais, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções racionais;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções Racionais, os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade do mundo do trabalho, da indústria, do comércio ou do mundo empresarial utilizando diversos tipos de funções;
- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas e os utilize como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam compreensão de proporcionalidade inversa, fracções, etc.;
- estabelecer relações utilizando simultaneamente o estudo gráfico, numérico e analítico integrando operações com polinómios;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- estudar o comportamento das funções racionais para valores "muito grandes" da variável e para valores "muito próximos" dos zeros dos denominadores das fracções que as definem;
- construir e interprete modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre as funções polinomiais e as funções racionais;
- usar métodos gráficos para resolver condições, melhorando a compreensão de eventuais métodos algébricos utilizados ou quando não os puder utilizar;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Funções Racionais

- Motivação: estudo de relações numéricas concretas entre variáveis inversamente proporcionais.
- Função racional.
- Características e comportamentos de algumas funções racionais:
 - $y = 1/(ax)$
 - $y = 1/(ax^2)$
 - $y = 1/[a(x-h)^2]$
- Assíntotas.
- Resolução de equações e inequações com fracções no contexto de resolução de problemas.

2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

É importante que os estudantes saibam como executar procedimentos matemáticos mas importa essencialmente saber quando aplicá-los, conhecer as razões da sua eficácia e adquirir o hábito de validar as suas respostas. É importante que apreciem a natureza e a importância das ferramentas matemáticas para responderem eficazmente a necessidades específicas de um dado problema. Pretende-se que o conhecimento do procedimento matemático esteja sempre ligado ao conhecimento do conceito; daí se deseja que o professor implique os estudantes na

resolução de problemas ou actividades que envolvam as relações entre procedimentos e conceitos sempre numa perspectiva de explicitar conexões entre os conteúdos. Este é um tema privilegiado para desenvolver hábitos de comunicação correcta em Matemática com o objectivo de ampliar a compreensão dos conteúdos, das conexões e da utilidade dos procedimentos matemáticos.

As situações precisam de ser tão ricas que, para além da mobilização do conceito de função, exijam esclarecimento de noções de domínio (em especial no que respeita à análise crítica dos resultados) e à resolução de equações ou inequações. A apresentação de actividades puramente matemáticas pode ser considerada para organizar e aumentar a compreensão dos conceitos e noções, mas também para iniciar as técnicas de cálculo e resolução algébrica que devem ficar apropriadas a um nível de possível transferência para novas situações.

A partir de uma actividade de experimentação (como, por exemplo, "A resistência do esparguete" – ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", p 129), os estudantes podem compreender relações numéricas entre variáveis inversamente proporcionais e encontrar um modelo simples de uma função racional. Deverão proceder, depois, recorrendo às calculadoras gráficas ou ao computador, a investigações (ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", pp 80, 82 e 83) que os vão conduzir a conjecturar sobre as características e comportamentos de algumas funções racionais, em particular a existência de assíntotas ou o comportamento assintótico.

A resolução de problemas como "O volume constante" (p 90), "As peças cilíndricas", "Compostos ácidos" (p 91), da brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", ou equivalentes, permitirá que os estudantes resolvam condições e compreendam como se usa a álgebra na resolução de problemas reais, mas está fora do âmbito deste programa a insistência nos aspectos algébricos das diferentes classes de funções.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1998), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

NCTM/ADELINA PRECATADO E MARIA DA PAZ - Os corvos e a Matemática: utilização das funções racionais para investigar o comportamento dos corvos.

<http://www.apm.pt/recursos/secundario/corvos/>

Esta página contém a tradução de uma actividade de modelação matemática proposta na excelente página "Illuminations" do NVTM, <http://illuminations.nctm.org/>, que envolve as funções racionais.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

MÓDULO A6

Taxa de Variação

Duração de Referência: 27 horas

1 | Apresentação

Neste módulo, os estudantes vão utilizar de um outro modo as funções lineares e afins, bem como as polinomiais que já conhecem. De facto, com vista a dar resposta a algumas situações que exigem estudo dos comportamentos em intervalos (mais ou menos amplos) de modelos funcionais, os estudantes encontrarão nas taxas de variação sugestões dessas funções. A calculadora gráfica pode fornecer indicações seguras de variação e taxas de variação usando gráficos e cálculos numéricos. E, deste modo, os estudantes podem não só abordar problemas que se refiram a modelos polinomiais ou racionais, mas também funções trigonométricas.

A tecnologia propicia boas abordagens para resolver problemas e influencia o tipo de questões a investigar. Os estudantes usam calculadoras gráficas para apoiar as resoluções e as suas investigações mas poderão, sempre que possível, recorrer também aos computadores, utilizar folhas de cálculo, programas de gráficos ou de geometria dinâmica. O recurso à tecnologia torna possível a investigação e a conjectura sobre um maior número de exemplos.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Taxa de Variação, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções polinomiais, racionais e trigonométricas;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Taxa de Variação, os objectivos de aprendizagem, que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas que utilize como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam variações;
- interpretar física e geometricamente os conceitos de taxa média de variação e (a um nível ainda que intuitivo) de taxa de variação num ponto;
- utilizar simultaneamente os estudos gráfico, numérico e analítico de funções, para conjecturar e provar resultados;
- analisar efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e nas respectivas taxas de variação;
- estudar o comportamento das funções estudadas na sua relação com valores e sinais das taxas de variação em pontos do domínio;
- construir e interpretar modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre os diversos tipos de funções, utilizando cálculos das taxas de variação com recurso à calculadora gráfica ou ao computador.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Taxa de variação
 - Taxa de variação média: noção e cálculo.
 - Interpretação geométrica e física das taxas de variação (média e num ponto).
 - Taxas de variação com funções polinomiais, racionais e trigonométricas simples.
 - Relações entre valores e sinais das taxas de variação e comportamentos dos gráficos das funções (monotonia, ...).
2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Os estudantes deverão chegar a compreender e explicar a razão para uma função linear ser um bom modelo de estudo das variações da distância em função do tempo no movimento de um objecto que se move em linha recta com velocidade constante e deverão saber explicar o significado dos diversos parâmetros nos modelos desse tipo. Do mesmo modo, para um móvel que não se desloque a velocidade constante mas com aceleração constante (tal como a queda de um objecto sob influência da gravidade e ignorando a resistência do ar) o estudante deve encontrar, como modelo matemático apropriado, a função quadrática. Os estudantes devem compreender o significado de uma velocidade negativa. O sensor de movimento permite boas experimentações para estas situações.

Também problemas como "*A bola no plano inclinado*", "*O custo marginal*" e "*Lançamento de um projectil*" (ver Brochura *Funções: Matemática – 11º ano de escolaridade* (pp 100, 112 e 113)) permitirão que os estudantes se aproximem dos conceitos de taxa média de variação e de taxa de variação, bem como das respectivas interpretações geométricas. Os estudantes devem compreender o conceito de velocidade média num dado intervalo de tempo e aproximar-se intuitivamente do conceito de velocidade instantânea, e devem ser capazes de relacionar esses

conceitos com os respectivos significados geométricos. A utilização da calculadora e do computador (recorrendo a *software* adequado) serão excelentes auxiliares para a aquisição destas noções. O recurso a sensores permitirá experiências interessantes.

Para efeitos da abordagem da taxa de variação em funções trigonométricas, as actividades “O cabo mais curto”, “Cone de luz”, “Volume de um cone”, “Roda gigante” das pp 100 a 103 da brochura de “*Geometria: Matemática 11º ano de escolaridade*” podem ser utilizadas com ligeiras adaptações. Todas estas actividades não mobilizam mais que operações com recurso à calculadora gráfica.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1999). *Funções: Matemática 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contêm numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que são de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

IME-USP-SP, "E-Cálculo" - Derivadas:

http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/body_der.htm

Esta página da Universidade de São Paulo contém discussões e exemplos das noções de taxa de variação média e de taxa de variação (instantânea ou pontual) e respectiva interpretação geométrica (incluindo uma "apliqueta" interactiva).

WANER, STEFAN AND COSTENOBLE, STEVEN R. "Applied Calculus" - Average Rate of Change:

http://people.hofstra.edu/faculty/Stefan_Waner/RealWorld/tutorials/frames2_1.html

Uma actividade interactiva muito simples de introdução ao estudo da taxa média de variação (em inglês).

MÓDULO A7

Probabilidade

Duração de Referência: **21 horas**

1 | Apresentação

A modelação de fenómenos que, não sendo passíveis de ser descritos por leis determinísticas, encontram nos modelos de probabilidade uma boa alternativa à sua descrição, é a principal motivação para a organização dos conteúdos programáticos deste módulo.

Recorrendo ao argumento de simetria facilmente se introduzem modelos muito simples que irão permitir uma primeira abordagem à noção de acontecimento e a apresentação da Regra de Laplace. Seguidamente passar-se-á à apresentação formal de *modelo de probabilidade* no caso muito particular em que o espaço de resultados é finito e contido no conjunto dos números reais. Definindo *acontecimento*, neste caso particular, como sendo qualquer dos subconjuntos do espaço de resultados torna-se possível ilustrar, através de exemplos, algumas das propriedades da probabilidade (probabilidade da união, do complementar e da diferença).

Também importante é a noção de *probabilidade condicional*. Esta é, em geral, intuitiva quando aplicada no cálculo de probabilidades de cadeias de acontecimentos (ao retirar bolas de uma urna sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extracções anteriores).

Dada a sua relevância, inclui-se também neste módulo de Probabilidade, um breve estudo do modelo Normal. Muitas variáveis ligadas a fenómenos naturais (altura de um indivíduo, perímetro do tronco de uma árvore, peso de um certo tipo de fruto, etc.) podem ser encaradas como resultantes do contributo (de forma aditiva) de muitas grandezas aleatórias e, como tal, o Teorema do Limite Central justifica a utilização do modelo Normal na sua modelação.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Probabilidade, a competência que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- compreensão da diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório;
- construção de modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio;
- apreensão das propriedades básicas de uma função massa de probabilidade;
- compreensão da noção de probabilidade condicional;
- conhecimento das propriedades da probabilidade e sua utilização no cálculo da probabilidade de acontecimentos;
- conhecimento do modelo Normal ou Gaussiano e suas propriedades.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Probabilidade, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- saber calcular a probabilidade de alguns acontecimentos a partir de modelos propostos;
- identificar acontecimentos em espaços finitos;
- mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias;
- ilustrar a forma de cálculo de probabilidades de acontecimentos utilizando uma árvore de probabilidades;
- calcular probabilidades com base na família de modelos Normal recorrendo ao uso de uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard* ou, em alternativa, utilizando a calculadora.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Fenómenos aleatórios.
2. Argumento de Simetria e Regra de Laplace.
3. Modelos de probabilidade em espaços finitos. Variáveis quantitativas. Função massa de probabilidade ou distribuição de probabilidade.
4. Probabilidade condicional. Árvore de probabilidades. Acontecimentos independentes.
5. Modelo Normal.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

O programa deste módulo inicia-se com a distinção entre fenómeno aleatório e não aleatório. A sensibilização dos estudantes para este tema deverá ser desenvolvida através de exemplos de fenómenos físicos com leis determinísticas (como a queda de um grave, movimento de um pêndulo,...) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios devido à grande complexidade das leis físicas subjacentes (movimento de um dado ao ser lançado, movimento das partículas numa nuvem de pó, temperatura máxima observada numa data futura,...). Os modelos de probabilidade surgirão assim como uma boa solução para a modelação de fenómenos aleatórios.

Os modelos de probabilidade mais simples são os que descrevem os chamados “jogos de azar”. Aqui é quase sempre possível encontrar um espaço de resultados para cujos elementos, à partida, não se tem razão para admitir que não tenham igual probabilidade de ocorrer. Ao construir estes modelos pretende-se, não só, que os estudantes sejam capazes de entender o argumento de simetria que está subjacente à atribuição de probabilidades, como que tenham uma primeira abordagem à noção de acontecimento. É também este o bom momento para a apresentação da Regra de Laplace como regra de cálculo de probabilidades em espaços finitos e equiprováveis (note-se que não se justifica, neste módulo, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório). Numa fase seguinte, recorrendo à Regra do Produto, os estudantes deverão ser também capazes de modelar experiências aleatórias um pouco mais complexas, que envolvam o encadeamento de experiências elementares.

Este tópico deve ser finalizado com a apresentação e discussão com os estudantes de alguns exemplos de fenómenos aleatórios para os quais não faça sentido utilizar argumentos de simetria.

Segue-se a apresentação formal de *modelo de probabilidade*, no caso muito particular em que o espaço de resultados é finito e contido no conjunto dos números reais. A *função massa de probabilidade ou distribuição de probabilidade* é aqui o elemento básico de trabalho e o estudante deverá compreender a sua utilidade e conhecer bem as suas propriedades. Definindo *acontecimento*, neste caso particular, como sendo qualquer dos subconjuntos do espaço de resultados, o professor deverá aproveitar a oportunidade para ilustrar, através de exemplos, algumas das propriedades da probabilidade (probabilidade da união, do complementar e da diferença).

No tópico de *probabilidade condicional*, sugere-se que esta noção comece por ser dada de forma intuitiva, recorrendo a exemplos com cadeias de acontecimentos, onde o resultado obtido numa certa fase afecte de forma conhecida a probabilidade de ocorrência de acontecimentos decorrentes da fase seguinte (ao retirar bolas de uma urna sucessivamente, sem reposição, a composição da urna altera-se e a probabilidade de se retirar certo tipo de bola depende dos tipos que saíram nas extracções anteriores). Deve-se pedir aos estudantes que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos aproveitando para lhes propor *esquemas em árvore* como forma de organização da informação disponível. A partir de informação registada numa tabela de contingência os estudantes deverão ser capazes de calcular correctamente probabilidades condicionais. A definição de probabilidade condicional poderá então ser apresentada começando por representar a informação da tabela num *diagrama de Venn*.

No último tópico deste módulo, “Modelo Normal”, pretende-se que o estudante tome conhecimento de um dos modelos mais importantes, tanto para a modelação de fenómenos aleatórios como para estudos estatísticos de natureza inferencial. Este é um modelo cujo suporte é todo o conjunto dos números reais e deverá ser introduzido recorrendo a um enunciado simplificado do Teorema do Limite Central. Deverão ser referidas as principais características de um modelo Normal ou Gaussiano e o estudante deverá saber calcular probabilidades com base nesta família de modelos, utilizando, quer uma tabela da função de distribuição de uma *Normal Standard* quer a máquina de calcular.

Estão previstas neste módulo quatro horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas; as provas são:

Prova I — apresentação oral ou por escrito de um exemplo de uma situação de problemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova.

Prova II — apresentação oral de um trabalho realizado neste módulo, escolhido pelo estudante, e supervisionado pelo professor. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

GRAÇA MARTINS, M. E. (1998) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

GRAÇA MARTINS, M. E. , CERVEIRA, A. (1998) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

MENDENHALL, W. BEAVER, R. (1994) – *Introduction to Probability and Statistics*. Duxbury Press.

MOORE, D. (1997) – *Statistics – Concepts and Controversies*. Freeman.

MOORE, D. (1995) – *The Basic Practice of Statistics*, Freeman.

MOORE, D., McCABE, G. (1993) – *Introduction to The Basic Practice of Statistics*, Freeman.

PARZEN, E. (1969) – *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York. Wiley.

THIESSEN, H. (1997) – *Measuring the Real World*. John Wiley & Sons.

Páginas na Internet

PROJECTO ALEA – <http://alea-estp.ine.pt>

Desta página recomenda-se, em especial, o tópico “noções de probabilidade” a que se acede directamente a partir da página inicial.

Recursos na Internet

TEXTO DE APOIO AO TÓPICO “MODELOS DE PROBABILIDADE” DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA PARA AS CIÊNCIAS SOCIAIS (elaborado por Luísa Canto e Castro e Maria Eugénia Graça Martins).

Este texto encontra-se em disponível em <http://www.dgisd.min-edu.pt/mat-no-sec/>

MÓDULO A8

Modelos Discretos

Duração de Referência: **27 horas**

1 | Apresentação

Pretende-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de modelar e resolver situações envolvendo sequências numéricas.

Modelos de crescimento linear ou não linear podem resultar da abordagem de situações realistas.

A folha de cálculo pode ser utilizada como meio de organizar os dados e realizar os cálculos necessários para resolver problemas apresentados, mas também como meio eficaz de estudar os efeitos da alteração de dados iniciais numa sequência de cálculos. O trabalho com a folha de cálculo na procura de soluções e na descoberta dos efeitos desta ou daquela mudança é por si só uma aprendizagem importante para os estudantes dos cursos profissionais. Os estudantes podem também aprender a gerar termos de uma sequência na modelação ou estudo de situações reais. É aconselhável a visualização dos gráficos correspondentes às situações criadas e geridas a partir de listas de dados na folha de cálculo.

Algumas das situações previstas para utilizar a folha de cálculo podem também ser abordadas usando a calculadora gráfica.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Modelos Discretos, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos discretos;
- a predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;
- a predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Modelos Discretos, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados;
- usar uma folha de cálculo para trabalhar numérica e graficamente com sucessões.
- reconhecer e dê exemplos de situações em que os modelos de progressões aritméticas ou geométricas sejam adequados;
- distinguir crescimento linear de crescimento exponencial;
- investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente;
- resolver problemas simples usando propriedades de progressões aritméticas e de progressões geométricas.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Sucessões

- Motivação: estudo de relações numéricas concretas
- A sucessão real como função de variável natural:
 - Sucessão;
 - Modos de definir uma sucessão;
 - Representação gráfica de uma sucessão;
 - Sucessões monótonas;
 - Sucessões limitadas.
- Progressões aritméticas
 - Expressão de u_n em função de n ;
 - Soma de n termos consecutivos.
- Progressões geométricas
 - Expressão de u_n em função de n ;
 - Soma de n termos consecutivos.
- Comparação entre o crescimento linear e o crescimento exponencial (ou geométrico)
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática:
 - Situações problemáticas em que a sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{nb}$ seja um bom modelo;
 - Primeira definição do número e .

2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo discreto mais adequado à descrição da situação.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Successões

As sucessões aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria - por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências, da economia, etc.

Progressões

As situações apresentadas neste tema podem ser de crescimento linear e introduzir as progressões aritméticas e podem ser de crescimento exponencial e servir de motivo para a abordagem das progressões geométricas. Podem ainda ser apresentadas situações para outros tipos de crescimento.

Os estudantes encontrarão o poder das exponenciais explorando problemas clássicos tais como “os grãos de milho no tabuleiro de xadrez”, “evolução de um capital sofrendo juros simples ou acumulados”, “crescimento de uma população”,.... Outros problemas do tipo de “a geração de coelhos de Fibonacci”, “sequências de números (números triangulares, quadrangulares, ...)” ou equivalentes vão permitir encontrar o conceito de sucessão e as diferentes formas de as definir (incluindo o método recursivo), bem como interessantes representações gráficas.

Os estudantes perante experiências de modelação de crescimentos devem compreender e estabelecer as diferenças entre as relações aditivas $a_{n+1} = a_n + r$ e as multiplicativas $a_{n+1} = a_n * r$ e a sua correspondência com as expressões $y = ax + b$ e $y = ab^x$.

O estudante pode ser solicitado a estudar, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões.

Os estudantes podem ainda estudar sequências de somas parciais e descobrir que encontram uma função quadrática como fórmula da soma de n termos de uma progressão aritmética e uma função exponencial (abordada de forma totalmente intuitiva) na progressão geométrica.

Os estudantes poderão fazer investigações sobre outras características destas sucessões e mesmo chegar a caracterizar e a usar representações tabelares das primeiras diferenças, segundas diferenças e razões de termos sucessivos relacionando-os com os modelos linear, quadrático e exponencial. Poderão usar estas características para escolher modelos apropriados a situações contextualizadas.

Estão previstas neste módulo quatro horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova II — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1998), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

Os primórdios da História de Matemática — http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_acciao/videos/ —

Este vídeo foca algumas noções básicas da Matemática, salientando as contribuições mais marcantes que, ao longo de muitos séculos, levaram ao aparecimento do Cálculo. Além de uma descrição narrativa, utiliza a animação por computador para tratar alguns dos temas, constituindo um instrumento utilíssimo para a didáctica da Matemática.

ALMADA, SÍLVIA – LivroWeb de Análise Matemática

Sucessões — <http://www.mat.uc.pt/~me0203/LivroWebAM/sucessoes.html> —

Esta página contém uma compilação de páginas da Internet úteis para uma introdução ao estudo das sucessões, com particular atenção às noções de sucessão convergente, divergente, limitada e monótona.

KNOTT, RON – Fibonacci Numbers and Nature

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>

Uma página completíssima sobre as principais aplicações dos números de Fibonacci (coelhos, abelhas, espirais, flores, etc.). Inclui também sugestões de investigações.

BIGODE, ANTONIO JOSÉ LOPES – Números figurados

http://www.matematicahoje.com.br/telas/Autor/artigos/artigos_publicados.asp?aux=NFigurados

Uma proposta de exploração educativa dos números figurados.

ESCOLA SECUNDÁRIA DE DONA LUÍSA DE GUSMÃO, LISBOA - Sucessões: Curva de Van Koch, Tapete de Sierpinski, Supercubo

http://www.esec-luisa-gusmao.rcts.pt/departamentos/departamento_matematica/fractais.htm

Esta página contém algumas actividades interessantes para usar na sala de aula (acompanhadas de exemplos de resolução).

CAPELA XADREZ CLUBE – As origens do xadrez

<http://www.clubedexadrez.com.br/portal/capelaxadrezclube/origens.htm>

Uma página onde se conta a lenda do Rajá que riu da modéstia de um brâmane e recebeu uma valente lição.

MÓDULO A9

Funções de Crescimento

Duração de Referência: 27 horas

1 | Apresentação

Preende-se que os estudantes desenvolvam a capacidade de modelar e resolver situações envolvendo modelos contínuos não lineares: a exponencial, a logarítmica e a logística. Modelos de crescimento não linear podem resultar da abordagem de situações realistas.

Em muitos problemas as variáveis tomam valores que pertencem a modelos não lineares. De entre os modelos não lineares, são importantes e interessantes as exponenciais da forma $y = a(b^x)$.

Tarefas como “Eliminação” (brochura F12, pág 98) ou experimentais do tipo de “o arrefecimento de água numa chávena” com sensores de temperatura e uma calculadora gráfica ou um computador, permitem não só aos estudantes ajustar funções que não são de quaisquer dos tipos anteriormente estudados, mas também sugerir-lhes prolongamentos do estudo que possam ter feito das progressões geométricas.

Os modelos exponenciais podem ser introduzidos para resolver problemas de evolução de populações, poluição, temperaturas, drogas no sangue, materiais radioactivos, etc., alguns deles já abordados a um certo nível quando da abordagem das progressões geométricas.

A folha de cálculo pode ser utilizada como meio de organizar os dados e realizar os cálculos necessários para resolver problemas apresentados, mas também como meio eficaz de estudar os efeitos da alteração de dados iniciais numa sequência de cálculos. O trabalho com a folha de cálculo na procura de soluções e na descoberta dos efeitos desta ou daquela mudança é por si só uma aprendizagem importante para os estudantes dos cursos profissionais. Os estudantes podem também aprender a gerar termos de uma sequência na modelação ou estudo de situações reais. É aconselhável a visualização dos gráficos correspondentes às situações criadas e geridas a partir de listas de dados na folha de cálculo.

Algumas das situações previstas para utilizar a folha de cálculo podem também ser abordadas usando a calculadora gráfica.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções de Crescimento, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando modelos de crescimento não linear;
- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;

- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como para realizar procedimentos algébricos;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem situações de crescimento não linear;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções de Crescimento, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos exponenciais sejam bons modelos quer para o observado quer para o esperado;
- usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e prediga a forma do seu gráfico;
- descrever as regularidades e diferenças entre padrões lineares, quadráticos, exponenciais, logarítmicos e logísticos;
- obter formas equivalentes de expressões exponenciais;
- definir o número e (segunda definição) e logaritmo natural;
- resolver equações simples usando exponenciais e logaritmos (no contexto da resolução de problemas);
- resolver, pelo método gráfico, inequações simples usando as funções exponenciais, logarítmicas e logísticas (no contexto da resolução de problemas);
- resolver problemas simples e de aplicação usando diferentes modelos de funções de crescimento.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Funções de Crescimento

- Motivação: estudo de situações reais de outras áreas científicas.
- Função exponencial de base superior a um.
 - Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por $f : x \mapsto a^x, a > 1$;
 - Regras operatórias das funções exponenciais;
 - Crescimento exponencial.
- Função logarítmica de base $a(a > 1)$. Logaritmo de um número.
 - Logaritmo de um número;
 - Função logarítmica;
 - Regras operatórias de logaritmos;
 - Comparação de crescimento de funções.

- Função logística.
 - Propriedades da função logística $f : x \mapsto \frac{a}{b + ce^{kx}}, k < 0$;
 - Comparação de crescimento de funções.
 - Resolução de equações e inequações no contexto de resolução de problemas.
- 2. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

As funções de crescimento aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das funções pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução e o trabalho das funções de crescimento e das suas propriedades podem ser feitos propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da Biologia - por exemplo, crescimento de uma dada população, da Química – a desintegração radioactiva, da propagação de ruídos (boatos), de manchas de poluição, do desenvolvimento florestal, etc.

Os estudantes podem reconhecer o logaritmo como solução de equações exponenciais e a função logarítmica como inversa da exponencial.

Problemas como “*A construção da barragem*” (Brochura Funções 12, pág.133) permitirão que o estudante reencontre o conceito de limite ou de assíntota.

Tarefas como “*Sismos na Internet*” (Brochura Funções 12, pág.137) permitirão que o estudante reconheça propriedades dos logaritmos e estude, aplicada a esta função, a taxa de variação num ponto.

As tarefas do tipo “*Matemática e Música*” (Brochura Funções 12, pág.84-96 e pág. 140-145) em que o estudante, usando sensores de som e calculadoras ou computadores, determina as frequências de notas de uma escala musical e investiga relações e diferenças entre essas notas, permitem discussões muito ricas na sala de aula.

Finalmente, uma tarefa do tipo da “*Evolução da população portuguesa*” (Brochura Funções 12, pág.110) permite encontrar a função logística que é modelo de variados fenómenos reconhecíveis em aplicações a estudos feitos em outras disciplinas.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1999). *Funções: Matemática 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR (SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

Os primórdios da História de Matemática

http://cmf.lmc.fc.ul.pt/em_accão/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes. Este vídeo foca algumas noções básicas da Matemática, salientando as contribuições mais marcantes que, ao longo de muitos séculos, levaram ao aparecimento do Cálculo. Além de uma descrição narrativa, utiliza a animação por computador para tratar alguns dos temas, constituindo um instrumento utilíssimo para a didáctica da Matemática.

MÓDULO A10

Optimização

Duração de Referência: **27 horas**

1 | Apresentação

Em módulos anteriores, os estudantes resolveram problemas de optimização, estimando ou mesmo calculando extremos de funções, sobre os gráficos e as tabelas das funções. Tomaram contacto com a taxa média de variação e com a taxa de variação instantânea, interpretando geometricamente estes conceitos.

Os estudantes apercebem-se da relação entre o sinal da taxa de variação num intervalo e a monotonia da função nesse intervalo. Os exemplos da exponencial e da logarítmica serviram para confirmar essa intuição reforçada pela repetição de exemplos de comportamento dos gráficos de funções diversas.

Pretende-se que, para além disso, os estudantes possam abordar outras formas de optimização, entre as quais assume especial importância a programação linear.

Situações realistas simples com constrangimentos de produção ou outros que podem ser modelados por inequações lineares servem para delimitar um polígono convexo que dá informação completa sobre as quantidades possíveis para cada produto.

A matemática mobilizada é simples e acessível e as representações gráficas apuradas (domínios planos) e tabelas são bons instrumentos que ajudam a interpretar a situação, as condições impostas a uma produção ou uma cadeia de produção, armazenamento, distribuição, etc.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Optimização, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções já estudadas;
- aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;

- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.;
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Optimização, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções;
- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e as respectivas taxas de variação;
- reconhecer numericamente e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função;
- reconhecer a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função;
- resolver problemas de aplicações simples envolvendo a determinação de extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas;
- reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático;
- resolver numericamente e graficamente problemas simples de programação linear;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Resolução de problemas envolvendo taxas de variação e extremos de funções de famílias já estudadas, com recurso à calculadora gráfica:
 - Taxa de variação média num intervalo;
 - Taxa de variação num ponto;
 - Sinais das taxas de variação e monotonia da função;
 - Zeros da taxa de variação e extremos da função.
2. Resolução de problemas de programação linear.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Um problema como aquele em que se atira uma pedra ao ar e a altura em função do tempo é dada por uma quadrática permite aos estudantes determinar a taxa de variação num instante qualquer, t_0 e representar no mesmo referencial a função dada e a função dos "declives das rectas tangentes" num intervalo do domínio da função. Uma situação problemática como esta poderá ter sido já estudada, mas pode agora ser aprofundada a sua análise, investigando a relação entre a forma do gráfico e os sinais dos declives das rectas tangentes.

Este tipo de exploração pode ser levado até à análise dos extremos. Por exemplo, traçando a parábola e a recta derivada eles confirmarão que para os valores de t em que a segunda é negativa a primeira decresce, bem como para aqueles em que a segunda é positiva a primeira

crece e que no zero da afim encontrarão o extremo da quadrática. Problemas do tipo da determinação do volume máximo de uma caixa feita a partir de uma folha de papel, ou outros semelhantes, constituem oportunidades análogas.

O mesmo tipo de explorações aparece no contexto de situações problemáticas simples, como aquela em que um volume de um sólido é dado por uma cúbica. Editando na calculadora

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ e } y_2 = \frac{y_1(x + 0,0000001) - y_1(x)}{0,0000001}$$

a cúbica e a função dos declives das rectas secantes para todo o x quando a amplitude do intervalo é $h=0,0000001$. [Considera-se esta abordagem preferível ao recurso da derivação numérica da calculadora por manter presente o conceito de taxa de variação e permitir comparar os dois gráficos, estudar a influência do valor de h e procurar o extremo da primeira função através da mudança de sinal e zero da segunda. Recomenda-se a consulta das páginas 48 a 53 da Brochura “Funções: Matemática – 11º ano de escolaridade”, sobre o tema da “derivação numérica”].

Este modo de proceder pode ser adoptado no estudo da monotonia das funções exponenciais e logarítmicas. Com este método, os estudantes podem até compreender que a taxa de variação instantânea de uma função exponencial é proporcional ao valor da função no ponto considerado e interpretar isto como um crescimento relativo constante.

Os problemas de programação linear a colocar apresentam os constrangimentos característicos de cada situação de produção e um objectivo (máximo ou mínimo de uma função objectivo) a ser alcançado com o maior êxito nas condições existentes.

Pretende-se familiarizar os estudantes com situações de gestão e desenvolver competências para tomar decisões boas em termos de planeamento (da produção, por exemplo) que podem ter a ver com maximizar lucros, minimizar custos ou consumos, etc.

Na aula de Matemática poderão tratar-se problemas simples com características idênticas. Assim cada exemplo tratará de maximizar ou minimizar uma determinada quantidade (função objectivo) tendo-se em conta certas limitações ou constrangimentos.

Se houver tempo, os estudantes podem mesmo ser colocados perante a necessidade de tomar decisões de novos investimentos que alterem as condições de fabrico (o polígono dos constrangimentos) de modo a responder a novos desafios ou a obter melhorias, com vantagem sobre o peso dos investimentos, nos máximos ou mínimos da função objectivo. No fundo, trata-se de colocar aos estudantes situações de trabalho em que seja marcante a utilidade do planeamento e benéfica a colaboração da matemática para tomar boas decisões em empresas ou colectivos de trabalhadores.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados de situações reais da actividade industrial, comercial ou de serviços;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1999). *Geometria: Matemática — 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Estas brochuras, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLET, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

CARREIRA, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Este estudo tem por fundamento a problemática da introdução de aplicações e modelação no ensino da matemática, encarando a utilização do computador como uma ferramenta de trabalho na realização de actividades de construção e exploração de modelos matemáticos.

OLANO, JAVIER PÉREZ - *Matemáticas-Programación Lineal*

<http://sauce.cnice.mecd.es/~jpeo0002/Partes/apuntes.html>

Esta página contém alguns textos de apoio a temas do ensino secundário de Espanha, entre os quais uma proposta de trabalho para programação linear.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-78). *Compêndio de Matemática* (5vols) Lisboa: MEC — GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC — GEP.

Sebastião e Silva foi provavelmente o primeiro em Portugal a incluir num livro de texto para o ensino secundário o tema da Programação Linear.

PINTO, JOAQUIM - “*Programação Linear [no Ensino Secundário]*”

http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/vitae/textos/04_ProgLinear_JPinto.pdf

Este texto contém referências históricas à programação linear, explora um exemplo simples de programação linear proposto por Sebastião e Silva e tem uma introdução ao método do simplex.

MÓDULO B1

Funções Periódicas e Não Periódicas

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

No ensino básico, os estudantes tiveram contacto com a semelhança de triângulos e com a trigonometria. Pretende-se agora que recordem esses conceitos básicos de trigonometria do ângulo agudo, enfrentem situações novas em que a generalização das noções de ângulo e arco, bem como das razões trigonométricas, apareçam como necessárias e intuitivas e aprendam o conceito de função periódica e de funções trigonométricas como modelos matemáticos adequados a responder a problemas.

Neste módulo, os estudantes alargam às periódicas e racionais as classes de funções que já conhecem, e, recorrendo essencialmente a trabalho com a calculadora gráfica e o computador, tomam contacto com algumas das suas propriedades de modo a ficarem capazes de escolher, para cada situação concreta, o modelo funcional mais adequado.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de funções pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Funções Periódicas e Não Periódicas, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Funções Periódicas e Não Periódicas, pretende-se que o estudante se aproprie dos seguintes conceitos e técnicas associadas e os utilize como "ferramentas" na resolução de problemas:

- radiano;
- referencial polar no plano; ângulos orientados e medidas das suas amplitudes;
- definição de seno, co-seno e tangente de um número real;
- resolução de equações trigonométricas muito simples;
- características das funções circulares: periodicidade;
- comportamento das funções racionais para valores "muito grandes" da variável e para valores "muito próximos" dos zeros dos denominadores das fracções que as definem;
- "rapidez" de crescimento (ou decréscimo) da variável dependente em fenómenos variados;
- modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre as funções polinomiais, as funções trigonométricas e as funções racionais.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Movimentos Periódicos. Funções Trigonométricas.
 - Motivação: exemplos de movimentos periódicos.
 - Seno, co-seno e tangente de um número real.
 - Resolução de equações trigonométricas muito simples.
 - Gráficos das funções seno, co-seno e tangente.
 - Periodicidade.
2. Movimentos Não Lineares. Funções Racionais.
 - Motivação: estudo de relações numéricas concretas entre variáveis inversamente proporcionais.
 - Características e comportamentos de algumas funções racionais:
 - $y = 1/(ax)$
 - $y = 1/(ax^2)$
 - $y = 1/[a(x-h)^2]$
3. Resolução de problemas onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

O professor precisa de propor problemas de diversos tipos para relembrar a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas de ângulos agudos. São exemplos possíveis o cálculo de distâncias directamente inacessíveis. A generalização das noções deve ser intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares. São exemplos possíveis a "roda gigante" das feiras, a roda da bicicleta, motores, etc. É absolutamente imprescindível a insistência no círculo trigonométrico.

As funções trigonométricas podem e devem aparecer como modelos matemáticos que descrevem situações mais ou menos complexas. As situações apresentadas podem considerar

a recolha e tratamento de dados. As primeiras respostas a eventuais perguntas podem ser encontradas de forma ingénua e com recurso à tecnologia e representações informais. O modelo que uma função trigonométrica pode representar deve aparecer como forma mais potente e geral para encontrar respostas para a situação em presença e para outras situações do mesmo tipo. Exemplos de situações: evolução da bolsa de valores, movimento pendular, movimento do braço na marcha, movimento das marés, roda da bicicleta ou outras situações com movimentos circulares, moldes de peças, etc. Estas actividades de modelação são boas ocasiões para utilizar folhas de cálculo electrónico. Antes da modelação, deve introduzir-se uma actividade que permita passar do círculo trigonométrico para o conjunto dos pontos $(x, \text{sen}x)$ no plano cartesiano.

O estudo das funções trigonométricas deve incluir a análise de algumas situações de modelação matemática, recorrendo necessariamente a três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

O estudo das famílias de funções é propício à realização de pequenas investigações. Neste programa não se pretende que os estudantes aprofundem as noções ligadas a funções trigonométricas e a técnicas de resolução de condições envolvendo as mesmas funções.

A partir de uma actividade de experimentação (como, por exemplo, "A resistência do esparguete" – ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", p 129), os estudantes podem compreender relações numéricas entre variáveis inversamente proporcionais e encontrar um modelo simples de uma função racional. Deverão proceder, depois, recorrendo às calculadoras gráficas ou ao computador, a investigações (ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", pp 80, 82 e 83) que os vão conduzir a conjecturar sobre as características e comportamentos de algumas funções racionais, em particular a existência de assíptotas ou o comportamento assíptótico.

A resolução de problemas como "As peças cilíndricas" (p 91), "Compostos ácidos", da brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", ou equivalentes, permitirá que os estudantes resolvam condições e compreendam como se usa a álgebra na resolução de problemas reais, mas está fora do âmbito deste programa a insistência nos aspectos algébricos das diferentes classes de funções.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções*.

ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*

CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*

<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

CARREIRA, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo*. Lisboa: APM.

Módulo B1: Funções Periódicas e Não Periódicas

Este estudo tem por fundamento a problemática da introdução de aplicações e modelação no ensino da matemática, encarando a utilização do computador como uma ferramenta de trabalho na realização de actividades de construção e exploração de modelos matemáticos.

IME-USP-SP, "E-Cálculo" - Funções Trigonométricas:

<http://www.cepa.if.usp.br/e-calculo/funcoes/trigonometricas/ftrigonometricas.htm>

Esta página da Universidade de São Paulo contém as definições básicas das funções trigonométricas, exemplos, aplicações e "apliquetas" interactivas.

NCTM/ADELINA PRECATADO E MARIA DA PAZ - Os corvos e a Matemática: utilização das funções racionais para investigar o comportamento dos corvos.

<http://www.apm.pt/recursos/secundario/corvos/>

Esta página contém a tradução de uma actividade de modelação matemática proposta na excelente página "Illuminations" do NVTM, <http://illuminations.nctm.org/>, que envolve as funções racionais.

GORDON, S. P.; GORDON, F. S. et al. (2004). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, Second Edition*. Second Edition. Addison Wesley, 2004.

GORDON, S. P. (1997). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, The Math Modeling/Precalculus Reform Project*. On-Line Proceedings of AMATYC 1997, Atlanta, Geórgia.

<http://www.amatyc.org/Proceedings/Atlanta23/Gordon/HTML/Gordon.html>

O projecto "Math Modeling/PreCalculus Reform" foi desenvolvido para ser uma alternativa ao ensino tradicional, valorizando aspectos inovadores como a análise de dados, o ajustamento de funções a dados da vida real e a modelação com um uso adequado da tecnologia; o projecto pretende que os estudantes olhem a matemática segundo a perspectiva simbólica, geométrica e numérica, tendo muita preocupação com a compreensão dos conceitos.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs*. Addison-Wesley.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs - Graphing Calculator Manual*. Addison-Wesley.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic, 6th Edition*. Prentice-Hall.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic, 6th Edition - Graphing Calculator Manual*. Prentice-Hall.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Companion Site*.

<http://www.aw-bc.com/demana/>

MÓDULO B2

Estatística Computacional

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

Com o advento dos meios informáticos, cada vez é maior o volume de dados que é possível armazenar num reduzido espaço físico e cada vez é maior o interesse por parte dos gestores e decisores em retirar desses dados toda a informação que lhes possa ser relevante. No módulo obrigatório de Estatística os estudantes aprenderam os principais conceitos e técnicas subjacentes ao tratamento e redução de colecções de dados, mas é, sem dúvida, uma grande mais valia o ficarem com alguns conhecimentos elementares de algum *software* informático de uso generalizado que lhes permita uma implementação facilitada das referidas técnicas. O *software* escolhido é o Excel que, embora não seja um *software* estatístico, inclui funções para cálculo das principais estatísticas descritivas, permite realizar as principais representações gráficas e, mediante recurso a outras funções predefinidas, permite ainda efectuar procedimentos não imediatos como seleccionar aleatoriamente uma amostra, construir histogramas com classes de diferente amplitude, organizar os dados em tabelas de contingência ou, até mesmo, proceder à simulação de pequenas experiências aleatórias.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Estatística Computacional, a competência que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- o conhecimento claro das potencialidades do Excel como *software* útil e disponível para tratamento e redução de dados;
- a sensibilidade para o problema da variabilidade em inferência estatística, para o que se recorrerá a múltiplas amostragens de uma mesma população;
- a aptidão para escolher os procedimentos adequados ao tratamento exploratório dos dados em estudo, de acordo com o seu tipo e características a salientar;
- a aptidão para executar os procedimentos atrás referidos usando o Excel.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Estatística Computacional, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- saber organizar dados no Excel de modo a serem susceptíveis de tratamento estatístico;
- delinear e implementar planos de amostragem adequados ao estudo de algumas características de interesse em populações que lhes seja de fácil acesso (população escolar, população da freguesia, etc.);
- adquirir conhecimento sobre a forma como executar as funções do Excel destinadas ao cálculo de estatísticas descritivas, realização de representações gráficas e construção de tabelas de contingência;
- saber implementar procedimentos de simulação de experiências aleatórias simples;

- cimentar conhecimentos adquiridos anteriormente, nomeadamente no que respeita à interpretação das estatísticas e representações gráficas que vão sendo obtidas e à escolha crítica das mais adequadas aos dados em estudo.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Noções básicas sobre amostragem
 - Amostra aleatória e não aleatória.
 - Técnicas de amostragem aleatória:
 - Amostragem aleatória simples – números aleatórios; as funções RAND (*ALEATORIO*) e VLOOKUP (*PROCV*) do Excel e sua utilização na selecção de amostras.
 - Amostragem estratificada.
 - Variabilidade amostral – ilustração por recurso a múltiplas amostras recolhidas de forma aleatória de uma mesma população.
2. Uso do Excel em análise exploratória de dados
 - Obtenção dos valores de algumas estatísticas descritivas – AVERAGE (*MEDIA*), MEDIAN (*MED*), MODE (*MODA*), STDEV (*DESVPAD*), VAR (*VAR*), PERCENTILE (*PERCENTIL*), QUARTILE (*QUARTIL*), MAX (*MÁXIMO*), MIN (*MÍNIMO*), etc.
 - Construção de tabelas de frequências – uso das funções COUNT (*CONTAR*), COUNTIF (*CONTAR.SE*), COUNT.VAL (*CONTAR.VAL*), FREQUENCY (*FREQUÊNCIA*), SUM (*SOMA*), etc.
 - Construção de representações gráficas.
 - Gráfico de pontos;
 - Diagrama de dispersão;
 - Diagrama de barras;
 - Histograma;
 - Diagrama de extremos e quartis;
 - Gráfico de caule-e-folhas;
 - Diagrama circular;
 - Outras representações gráficas.
 - Construção de tabelas de contingência – uso do procedimento PIVOT TABLE (*TABELA DINAMICA*).
 - Instalação e utilização do procedimento avançado *Data Analysis* (Análise de Dados) (opcional).
3. Simulação de algumas experiências aleatórias simples (por exemplo, lançamento de um dado, extracção dos números de lotarias ou concursos análogos, chegadas de viaturas a um parque de estacionamento, etc.).

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

A análise exploratória de dados, embora tenha metodologias e técnicas próprias, é, em grande parte, uma “arte” que se vai apurando com a prática. Cada colecção de dados tem as suas particularidades e a sua história e o engenho está em “fazer os dados falar!...”. A facilidade que os meios computacionais trouxeram à implementação das técnicas de análise de dados permite, hoje em dia, uma aprendizagem mais rápida e eficiente das diversas formas de extrair informação de grandes colecções de dados, desenvolvendo no estudante o espírito crítico quanto à escolha das representações gráficas mais adequadas ou das estatísticas descritivas que melhor resumem os dados em estudo. Para o processo de aprendizagem é importante que o estudante comece por analisar pequenas colecções de dados (recolhidos, de preferência, junto

da população da escola) e, para exemplificação da forma como se executam os diversos procedimentos computacionais, aconselha-se que estas não envolvam mais do que uma ou duas variáveis de interesse. Numa fase posterior deve-se incentivar os estudantes a pesquisar algumas fontes de dados e a escolher algumas variáveis que lhes despertem mais interesse. No parágrafo Bibliografia / Outros Recursos está a indicação de algumas das páginas da Internet onde se pode encontrar informação estatística detalhada sobre temas de carácter genérico, ligados à sociedade onde vivemos (saúde, cultura, ensino, actividades económicas, etc.).

Quanto ao tópico “Simulação de experiências aleatórias simples”, a abordar no final deste módulo de Estatística Computacional, a sua inclusão irá permitir tirar partido do gerador de números pseudo-aleatórios como simulador de ocorrências de acontecimentos, bastando para tal escolher um modelo de probabilidade que represente bem a experiência a simular. Aqui poderá simular-se facilmente o lançamento de um dado ou a extracção dos números do totoloto e confrontar os resultados com o que se esperaria teoricamente. Poder-se-á até estimar probabilidades de acontecimentos resultantes de experiências aleatórias mais complexas como, por exemplo, estimar a probabilidade de, ao cortar um segmento de recta em dois pontos, obter três segmentos que venham a formar os lados de um triângulo. De um modo geral, qualquer experiência interpretável através de um modelo de probabilidade discreto poderá ser objecto de um pequeno projecto de trabalho para os estudantes e uma boa oportunidade para usarem a criatividade própria na concepção e concretização do projecto.

A natureza deste módulo e, em particular, o tipo de trabalho que se pretende desenvolver com os estudantes, implica, de algum modo, uma alteração nos instrumentos de avaliação. As provas escritas perdem sentido e a actividade e aproveitamento dos estudantes são mais cabalmente medidos com a apreciação de trabalhos de grupo e individuais que poderão ser relatórios escritos ou apresentações orais de projectos desenvolvidos durante o decorrer do módulo.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, a seguir enumeradas:

Prova I: apresentação oral ou por escrito de um exemplo de uma situação problemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à prova.

Prova II: defesa oral de um trabalho realizado neste módulo, escolhido pelo estudante, e supervisionado pelo professor. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

GRAÇA MARTINS, M.E. (2000) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*, Edição da Sociedade Portuguesa de Estatística.

MOORE, D. ET AL (1996) – *Introduction to the Practice of Statistics*, Freeman, New York.

MOORE, D. (1996) – *The Basic Practice of Statistics*, Freeman, New York.

MOORE, D. (1997) – *Statistics – Concepts and Controversies*, Freeman, New York.

COMAP, (2000) – *For all Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today's World*, Freeman and Company, New York.

ROSSMAN, A. et al (2001) – *Workshop Statistics – Discovery with data*, Key College Publishing.

Os livros anteriores são recomendados pela Sociedade Portuguesa de Estatística para apoio aos professores de Matemática do Ensino Secundário.

BARNETT, V. (1997) – *Sample Survey: Principles & Methods*, Arnold, London.

VICENTE, P., REIS, E., FERRÃO, F. (1996) – *Sondagens*, Edições Sílabo.

Artigos da revista *TEACHING STATISTICS*

AGEEL, M.I. – Spreadsheets as a Simulation Tool for Solving Probability Problems, Vol 24, 2, pag. 51-54.

NEVILLE, H. – Handling Continuous Data in Excel, Vol 25, 2, pag. 42-45.

NEVILLE, H. – Charts in Excel, Vol 26, 2, pag. 49-53.

RECURSOS NA INTERNET

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA E ESCOLA SECUNDÁRIA TOMAZ PELAYO
PROJECTO ALEA – <http://alea-estp.ine.pt>

Desta página recomenda-se, em especial, o dossier didáctico “ESTATÍSTICA COM EXCEL” da autoria de Luís Miguel Cunha.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTATÍSTICA – www.ine.pt/

Tem informação sobre Portugal, ao nível da freguesia.

EUROSTAT – europa.eu.int/comm/eurostat/

Tem informação relativa aos diversos países da Europa.

WORLD HEALTH ORGANIZATION – <http://www.who.int/research/en/>

Tem informação sobre temas ligados à saúde, para todos os países do mundo.

WORLD IN FIGURES – http://www.stat.fi/tup/maanum/index_en.html

Tem informação das mais diversas áreas, tais como população e estatísticas vitais, cultura, religiões, emprego, consumo, etc., relativa a todos os países do mundo.

MÓDULO B3

Modelos de Funções

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

Quando se pretende descrever a evolução (normalmente ao longo do tempo) de uma determinada grandeza, é comum apresentar uma função cujo modelo melhor descreva o gráfico; tal modelo ajuda a perceber o que aconteceu nesse período e a prever o que será necessário fazer.

É por isso importante que todos os profissionais (talvez todos os cidadãos) conheçam diferentes modelos de funções de modo a saber que propriedades elementares elas possuem e em que medida uns modelos diferem muito ou pouco de outros modelos.

Os estudantes a quem se destina este módulo não precisarão de ser grandes especialistas do estudo das funções, nem realizar estudos muito completos sobre funções, precisando apenas de saber lidar com tabelas e gráficos associados a modelos dados ou que se possam obter por meio de ensaios simples. Trabalhos mais completos exigirão a intervenção de outro tipo de profissionais.

Neste módulo apenas serão objecto de estudo os modelos de funções mais elementares: lineares, polinomiais (grau 2 e 3), trigonométricas (seno e co-seno), logarítmicas, exponenciais e logísticas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Modelos de Funções, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- capacidade de analisar, usando a calculadora gráfica ou o computador, famílias de funções elementares;
- capacidade de associar, a partir das propriedades das funções, modelos de funções a tabelas de valores;
- capacidade de obter por meio da regressão, usando calculadoras gráficas ou computadores, modelos de funções a partir de tabelas de valores;
- capacidade de resolver problemas usando modelos de funções.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Modelos de Funções, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- determinar, usando a calculadora gráfica ou o computador, propriedades simples de famílias de funções elementares;

- determinar, a partir das propriedades das funções, quais os modelos de funções que melhor se adequam a tabelas de valores dadas;
- obter modelos de regressão, usando calculadoras gráficas ou computadores, a partir de tabelas de valores;
- usar modelos de funções para explicar e prever propriedades das situações a que se tentam aplicar os modelos.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Estudo, usando a calculadora gráfica ou o computador, de propriedades simples das seguintes famílias de funções elementares, estudando o efeito da variação de um parâmetro (e apenas um parâmetro de cada vez):
 - funções lineares: $ax+b$;
 - funções polinomiais do 2º e 3º grau;
 - funções trigonométricas (seno e co-seno): $a \sin(bx+c)$, $a \cos(bx+c)$;
 - função logarítmica (de base superior a 1);
 - função exponencial (de base superior a 1);
 - função logística: $a/(1 + b * d^{(-x)})$ com d superior a 1.
2. Discussão, a partir das propriedades estudadas, de qual dos modelos de funções estudados parece ser mais adequado para descrever as variáveis descritas por tabelas de valores dados.
3. Usando a regressão determinar, com recurso a calculadoras gráficas ou computadores, modelos de funções a partir de tabelas de valores.
4. Resolver problemas usando modelos de funções.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

É muito importante, como forma de motivação e como elemento de formação, que todas as actividades que se apresentem neste módulo partam de situações concretas. Podem ser usados dados retirados de páginas de Estatística como as do INE, mas também se poderão usar dados recolhidos de experiências realizadas com sensores acoplados a calculadoras ou computadores, explorando eventualmente experiências realizadas em módulos de outras disciplinas. Podem ainda ser usados dados de textos de divulgação ou publicados em jornais e revistas de grande circulação. A Internet é um recurso inestimável, recomendando-se particularmente a página ALEA por conter um grande número de dados em todas as áreas de actividade.

A ênfase do trabalho neste módulo está na interpretação qualitativa dos dados concretos com a ajuda dos modelos de funções escolhidos; está fora de questão o estudo algébrico ou usando o cálculo diferencial; sendo assim trata-se de um estudo essencialmente numérico e gráfico. No trabalho numérico tem cabimento que os estudantes estudem também, com papel e lápis, se determinado modelo como $y=ax+b$ tem cabimento numa instância particular; este problema resume-se a resolver um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros do modelo, podendo o sistema ser resolvido usando a calculadora ou o computador se tiver três ou mais equações.

Para ajudar os estudantes a comparar os diferentes modelos, o professor poderá pedir-lhes que elaborem tabelas com as propriedades dos diferentes modelos de funções.

É muito importante, neste módulo, que os estudantes analisem criticamente, com os conhecimentos que possuem dos diferentes modelos de funções e com os dados de cada

situação concreta, as conclusões que vão obtendo; é possível que uma calculadora ou computador nos encaminhe para um determinado modelo mas que esse modelo não tenha qualquer cabimento na situação que está a ser estudada; carregar em teclas é fácil, interpretar pode ser algo de extremamente difícil, sendo normal que a conclusão do trabalho diga que dois modelos são igualmente aceitáveis em função dos dados conhecidos e que mais dados poderão hipoteticamente vir a tornar um dos modelos inaceitável.

Não há lugar neste módulo a qualquer discussão sobre a natureza da regressão; isso é discutido no módulo de Estatística; aqui apenas se usa a regressão para construir modelos de funções.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso; as provas são:

Prova I — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de sensores ligados a calculadoras ou computadores;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova II — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1998). *Funções: Matemática 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1999). *Funções: Matemática 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997-2000), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

CARAÇA, BENTO DE JESUS (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Col. Ciência Aberta, Vol. 98 (2a ed.). Lisboa: Gradiva

Neste livro, Bento de Jesus Caraça (1901-1948) mostra como a Matemática é um organismo vivo, impregnado de condição humana, com as suas forças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo entendimento e pela libertação ao pôr em evidência como os fundamentos da Matemática mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da Ciência, na vida real. Trata-se sem dúvida de um dos melhores livros de Matemática escritos em língua portuguesa onde se pode assistir maravilhado à evolução dos conceitos de número, de função e de continuidade, através de numerosas discussões, reflexões, notas históricas e teoremas muitas vezes com demonstrações pouco vulgares.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

TEODORO, VÍTOR ((SCT da Educação e da Formação, FCT, UNL)).
Modellus web page — <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/> —

Esta página contém a última versão do programa Modellus para transferência gratuita. Contém ainda manuais, ficheiros de actividades e uma zona de ajuda que fazem com que este programa seja incontornável no ensino da matemática (e da Física) do secundário.

BELLMAN, A. *Uma Introdução Prática ao Estudo das Funções.*
ROCHA, H. *A calculadora gráfica no estudo de funções*
CUNHA, E. *Investigação e Modelação na aula de Matemática*
<http://education.ti.com/portugal/professor/biblioteca/biblioteca.html>

Estas três publicações fornecem muitos exemplos para trabalho com funções usando calculadoras gráficas e sensores, e estão disponíveis na Internet.

GORDON, S. P.; GORDON, F. S. et al. (2004). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience*, Second Edition. Addison Wesley, 2004.

GORDON, S. P. (1997). *Functioning in the Real World: A Precalculus Experience, The Math Modeling/Precalculus Reform Project*. On-Line Proceedings of AMATYC 1997, Atlanta, Geórgia.
<http://www.amatyc.org/Proceedings/Atlanta23/Gordon/HTML/Gordon.html>

O projecto "Math Modeling/PreCalculus Reform" foi desenvolvido para ser uma alternativa ao ensino tradicional, valorizando aspectos inovadores como a análise de dados, o ajustamento de funções a dados da vida real e a modelação com um uso adequado da tecnologia; o projecto pretende que os estudantes olhem a matemática segundo a perspectiva simbólica, geométrica e numérica, tendo muita preocupação com a compreensão dos conceitos.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs*. Addison-Wesley.
DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2003). *Precalculus: Functions and Graphs - Graphing Calculator Manual*. Addison-Wesley.
DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic, 6th Edition*. Prentice-Hall.
DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic, 6th Edition - Graphing Calculator Manual*. Prentice-Hall.

DEMANA, F.; WAITS, B. et al. (2004). *Precalculus: Companion Site*.
<http://www.aw-bc.com/demana/>

RECURSOS NA INTERNET

Modelação em Recursos Naturais (ISA-UTL)

<http://www.isa.utl.pt/def/gimref/disciplinas/modelacao.htm>

Modelação Matemática

<http://pagina.de/modelacao>

APM-Matemática e Natureza

<http://www.apm.pt/natureza/>

ALEA (ESTP-INE)

<http://alea-estp.ine.pt/>

DreamCalc Pro 2 - Scientific Calculator (em inglês, com tradução em português)

<http://www.dreamcalc.net/>

Demana-Waits Mathematics Education (em inglês)

<http://emptweb.mps.ohio-state.edu/dwme/>

Mathematical Models with Applications (em inglês)

<http://www.tenet.edu/teks/mmacd/mma.htm>

Function Models of Light Decay (em inglês)

http://illuminations.nctm.org/index_o.aspx?id=137

Rational Function Models (em inglês)

<http://www.statlets.com/nist/pmd/section6/pmd642.htm>

RIT Department of Mathematics & Statistics Calculator Resource Site (em inglês)

<http://www.rit.edu/~jmwsma/calculators/>

A practical guide to curve fitting (em inglês)

<http://www.curvefit.com/>

Graphing Calculator Guides (em inglês)

<http://college.hmco.com/mathematics/latorre/guides.htm>

Graphing Calculator Instructional Handouts (em inglês)

<http://fym.la.asu.edu/~fym/GraphCal/Graphing.html>

Activités mathématiques en BEP et BACPRO (em francês)

http://www.ac-reims.fr/datice/math-sciences/doc_peda/doc_math.htm

Etude de fonctions usuelles - BABAULT Yves – ISSOUDUN (em francês)

http://www.ac-grenoble.fr/math-sciences/peda_bac_m_a/doc/etudes_courbes.zip

MÓDULO B4

Programação Linear

Duração de Referência: **30 horas**

1 | Apresentação

Pretende-se que os estudantes abordem uma forma de optimização, a programação linear, uma ferramenta de gestão e planeamento que faz uso de alguma matemática básica fundamental, a saber: equações e inequações do 1º grau numa ou mais variáveis; sistemas de equações e inequações; sistemas de eixos coordenados; representações geométricas: rectas, planos e domínios planos; função afim. Para grande parte dos estudantes será necessário abordar de raiz conceitos básicos de geometria com coordenadas e introduzir prolongamentos de alguns métodos algébricos. Estes conceitos podem e devem ser tratados recorrendo a métodos numéricos, algébricos e gráficos. Os trabalhos dos estudantes devem considerar o recurso a calculadoras gráficas mas também a computadores e folhas de cálculo. As resoluções gráficas dos sistemas de inequações, bem como a procura da solução óptima ou de um valor máximo para a função objectivo pode e deve ser feita com recurso a programas de geometria dinâmica.

Situações realistas simples com constrangimentos de produção ou outros que podem ser modelados por inequações lineares servem para delimitar um polígono convexo que dá informação completa sobre as quantidades possíveis para cada produto.

A matemática mobilizada é simples e acessível e as representações gráficas apuradas (domínios planos) e tabelas são bons instrumentos que ajudam a interpretar a situação, as condições impostas a uma produção ou uma cadeia de produção, armazenamento, distribuição, etc.

As aplicações e as actividades de modelação matemática constituem a forma de trabalho a privilegiar para a construção de todos os conceitos e processos e para a demonstração do valor e uso das técnicas a eles associados. A resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada actividade, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionem variáveis ligadas às áreas de interesse profissional dos estudantes.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Programação Linear, a competência matemática que todos devem desenvolver, inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para reconhecer as vantagens na escolha de referenciais, no uso das coordenadas e de condições para modelar situações e resolver problemas;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais, em especial as de planeamento (de produção ou outras);
- aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;

- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Programação Linear, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam são os seguintes:

- utilizar sistema de coordenadas para obter equações e inequações que representem determinados lugares geométricos (rectas e domínios planos);
- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções afins, com resolução de equações e inequações;
- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções afins, bem como entre os sinais dos coeficientes e a monotonia;
- resolver numérica, graficamente e, com recurso a programas computacionais (na folha de cálculo), problemas de programação linear;
- abordar a história da programação linear como ferramenta de gestão e nos contextos da sua criação e desenvolvimento;
- resolver numérica, gráfica e algebricamente alguns sistemas de equações e inequações;
- utilizar tecnologia e programas computacionais específicos para gestão e planeamento;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Resolução de problemas envolvendo:
 - sistemas de eixos coordenados;
 - equações de rectas ou funções afins;
 - resolução de sistemas de equações e/ou inequações.
2. Resolução de problemas de programação linear, com referências expressas à identificação das variáveis de decisão, das restrições e da função objectivo, bem como à sua formulação matemática.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

Para que os estudantes deste módulo possam tratar com segurança problemas de programação linear, é necessário abordar com algum detalhe situações das quais possam decorrer esclarecimento sobre elementos de geometria das coordenadas, estudo da função afim, equações e inequações do 1º grau e resoluções gráficas dos sistemas de equações e inequações.

Os problemas de programação linear a colocar apresentam os constrangimentos característicos de cada situação de produção e um objectivo (máximo ou mínimo de uma função objectivo) a ser alcançado com o maior êxito nas condições existentes.

Pretende-se familiarizar os estudantes com situações de gestão e desenvolver competências para tomar decisões boas em termos de planeamento (da produção, por exemplo) que possam ter a ver com maximizar lucros, minimizar custos ou consumos, etc.

Na aula de Matemática poderão tratar-se problemas simples com características idênticas. Assim cada exemplo tratará de maximizar ou minimizar uma determinada quantidade (função objectivo) tendo-se em conta certas limitações ou constrangimentos.

Os estudantes devem ser colocados perante a necessidade de tomar decisões sobre novos investimentos que alterem as condições de fabrico (o polígono dos constrangimentos ou polígonos de validade) de modo a responder a novos desafios ou a obter melhorias, com vantagem sobre o peso dos investimentos, nos máximos ou mínimos da função objectivo. No fundo, trata-se de colocar aos estudantes situações de trabalho em que seja marcante a utilidade do planeamento e benéfica a colaboração da matemática para tomar boas decisões em empresas ou colectivos de trabalhadores.

Estão previstas neste módulo seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por três provas, com igual peso, com uma duração de duas horas cada uma; as provas são:

Prova I — um teste escrito.

Prova II — apresentação oral ou por escrito de uma situação de modelação matemática, fornecida pelo professor com uma curta antecedência em relação à realização da prova, recorrendo obrigatoriamente a um de três tipos de exemplos:

- recolha de dados de situações reais da actividade industrial, comercial ou de serviços;
- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

Prova III — apresentação oral de um problema, escolhido e preparado com antecedência pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário).

6 Bibliografia / Outros Recursos

TEIXEIRA, P. (coord.), PRECATADO, A., ALBUQUERQUE, C., ANTUNES, C. E NÁPOLES, S. (1997). *Funções: Matemática 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1998). *Geometria: Matemática — 11º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1999). *Geometria: Matemática — 12º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Estas brochuras, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

FERREIRA, J. S. (1976). *Introdução à Programação Linear*. Lisboa: Clássica Editora.

Esta obra é um ponto de partida, em português, para a Programação Linear.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M. et al. (1997). *Cálculo*. vol.1. Rio de Janeiro: LTC.

Este livro de texto é um dos mais inovadores dos últimos anos e foi elaborado por uma equipa de matemáticos distintos e de educadores e professores com larga experiência. O livro apresenta os conceitos básicos de funções reais de uma variável real tendo como orientação dois princípios básicos: A Regra de Três (Todo o assunto deve ser apresentado geométrica, numérica e algebricamente) e o Modo de Arquimedes (Definições e procedimentos formais decorrem do estudo de problemas práticos). A apresentação dos conceitos, os inúmeros exemplos e os exercícios de tipo muito variado fornecerão, seguramente, boas inspirações a qualquer professor.

LACHTERMACHER, G. (2002). *Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões*. Rio de Janeiro: Editora Campus.

Este livro faz uma abordagem à programação linear como ferramenta de gestão e introduz a necessidade da utilização de computadores com software específico, em particular, a utilização das folhas de cálculo e de executáveis que são utilizados generalizadamente em áreas de gestão de empresas. Nas páginas 91 e seguintes, trata-se em detalhe da Programação Linear utilizando o Solver do Excel.

MATOS, J. ; MATOS, R

<http://prolin.no.sapo.pt/>

João Matos e Ricardo Matos, da Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, conceberam e realizaram um “programa para resolver problemas de programação linear”; “a ideia de desenvolver um programa (...) vem da dificuldade em encontrar um programa de fácil utilização que possa indicar os valores mais importantes da solução de um problema deste tipo: o valor da função objectivo e das variáveis e a respectiva análise de sensibilidade” O programa e textos de apoio podem ser descarregados sem quaisquer custos.

MEYER, R. (1993). *Linear Programming. For all Practical Purposes – Introduction to Contemporary Mathematics* (5th ed). New York: COMAP/W.H. Freeman and Cy.

O quarto capítulo deste volume, publicado pelo Consórcio para as Aplicações da Matemática, constitui boas introduções aos problemas associados aos conceitos de planeamento e às aplicações da Programação Linear. Contém também indicações sobre a história da criação das teorias e o seu desenvolvimento.

RAMALHETE, M; GUERREIRO, J.; MAGALHÃES, A. (1998). *Programação Linear* (2vols) Lisboa: McGraw-Hill.

A introdução e o primeiro capítulo do primeiro volume desta obra, fornecem indicações boas, enunciados de problemas e resoluções muito úteis para professores e estudantes. Claro que outros capítulos da obra fornecem bons exemplos, embora precisem de ser objecto de tratamento cuidado para o nível do trabalho com os estudantes.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-78). *Compêndio de Matemática* (5vols) Lisboa: MEC — GEP.

Os Compêndios de Matemática de Sebastião e Silva são referências obrigatórias e constituem um bom recurso para estudar qualquer dos assuntos que são abordados no ensino secundário.

SEBASTIÃO E SILVA, J. (1975-77). *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (3 vols). Lisboa: MEC — GEP.

Sebastião e Silva foi provavelmente o primeiro em Portugal a incluir num livro de texto para o ensino secundário o tema da Programação Linear.

MÓDULO B5

Jogos e Matemática

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

Um jogo que não dependa de força física e que tenha as suas regras bem definidas, estimula o raciocínio, motiva para a procura de uma estratégia, suscita a reflexão, aproximando-se muito da resolução de um problema matemático. Se a tudo isso juntarmos o desafio de ganhar o jogo, de melhorar o seu próprio desempenho ou a competição com um adversário ou num torneio, então o jogo pode constituir uma entrada especialmente estimulante no mundo do raciocínio abstracto, acessível a novos e velhos, tenham muitos ou tenham poucos conhecimentos matemáticos. Miguel de Guzmán interroga mesmo: “**Onde termina o jogo e onde começa a matemática séria?**”

As actividades ligadas aos jogos assumem assim o papel de actividades estimuladoras de raciocínio matemático ao mesmo tempo que possuem uma característica recreativa cuja origem se perde nos tempos. Exposições como “**Pedras que jogam**” e “**Jogos do mundo**”, que foram elaboradas recentemente em Portugal e continuam disponíveis, provam que os jogos são já usados há muitos séculos e que são uma actividade presente em todas as regiões do mundo e em todas as civilizações.

No ano de 2004 a APM-Associação de Professores de Matemática promoveu a sua iniciativa temática anual subordinada ao tema “Matemática e Jogo” por considerar que

“O interesse pelo jogo é transversal a todas as idades e um daqueles temas em que se conjugam facilmente o interesse de amadores e profissionais, de cidadãos vulgares e eminentes matemáticos. Mesmo para os que não apreciam os jogos em grupo existem os “solitários” ou as versões electrónicas, em que o computador desempenha o papel de adversário. Para além do entretenimento, os jogos apresentam um grande potencial cultural, pedagógico e didáctico. E, acima de tudo, os jogos podem criar motivação para o pensamento e a investigação matemáticos.”

No ano de 2004 foi também realizado pela primeira vez em Portugal, com assinalável sucesso, o primeiro **Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos**, cuja final decorreu no dia 26 de Novembro de 2004, no Pavilhão do Conhecimento, em Lisboa.

Sabe-se que muitos matemáticos se dedicaram aos jogos; Arquimedes (287 a.C. - 212 a.C.) interessou-se pelo “problema dos bois” e pelo quebra-cabeças *Stomachion*; Hamilton (1801-1865), o inventor dos quaterniões, inventou também um jogo matemático chamado “Viagem à volta do mundo” que foi a única publicação com que ganhou dinheiro; Leibniz (1646-1716) considerou não só que ser capaz de inventar um jogo era sinal de inteligência como deveria haver um curso inteiro de jogos tratados do ponto de vista matemático; John Conway inventou em 1970 o “jogo da vida” que atraiu logo a atenção de muita gente, matemáticos, cientistas ou simples curiosos, e acabou por ser uma fonte de exemplos em algumas áreas da matemática; Albert Einstein (1879-1955) tinha na sua biblioteca uma estante inteira dedicada aos jogos matemáticos.

Muitas pessoas tornaram-se célebres por inventar jogos ou quebra-cabeças; ainda não há muitos anos andava muita gente à volta do cubo de Rubik, inventado em 1974 pelo húngaro Ernő Rubik; o americano Sam Lloyd (1841-1911) fez carreira a inventar quebra-cabeças que ainda hoje são muito populares, como o dos 12 guerreiros ou o jogo do 15. Pessoas como Martin Gardner, que durante 30 anos teve uma coluna sobre divulgação matemática incluindo muitos jogos matemáticos numa revista de divulgação científica americana, terá sido quem mais conseguiu despertar vocações matemáticas; felizmente ainda hoje muitos dos seus livros (muitos traduzidos para português) continuam a despertar o interesse dos jovens e dos menos jovens.

Todas estas razões levam a concluir que nas actividades de animação de miúdos e graúdos, com formação matemática avançada ou rudimentar, os jogos devem desempenhar um papel importante.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Jogos e Matemática, as competências matemáticas visadas incluem os seguintes aspectos:

- Compreensão do valor motivador de jogos de raciocínio;
- Compreensão de como o envolvimento em actividades de jogos representa um desenvolvimento das capacidades de raciocínio;
- Aptidão para discutir estratégias para os jogos;
- Aptidão para usar a matemática como forma de analisar e elaborar estratégias ganhadoras para os jogos.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Jogos e Matemática, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- aprender a jogar alguns quebra-cabeças e jogos de raciocínio de diferentes tipos;
- aprender a analisar alguns jogos e situações simplificadas dos jogos estudados;
- perceber como a matemática pode ajudar a explicar ou garantir estratégias ganhadoras para alguns jogos.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Experiência de cada um dos seguintes tipos de jogos de raciocínio:

- **Quebra-cabeças** - exemplos possíveis: quebra-cabeças com palitos; jogo do 15; tangram; *Stomachion*; poliomínós; quadrados mágicos; quebra-cabeças de Sam Loyd.
- **Truques de cartas** - exemplos possíveis: “Azeite e água”, 4 Ases.
- **Jogos com números** - exemplos possíveis: jogo do NIM; Trinca-espinnhas.
- **Jogos geométricos** - exemplos possíveis: Arbusto; jogo do caos; 3 em linha; jogos poliédricos; pontos e quadrados.
- **Jogos de tabuleiro para um só jogador** - exemplos possíveis: Solitário; a rã saltadora; jogo da vida.
- **Jogos de tabuleiro para dois jogadores** - exemplos possíveis: jogo do galo; Mancala/Ouri/Bantumi, Hex, peões, Amazonas.

2. Análise de alguns jogos:
 - Análise de algumas situações simplificadas dos jogos, determinando se conduzem à vitória ou derrota;
 - Análise de algumas situações ganhadoras e justificação de que são ganhadoras;
 - Prova de que um dos jogadores tem vantagem ou de que existe uma estratégia ganhadora - exemplo: jogo do Hex.
3. A matemática por detrás de alguns dos jogos estudados:
 - Justificações numéricas - exemplos possíveis: numeração binária para o jogo do NIM; justificação dos truques de cartas; números primos no Trinca-espinhas.
 - Justificações algébricas - exemplos possíveis: jogo do 15; a rã saltadora.

5 Situações de Aprendizagem / Avaliação

O professor tem um leque alargadíssimo de jogos que pode escolher, sendo a bibliografia em português muito abundante. Nenhum dos jogos referidos anteriormente é obrigatório; o único aspecto essencial neste programa é a escolha de tipos de jogos diversificados. Não tem sentido a este nível escolher jogos muito complexos, nem jogos que envolvam uma análise matemática muito elaborada. É contudo interessante que os estudantes saibam que a análise de jogos é uma área que pode ser feita a um nível de muita sofisticação, sendo interessante que os estudantes conheçam alguma história ligada aos jogos. Se houver oportunidade, seria vantajosa uma visita às exposições “**Pedras que jogam**” e “**Jogos do mundo**”. Poderão ser referidos outros episódios históricos, como os relacionados com o matemático John Nash que ganhou o prémio Nobel por resultados da Teoria dos Jogos (e os outros galardoados com o prémio pela aplicação dessa teoria à Economia) e que foi também um dos inventores do jogo do Hex.

Alguns dos jogos propostos poderão ser combinados de modo a produzir outros: por exemplo, Martin Gardner (no livro “Rodas, vida e outras diversões matemáticas”) refere como se podem fazer truques de magia com o jogo do galo. A magia impressiona sempre o auditório quando se trata de adivinhar números: porque não adivinhar a data do aniversário? (ver problema 93 de “Mais actividades matemáticas” de Brian Bolt).

O professor pode organizar um torneio com os seus estudantes, devendo então aproveitar a oportunidade para discutir as regras de organização de um torneio, referindo por exemplo o sistema suíço, que permite realizar em poucas jornadas um torneio com muitos participantes, fugindo ao método mais propenso ao acaso que é o da eliminação (e levando os estudantes a discutir as vantagens dos diferentes métodos); podem também ser discutidos diferentes métodos de desempate.

Muitos dos jogos existem na Internet, podendo os estudantes ser incentivados a usar esses recursos como forma de estimular o seu raciocínio, testagem de estratégias, etc. É aliás possível jogar em permanência torneios a nível internacional nalgumas páginas de jogos (como a do *Yahoo*); o jogo aí chamado “Dots” é o jogo “pontos e quadrados”.

Uma estratégia possível para ajudar os estudantes a abordar os jogos é a proposta por Miguel de Guzmán, que se aproxima muito da heurística de Polya para a resolução de problemas:

- a) Antes de fazer tentarei entender;
- b) Elaborarei uma estratégia;
- c) Observarei se a minha estratégia me leva ao final;
- d) Tirarei “sumo” do jogo.

Esta e outras propostas de Miguel de Guzmán poderão ser extremamente úteis ao professor e poderão ser encontradas no texto "**Juegos Matemáticos en la enseñanza**", que está disponível na Internet e foi publicado em Portugal no Boletim da SPM-Sociedade Portuguesa de Matemática.

Estão previstas seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, que a seguir se enumeram.

Prova I — uma composição em que se exponham as regras de um jogo estudado nas aulas e qual a estratégia que se poderá seguir para obter um bom resultado nesse jogo.

Prova II — análise de algumas posições simples de jogos (com poucas peças ou numa posição do jogo já perto do final), explicando como se poderia lidar com elas.

6 Bibliografia / Outros Recursos

GUZMÁN, M. de (1984). *Juegos Matemáticos En La Enseñanza*, Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Santa Cruz de Tenerife, 10-14 Septiembre 1984.
<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm>

Este texto é de leitura importante para todos os professores de Matemática (e não apenas para os que vão leccionar este módulo). Contém uma visão abrangente profunda da importância dos jogos para a aprendizagem da Matemática, além de várias indicações sobre como eles podem ser usados; o autor propõe ainda uma heurística adequada à exploração dos jogos.

GUZMÁN, M. de (1990). *Aventuras Matemáticas*, Lisboa: Gradiva.

GUZMÁN, M. de (1991). *Contos com contas*, Lisboa: Gradiva.

O segundo livro contém explicações interessantes sobre o jogo do solitário, o jogo de NIM e o da rã saltadora.

JOÃO PEDRO NETO, JORGE NUNO SILVA (2004). *Jogos Matemáticos, Jogos Abstractos*, Lisboa: Gradiva

ANTÓNIO JÚLIO CÉSAR DE SÁ (1995). *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*, Lisboa: APM.

JOÃO RINO (2005). *O jogo, interações e Matemática*, Lisboa: APM.

ANTÓNIO SÁ ET AL. (2004). *Jogos do Mundo*, Lisboa: APM

Jogos de todo o mundo, a sua história e respectivas regras.

Centro de Competência "Entre Mar e Serra" (2003). *O Ouri e o Desenvolvimento do Pensamento Matemático*.

<http://ouri.ccems.pt/>

Tudo o que precisa de saber para começar a jogar o Ouri.

ELÍSIO SANTOS SILVA (1994). *O OURI um jogo cabo-verdiano e a sua prática em Portugal*. APM: Lisboa.

ELÍSIO SANTOS SILVA (1995). *Jogos de quadrícula do tipo Mancala com especial incidência nos praticados em Angola*. Instituto de Investigação Científica Tropical: Lisboa.

O Ouri é um jogo de tabuleiro muito praticado em Cabo Verde e com profundas raízes na tradição e cultura popular de todo o arquipélago. Juntamente com o Ouri vêm outros jogos, que embora pareçam ser muito simples, requerem cálculo, reflexão e muita prática dado ser necessário prever lanços, não bastando saber as regras.

PARELMAN, Y. (1992). *Matemáticas recreativas*. Lisboa: Litema.

Um clássico, onde se pode ver, por exemplo, uma discussão simples da fundamentação matemática do jogo do 15.

GARDNER, M. (1990). *Ah, descobri!*. Lisboa: Gradiva.

GARDNER, M. (1991). *Matemática, magia e mistério*. Lisboa: Gradiva.

GARDNER, M. (1992). *Rodas, vida e outras diversões matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

GARDNER, M. (1993). *Ah, apanhei-te!*. Lisboa: Gradiva.

GARDNER, M. (1994). *O festival mágico da matemática*. Lisboa: Gradiva.

GARDNER, M. (2002). *As últimas recreações*. Lisboa: Gradiva.

Quem não leu pelo menos um livro de Martin Gardner não pode dizer que sabe Matemática.

LOYD, SAM (1998). *100 Puzzles matemáticos*. Lisboa: Publicações Europa-América.

LOYD, SAM (1998). *Mais Puzzles matemáticos*. Lisboa: Publicações Europa-América.

BAIFANG, L. (1994). *Puzzles com fósforos*. Lisboa: Gradiva.

BOLT, B. (1992). *Mais actividades matemáticas*. Lisboa: Gradiva.

GUIK, E. (1989). *Jogos Lógicos*. Moscovo: Mir.

PÁGINAS COM JOGOS

Actividades e Recursos: Jogos

<http://www.apm.pt/apm/Actividades/actividadesj.htm>

APM – Matemática e Jogo

<http://www.apm.pt/mj/index1.html>

Jogos antigos

<http://www.jogos.antigos.nom.br/default.asp>

Ludicum.org

<http://ludicum.org/>

Magia dos números

<http://nautilus.fis.uc.pt/mn/>

Mathematical Trick Index (em inglês)

<http://www1.superb.net/~cardtric/tricks/math.htm>

Giochi e matematica ricreativa (em italiano)

<http://www.math.it/>

Récréomath (em francês)

<http://www.recreomath.qc.ca/index.htm>

Math Games (em inglês)

<http://www.coolmath4kids.com/mathetcmain.html>

Mathematical games and recreations (em inglês)

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Mathematical_games.html#62

JOGOS QUE SE PODEM JOGAR NA INTERNET

Há muitos pelo que aqui apenas se apresenta uma pequeníssima selecção:

Bantumi: http://woody.drakenet.de/bantumi_1_.swf

Jogos da RekenWeb: <http://www.fi.uu.nl/rekenweb/pt/>

Juegos de Lógica y Estrategia: <http://juegosdelogica.net/>

Jogo do L: <http://www.divulgamat.net/weborriak/RecursosInternet/Juegos/1004.asp>

Dots (pontos e quadrados): <http://games.yahoo.com/games/login2?page=dt>

Fiver: <http://www.mathsyear2000.org/games/fiver/>

Jogo do caos:

<http://www.shodor.org/interactivate/activities/chaosgame/>

<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/chaos-game.html>

<http://math.bu.edu/DYSYS/applets/fractalina.html>

MÓDULO B6

Padrões Geométricos

Duração de Referência: **36 horas**

1 | Apresentação

Na formação geral dos cidadãos e, em especial, para os que se dedicam a algumas profissões, a observação de representações no património construído, na decoração e nos artefactos do quotidiano é fundamental até para a atribuição de valor de gosto e para a compreensão da geometria como ciência estruturante do gosto. A descoberta de regularidades e padrões nas observações e a capacidade de os reconstruir a partir de elementos fundamentais são competências muito importantes.

Os estudantes deste módulo já tiveram contacto com um ensino da Geometria que lhes desenvolveu a intuição geométrica e o raciocínio espacial, para além de os ter ajudado a explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usando e aplicando a Matemática.

É preciso agora que desenvolvam competências geométricas de visualização e classificação das regularidades e padrões e das transformações geométricas, ao mesmo tempo que vão realizando actividades, com papel e instrumentos de desenho e corte ou recorrendo a programas de geometria dinâmica e computadores, cujo resultado deve consistir em materiais físicos palpáveis, úteis para outras disciplinas e para portefólio pessoal com vista a afirmação na vida profissional.

A leccionação deste módulo deve levar em conta as aprendizagens realizadas noutras disciplinas, particularmente naquelas onde há trabalho de desenho técnico ou de qualquer tipo de representações geométricas.

2 | Competências Visadas

Neste módulo de Padrões Geométricos, a competência matemática de visualização e composição que todos devem desenvolver inclui os seguintes aspectos:

- a sensibilidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a predisposição para identificar transformações geométricas e a sensibilidade para relacionar a geometria com a arte e a técnica;
- a predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na concepção e elaboração de materiais para comunicação;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, identificando regularidades e padrões, bem como transformações geométricas com elas relacionadas;
- a aptidão para reconhecer a geometria das transformações em grandes obras da humanidade, reconhecendo ao mesmo tempo o génio dos autores de obras que representam demonstrações por exaustão de casos;

- aptidão para reconstruir exemplos de simetrias e outras transformações, aplicando-as a novas situações de decoração ou outras.

3 | Objectivos de Aprendizagem

Neste módulo de Padrões Geométricos, os objectivos de aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam, são os seguintes:

- reconstruir em modelos (maquetes ou desenhos), com recurso a medições e escalas, padrões como elementos decorativos;
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados, como prática para apresentação de artes finais;
- identificar as vantagens do uso de transformações geométricas;
- identificar em elementos decorativos de artesanato ou de produtos industriais algumas transformações geométricas;
- reconhecer as vantagens no trabalho (de design ou outro) do recurso a computadores e programas de geometria dinâmica;
- reconhecer a importância das transformações geométricas na actualidade da produção de arte decorativa e na história do património artístico da região.

4 | Âmbito dos Conteúdos

1. Identificação de simetrias em tapetes, ou noutras decorações planas ou no espaço:
 - estudo de padrões geométricos planos (frisos) e das pavimentações regulares com identificação das transformações neles envolvidas;
 - estudo de problemas de empacotamento e composição e decomposição de figuras tridimensionais, com identificação das transformações geométricas neles envolvidos, com particular incidência nas simetrias do cubo.
2. Estudo e reconstrução de aspectos geométricos, usando programas de geometria dinâmica, de exemplares do património artístico histórico, a partir de um motivo mínimo:
 - abordagem de um problema histórico, ou de um estilo de elementos decorativos e sua ligação com a História da Geometria.

5 | Situações de Aprendizagem / Avaliação

O professor deve propor actividades de observação de exemplares de arte decorativa e de reconstrução e manipulação de modelos ligados a exemplares históricos. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Não interessa dar a conhecer problemas históricos sem propor ao estudante a reconstrução de pelo menos um, usando material de desenho e corte ou programas computacionais adequados. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria em especial dos exemplares das civilizações ligadas à Ibéria e à História de Portugal, incluindo o período da expansão.

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de reconstruções concretas e de actividade de concepção e elaboração de novos objectos.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve ser aproveitado noutros módulos. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

Estão previstas seis horas para avaliação sumativa final; o referencial recomendado é que seja constituída por duas provas, com igual peso, que a seguir se enumeram.

Prova I — uma prova de desenho de um objecto obedecendo a transformações escolhidas sobre um motivo pré-estabelecido com a duração de noventa minutos.

Prova II — apresentação oral de um objecto, escolhido e preparado pelo estudante, de entre um dos que realizou durante a aprendizagem deste módulo e que deve ser significativo num seu portefólio profissional. O professor deve acompanhar de forma especial esta prova (orientando o trabalho do estudante e apresentando propostas de reformulação se necessário). As quatro horas e meia previstas para esta prova são para as actividades de acompanhamento, reformulação, eventual correcção e apresentação final.

6 | Bibliografia / Outros Recursos

LOUREIRO, C. (coord.), FRANCO DE OLIVEIRA, A., RALHA, E. E BASTOS, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10º ano de escolaridade*. Lisboa: ME — DES.

Esta brochura, editada pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática (1997), contém numerosas sugestões relevantes para o presente programa, pelo que é de consulta indispensável.

VELOSO, EDUARDO (1998). *Geometria - Temas actuais — Materiais para professores*. (Desenvolvimento curricular no Ensino Secundário;11). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Este texto é uma ferramenta indispensável para qualquer pessoa que queira ensinar seriamente Geometria em Portugal. É uma obra que cobre inúmeros temas de Geometria elementar (e menos elementar) e contém um manancial de sugestões de trabalho para abordar os diferentes aspectos da Geometria. São de salientar os muitos exemplos de História da Matemática que ajudam a perceber a importância que a Geometria desempenhou na evolução da Matemática, ao mesmo tempo que fornecem excelentes exemplos para uso na sala de aula ou como proposta de trabalho para clubes de matemática ou ainda para estudantes mais interessados. É altamente recomendável a leitura do capítulo I que foca a evolução do ensino da geometria em Portugal e no resto do mundo e ajuda a perceber a origem das dificuldades actuais com o ensino da Geometria. A tecnologia é usada de forma "natural" para "resolver - ou suplementar a resolução - de problemas, proceder a investigações, verificar conjecturas, etc."

AGUIRREGABIRIA, J. M. (1987). *Taller de Sabios*. Madrid: Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.

GRICHLLOW, K. (1998). *Islamic Patterns. An Analytical and Cosmological Approach*. London: Thames & Hudson.

Módulo B6: Padrões Geométricos

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

GRUPO DE TRABALHO T3-PORTUGAL APM. (1999). *Geometria com o Cabri-Géomètre*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

JUNQUEIRA, M.; VALENTE, S.. (1998). *Exploração de construções geométricas dinâmicas*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades para utilização na sala de aula, com um programa de Geometria Dinâmica, mas que é facilmente adaptado para qualquer outro programa do mesmo tipo.

APM. (1997). *Actividades com Padrões*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades e bibliografia.

APM. (2000). *Pasta de actividades - Pavimentações*. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas de actividades experimentadas num Círculo de Estudos, desenvolvendo conexões da geometria com outras áreas.

GERDES, P. (2003). *Cestaria e Geometria na Cultura Tonga de Inhambane*. Maputo: Moçambique Editora.

Esta publicação contém numerosos exemplos dos padrões dos sipatsi e exemplos de exploração educacional e matemática desses padrões.

GERDES, P. (2000). *Lusona - Recreações Geométricas de África*. Lisboa: Texto Editora.

Este livro contém problemas geométricos baseados em desenhos tradicionais dos Tchoukwe de Angola - os (lu)sona.

COXFORD, A. (1993). *Geometria a partir de múltiplas perspectivas*. Lisboa: APM.

GRUNBAUM, B., Shepard, G. (1987) *Tilings and Patterns*. New York

LOFF, Dina (1991) *Polígonos e Pavimentações - Uma Abordagem Elementar*. Coimbra: SPM.

MARTIN, G. (1982). *Transformation Geometry, An Introduction to Symmetry*. New York: Springer Verlag.

ATRACTOR: Simetrias

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

PROJECTO MATEMÁTICA EM ACÇÃO: Vídeos

1. O Teorema de Pitágoras, 2. Semelhanças, 3. O Túnel de Samos

http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes, e estes três relacionados directamente com a Geometria Elementar podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.

Religious Beliefs Made Visual: Geometry and Islam

<http://www.askasia.org/frclasrm/lessplan/I000030.htm>

Metropolitan Museum: Esta página é um plano de aula sobre padrões islâmicos, precisamente.