

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA

10º, 11º e 12º ANOS

Programa

1995

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
FINALIDADES.....	3
OBJECTIVOS GERAIS.....	4
CONTEÚDOS.....	5
ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA.....	8
RECURSOS.....	10
AVALIAÇÃO.....	13
GESTÃO DO PROGRAMA.....	14
ACTIVIDADES COMPLEMENTARES.....	15
QUADRO RESUMO.....	16
Distribuição dos temas em cada ano.....	16
DESENVOLVIMENTO DOS TEMAS E INDICAÇÕES METODOLÓGICAS.....	17
10º ANO.....	18
Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I.....	18
Tema II - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.....	20
Tema III - Estatística.....	22
11º ANO.....	25
Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II.....	25
Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I - Funções racionais e com radicais. Taxa de variação /Derivada.....	27
Tema III - Sucessões.....	29
12º ANO.....	31
Tema I - Probabilidades e Combinatória.....	31
Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial II.....	33
Tema III - Trigonometria e Números Complexos.....	35
TEMA GERAL:	
Lógica e Raciocínio Matemático.....	36

INTRODUÇÃO

A Lei de Bases do Sistema Educativo, aprovada em Outubro de 1986, obrigava a uma reforma do sistema de ensino e definia princípios e orientações básicas para uma reorganização dos planos curriculares dos ensinos básico e secundário. A Comissão de Reforma do Sistema Educativo encarregou-se de interpretar as orientações curriculares da Lei de Bases, tomando as opções curriculares fundamentais, no que respeita aos critérios de selecção das matérias curriculares e aos princípios orientadores da estrutura curricular. Ficou definida então a configuração da educação secundária, nos seus objectivos, organização estrutural e plano de estudos. Neste quadro geral, a Matemática aparece como disciplina da Formação Específica de vários agrupamentos a que é atribuída uma carga horária semanal de 4 horas em cada um dos anos do ensino secundário. Assim é publicado em forma de lei, em 1989.

É neste quadro que é elaborado o programa do ensino secundário de Matemática, com uma primeira aplicação experimental em algumas escolas e depois, desde 1993, com aplicação generalizada em todas as escolas do país.

Se durante a aplicação experimental do programa surgiram dificuldades de concretização, mesmo contando com cargas horárias excepcionais, a generalização da sua aplicação em todas as escolas multiplicou essas dificuldades e deu-lhes uma visibilidade nacional que o quadro da experiência, pela sua própria natureza, não podia ter dado. Ao segundo ano da generalização, o volume dos problemas tornou clara a necessidade de proceder a ajustamentos desse programa. Este ajustamento não vem constituir um novo programa. Procurando preservar os objectivos da renovação do ensino da matemática, este ajustamento pretende estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos, explicitar a articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos, reforçar a articulação vertical com o 3º ciclo do ensino básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares.

Porque uma das principais dificuldades dos professores nas escolas e um dos principais problemas residia na extensão do programa, o ajustamento do programa considerou também a exclusão de itens de conteúdo que a experiência mostrou constituírem sobrecarga e impedimento para que aos alunos fosse dado acesso a temas fundamentais e fundadores.

O programa ajustado, agora aprovado, foi elaborado sobre uma base de relatos de experimentadores e professores e de pareceres de professores e especialistas em Matemática e no ensino da Matemática, que, em vários momentos, foram chamados para se pronunciarem individual ou institucionalmente sobre os problemas e as versões de propostas de ajustamento. Foram consultadas e participaram as escolas do ensino superior e do ensino secundário público e privado, sociedades científicas, associações de professores e instituições. Também os autores dos programas de Matemática e de Física foram consultados e participaram, a esse nível, no desenvolvimento do trabalho deste ajustamento do programa.

Os fundamentos do programa - finalidades, objectivos gerais, orientações metodológicas - permanecem sem alterações ou com alterações de pormenor. Assim também aconteceu com a explicitação dos recursos necessários à leccionação da Matemática, em que se procurou fazer simples adequações à evolução tecnológica, particularmente relativas à emergência das calculadoras com capacidades gráficas, que mantendo as capacidades das

calculadoras científicas, bem como a portabilidade e o preço, vêm permitir novas e significativas aprendizagens que, até há pouco tempo, só eram possíveis com o uso de computadores.

No que respeita à organização dos temas e ao seu desenvolvimento, bem como às metodologias utilizadas, há alterações significativas, não só porque foram excluídos alguns conteúdos de cada tema, mas principalmente porque foram organizados de outro modo no sentido de possibilitar e encorajar a abordagem temática. Ao mesmo tempo pretende-se desencorajar o aprofundamento deslocado deste ou daquele conteúdo por exercícios e técnicas rotineiros que, muitas vezes, foram e são tomados como único meio de consolidar aprendizagens.. Foram retirados todos os capítulos facultativos enquanto tal, embora se mantenham alguns itens assinalados com (*) que podem ou não ser leccionados.

Neste ajustamento, as questões de Lógica, Teoria de Conjuntos e de formas de raciocínio foram retirados do corpo do programa e passam a estar referidas como tema à parte, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem científica sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. Neste tema, para além das questões clássicas de lógica, teoria dos conjuntos e raciocínio demonstrativo, introduzem-se também itens integradores dos diversos tipos de raciocínio científico e formas de organizar o pensamento e as actividades de resolução de problemas. Estes assuntos podem e devem ser abordados com os alunos do ensino secundário, mas com oportunidade e virados para necessidades sentidas de racionalizar, melhorar ou dar organização a métodos pessoais, ou como suporte de momentos de reflexão sobre a natureza do conhecimento.

Em muitos aspectos, a organização dos temas e as indicações metodológicas integram informações sobre oportunidade de abordar questões sobre a experimentação no ensino da matemática, de lógica e raciocínio, de história da matemática mas também informações sobre novos tipos de instrumentos de avaliação. As indicações sobre avaliação devem ser, pois, procuradas não tanto no pequeno texto sob esse título, mas mais no corpo do programa, nos diversos elementos de trabalho sugeridos.

FINALIDADES

São finalidades da disciplina no ensino secundário:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade

OBJECTIVOS GERAIS

São objectivos gerais da disciplina no ensino secundário:

VALORES/ATITUDES

**CAPACIDADES/APTID
ÕES**

CONHECIMENTOS

Desenvolver a confiança em si próprio:

- Expressar e fundamentar as suas opiniões.
- Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios.
- Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade.
- Procurar a informação de que necessita.

Desenvolver interesses culturais:

- Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa.
- Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas.
- Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.

Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:

- Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada.
- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.

Desenvolver o sentido da responsabilidade:

- Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas.
- Avaliar situações e tomar decisões.

Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação:

- Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades.
- Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças.
- Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere.

Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:

- Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
- Seleccionar estratégias de resolução de problemas.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Interpretar e criticar resultados no contexto do problema.
- Resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas, ...

Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:

- Descobrir relações entre conceitos de Matemática.
- Formular generalizações a partir de experiências.
- Validar conjecturas.
- Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.
- Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade.

Desenvolver a capacidade de comunicar:

- Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.
- Interpretar textos de Matemática.
- Expressar o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens.
- Usar correctamente o vocabulário específico da Matemática.
- Usar a simbologia da Matemática.
- Apresentar os textos de forma clara e organizada.

Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo:

- Aperfeiçoar o cálculo em I R e usar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.
- Operar com expressões racionais, irracionais e exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
- Resolver equações, inequações e sistemas.
- Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.

Ampliar os conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço:

- Resolver problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço, por via intuitiva e analítica.
- Utilizar vectores no estudo do plano e do espaço, em referencial ortonormado.
- Compreender e utilizar noções básicas de cónicas.

Iniciar o estudo da Análise Infinitesimal:

- Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos.
- Estudar sucessões definidas de diferentes formas.
- Aplicar conhecimentos de Análise Infinitesimal no estudo de funções de variável real.

Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades:

- Interpretar e comparar distribuições estatísticas.
- Resolver problemas de contagem.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade.

Conhecer aspectos da História da Matemática:

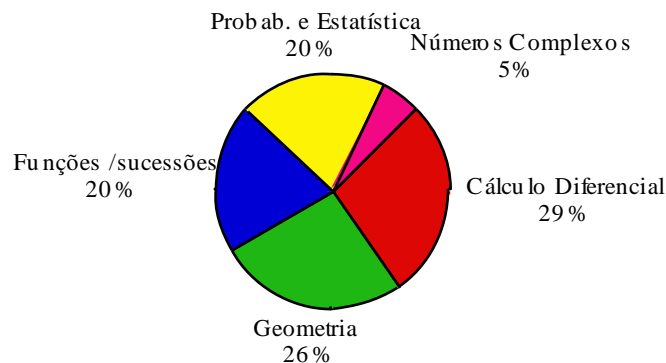
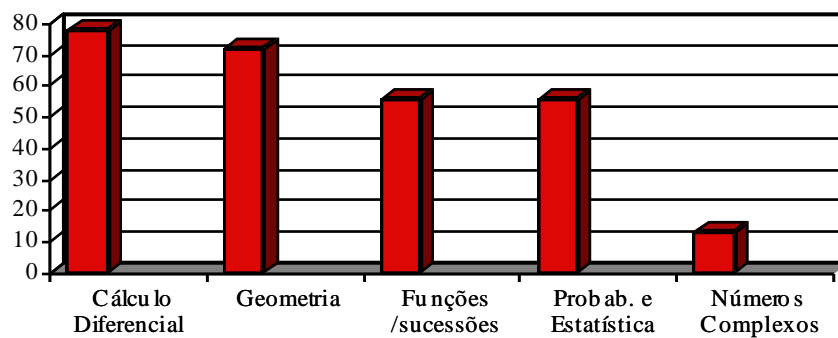
- Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social.

CONTEÚDOS

A escolha dos temas foi feita tendo em conta os conteúdos presentes no anterior programa e a preocupação de algum equilíbrio entre áreas diversas da Matemática. Os quadros seguintes mostram que existe um grande equilíbrio entre as quatro grandes áreas seleccionadas:

- Cálculo Diferencial
- Geometria (no plano e no espaço)
- Funções e sucessões
- Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística

10º, 11º e 12º anos



A quantidade de temas curriculares, a sua extensão e profundidade foi substancialmente diminuída em relação a programas anteriores, parecendo exequível a sua leccionação; uma maior diminuição poderia conduzir a uma deficiente formação dos alunos do ensino secundário.

Os temas clássicos de Análise, Álgebra e Geometria estão presentes nestes conteúdos, embora o segundo se encontre dividido pelos outros temas. Esta classificação deve ser considerada de forma muito relativa, pois, no corpo do programa, assumem importância significativa não só técnicas específicas, mas estratégias que, constituindo uma base de apoio que os alunos utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessam o programa de forma transversal. Referimo-nos a

- Resolução de Problemas
- Modelação Matemática
- Lógica e Raciocínio Matemático
- Tecnologia e Matemática

- História da Matemática

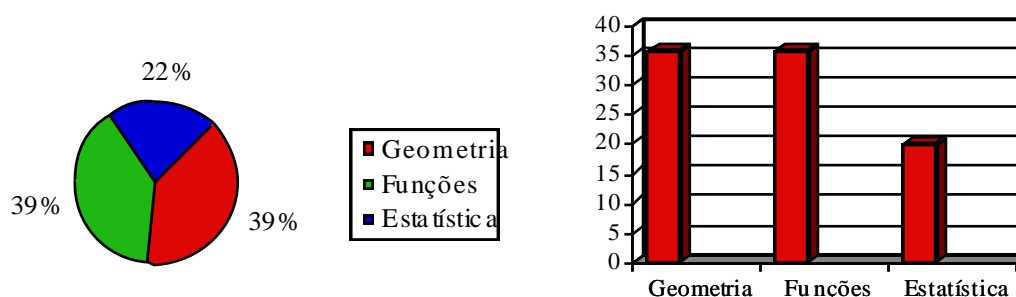
sendo de difícil quantificação, mas não sendo por isso menos importantes que os temas antes referidos.

Além do mais o estudo dos diversos temas está integrado tanto quanto possível sendo estabelecidas um grande número de conexões, para que os alunos possam ver que são aspectos complementares de uma mesma realidade. Foi dada uma posição de destaque à Geometria por ser o tema tratado em primeiro lugar tanto no 10º como no 11º anos e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas do Ajustamento. Deu-se prioridade à criação de condições para uma grande diversidade de tipos de trabalho em Matemática, tanto de carácter geral como específicos de cada tema, em detrimento de um aprofundamento que na maioria das vezes é ilusório se não for cimentado na compreensão dos processos elementares.

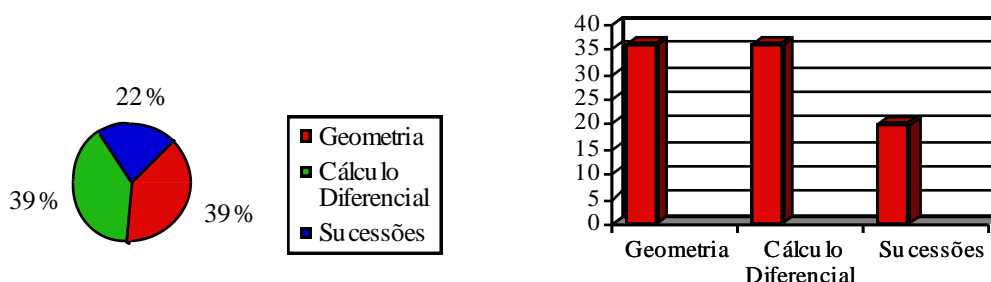
Nos temas de Geometria procura-se um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva com a Geometria Analítica, de modo a desenvolver tanto o raciocínio geométrico directo como a resolução de problemas de geometria por via algébrica, sem esquecer o desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

Existe ainda um equilíbrio entre os diversos temas a nível de cada um dos anos de escolaridade, como se pode observar nos quadros seguintes:

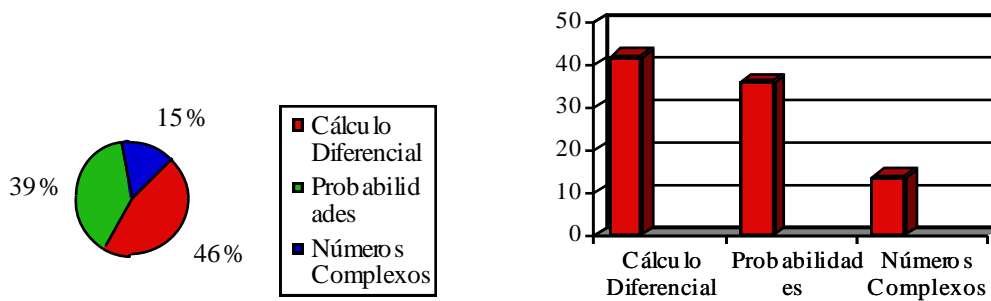
10º ano



11º ano



12º ANO



O estudo do Cálculo Diferencial é precedido de um tema em que se estudam as propriedades elementares das funções e seu gráficos, dando oportunidade a que os alunos se familiarizem com este tópico fundamental da matemática actual. No estudo do Cálculo Diferencial dá-se prioridade ao trabalho com a noção de derivada, sendo deixada a formalização da definição de limite para uma fase posterior. Ao contrário dos programas anteriores, a noção de limite é visada primeiro de forma apenas intuitiva; em seguida é formalizada no tema de sucessões, sendo mais tarde generalizada para funções quaisquer (via definição de Heine).

ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

As finalidades e objectivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:

- o desenvolvimento de atitudes;
- o desenvolvimento de capacidades;
- a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.

Tendo como pressuposto ser o aluno agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que

- os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação.

Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individual e de grupo (a realizar dentro e fora da aula), assim como o espaço para a sua intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação ...

O programa pretende dar continuidade, sem brusca mudança de nível, às aprendizagens realizadas no 3.º ciclo, agora coincidente com o ensino obrigatório, ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos alunos. Parte-se, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o aluno aceda gradualmente à formalização dos conceitos. São identificadas situações para estabelecer conexões entre os diversos temas de forma a proporcionar uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática.

A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, pretende preparar os alunos para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica.

Capacidade de utilizar a Matemática

A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, nomeadamente a propósito do estudo da Estatística e das Funções, constituem uma oportunidade de abordar o método científico.

A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geografia, ...

Raciocínio dedutivo

No ensino secundário, o aluno será solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas.

Noções muito elementares de Lógica serão introduzidas à medida que se revelem úteis à clarificação de processos e de raciocínios.

A Axiomática das Probabilidades (muito simplificada) visa dar aos alunos alguma cultura sobre a construção hipotético-dedutiva de uma Ciência. Alguns problemas de Geometria no Espaço podem ser excelentes oportunidades para praticar o raciocínio dedutivo.

Comunicação

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O aluno deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, cada vez mais, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese.

Esta evolução decorrerá naturalmente da necessidade de comunicar aos outros as suas ideias.

É necessário proporcionar ao aluno oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo.

Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

Perspectiva histórico-cultural

Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção. Proporcionam também excelentes oportunidades para pesquisa de documentação.

A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura.

Papel do professor

Na concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa.

Assume, neste nível de ensino, importância fundamental o contrato pedagógico a estabelecer com o aluno, na negociação e definição de consensos para os projectos de trabalho, na participação activa e responsável na gestão do processo ensino-aprendizagem.

A valorização da vertente formativa da disciplina, só pode ser alcançada fomentando uma atitude positiva do aluno face à Matemática.

RECURSOS

A didáctica prevista para a Matemática no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor);
- Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico...);
- Quadro quadriculado e papel milimétrico;
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- Livros para consulta e manuais;
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...). Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...);
- Calculadoras gráficas com possibilidade de introdução de um ou dois pequenos programas;
- Computador.

É considerado indispensável o uso de

- calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador e que apresentam uma sofisticação crescente e preços cada vez mais acessíveis (para demonstrações com todos os alunos, calculadora com "view-screen");
- um computador ligado a um "data-show" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo.

Deve tender-se para a constituição nas Escolas Secundárias de Laboratórios de Matemática que integrem estes recursos e outros que se venham a revelar necessários.

Tecnologia

Nos *objectivos gerais* indica-se que o aluno deve ser capaz de:

- “Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos”(conhecimentos)
- “Expressar o mesmo conceito em diversas formas e linguagens” (capacidades/aptidões)
- “Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução” (capacidades/aptidões)
- “Formular generalizações a partir de experiências” (capacidades/aptidões)

Não é possível atingir estes objectivos sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os alunos traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores).

Não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas, uma vez compreendidos os processos de cálculo envolvidos, os alunos devem saber tirar partido da tecnologia para os cálculos mais laboriosos. Na expressão feliz de Miguel de Guzmán, os alunos devem ser preparados para um "diálogo inteligente com as ferramentas que já existem".

O uso de tecnologia facilita ainda uma participação activa do aluno na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no "*Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*" que "haveria muitíssimo a lucrar em que

o ensino ... fosse ... tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo".

O aluno deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia e, caso haja tempo, pode ser referido o problema da máquina de Turing, tal como o faz Ian Stewart quando aborda os limites da computabilidade no seu livro "*Os problemas da Matemática*".

Uso de calculadoras gráficas

Hoje já estão muito difundidas e a preços acessíveis as calculadoras gráficas que, além de serem também calculadoras científicas completíssimas, possuem capacidades de programação numa linguagem elementar, têm funções estatísticas e traçam gráficos estatísticos. Isto é, realizam todas as funções das calculadoras científicas e têm uma dimensão gráfica que nelas não estava presente.

As calculadoras gráficas, que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa.

Tal como indica Bert Waits no seu texto "*The Power of Visualization in Calculus*" (1992) e tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, devem ser explorados com a calculadora gráfica os seguintes dez tipos de actividade matemática:

- Abordagem numérica de problemas;
- Uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- Uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- Modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- Uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- Uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- Condução de experiências matemáticas, concepção e testagem de conjecturas;
- Estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- Antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- Investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os alunos devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os alunos descrevam os procedimentos utilizados e aquilo que se lhes apresenta. Não é de admitir o uso da calculadora gráfica desligado de quaisquer considerações teóricas.

A calculadora vai permitir que se trabalhe com um muito maior número de funções em que diversas características, como os zeros e os extremos, não se podem determinar de forma exacta; estas funções são importantes pois aparecem no contexto da resolução de problemas aplicados. É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre treinando os alunos na confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos.

Com os cuidados referidos, e como experiências em Portugal e noutros países mostram, a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática.

Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa.

Segundo estatísticas recentes, existem em Portugal em média 20 computadores por Escola Secundária. Estes computadores devem também estar ao serviço da disciplina de Matemática.

Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível.

Vários tipos de programas de computador são úteis e enquadram-se no espírito do programa. Programas de Geometria como o *Cabri-Géomètre*, de Cálculo Numérico e Estatístico com uma **Folha de Cálculo**, de Gráficos e demonstração como o *Funções* (Vitor Teodoro - editado pelo *ex-GEP*, disponível, tal como outros, no *DEP-GEF*), o *MicroCalc* (Harley Flanders), de Álgebra Computacional como o *DERIVE* ou o *Mathematica*, ou de simulação como os da série *Soft-Ciências* (editados pelas *SPF*, *SPQ* e *SPM*), fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a alunos. Outros programas começam igualmente a aparecer no mercado português.

Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os alunos poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional, além do partido que o professor deve tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um “data-show” com retroprojector.

O trabalho com computadores deverá ainda ser explorado e desenvolvido em todos os trabalhos da *Área Escola* em que tal se proporcionar e ainda nas disciplinas de Informática constantes do currículo (como a *Introdução às Tecnologias da Informação*), em ligação com a disciplina de Matemática.

AVALIAÇÃO

A avaliação deve ter em conta dois dados fundamentais.

- A nível do Ensino Secundário existirão sempre um certo número de provas de âmbito nacional ou regional. Por um lado o professor deve ter em conta na sua avaliação a existência destas provas (realizando provas de estilos diversificados, incluindo por exemplo algumas questões de escolha múltipla, que preparem os alunos para enfrentar os momentos de avaliação global), mas por outro lado deve dessacralizá-las pois a verdadeira preparação para essas provas é feita trabalhando com regularidade e afinco ao longo do ano.
- O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que *cerca de metade* seja feita usando outros instrumentos que não testes clássicos. Os testes escritos em si mesmos poderão ter aspectos muito positivos se a sua utilização for ponderada com outros elementos de avaliação. Só assim se poderão testar outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no ensino secundário. Em particular recomendamos fortemente que em cada período um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática (sob a forma de resolução de problemas, demonstrações, composições/reflexões, projectos, relatórios, notas e reflexões históricas, etc) que reforce a importante componente da *comunicação matemática* (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou da participação na Área-Escola). No corpo do programa aparecem muitas referências que poderão propiciar este tipo de avaliação.

GESTÃO DO PROGRAMA

É indispensável que o professor, além de conhecer bem o programa de cada ano que vai leccionar, tenha um conhecimento global do programa do ensino secundário, bem como uma perspectiva integradora dos programas dos ciclos do ensino básico.

O professor deve prever, desde o início do ano, momentos para o desenvolvimento de trabalhos individuais, trabalhos de grupo, trabalhos de projecto e actividades investigativas.

O programa de cada ano desenvolve-se por três grandes temas. O professor deve aproveitar todas as ligações entre os temas em cada ano e de cada ano com os anos anteriores, por forma que o aluno encare a Matemática como um todo integrado e não como um conjunto fragmentado em temas, ao mesmo tempo que possibilita a ampliação e consolidação de cada conceito, sempre que ele é retomado.

Inicia-se o 10º ano com o estudo da Geometria no Plano e no Espaço, porque a Geometria é, por excelência, um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela resolução de problemas apropriados desenvolve variadas capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo que deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da Álgebra à Análise e à Estatística. É por isso que é tão importante, desde o início, trabalhar com a Geometria, tentando superar algumas (não todas necessariamente) eventuais dificuldades ou lacunas que os alunos tragam dos ciclos anteriores. Começar por este tema permite o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação através de figuras que tão necessárias são para o estudo de todos os outros temas.

Os conteúdos de Estatística já abordados no terceiro ciclo do ensino básico permitem resolver as situações que os alunos podem ter de enfrentar em projectos suscitados pela *Área Escola*. Mas cabe ao professor decidir se é ou não oportuno aproveitar o tema de cada projecto em desenvolvimento e antecipar o estudo do tema de Estatística do 10º ano ou para o leccionar sobre um molde de trabalho de projecto.

Sempre que o professor detectar nos alunos lacunas inultrapassáveis em temas de ciclos anteriores, deve desencadear mecanismos de remediação, como os previstos apoios pedagógicos acrescidos.

Em cada tema é importante encontrar-se um equilíbrio entre o desenvolvimento significativo dos conceitos, capacidades e aptidões e o domínio do cálculo. Do mesmo modo, a introdução da lógica, da linguagem matemática e simbólica, das formas de raciocínio científico (matemático e outros) deve aproveitar todas as oportunidades, impregnar o quotidiano da aprendizagem matemática, sem se transformar num conteúdo com valor em si mesmo. O grau de formalismo deve sempre ter em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível como necessidade, depois de o professor ter a certeza que o aluno apropriou verdadeiramente o conceito. Outro cuidado tem a ver com o uso da tecnologia: é preciso ter sempre presente que a "tecnologia" em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu uso.

Para cada tema indica-se uma previsão do número de aulas necessárias à sua abordagem na leccionação. Não sendo mais do que uma previsão, essa indicação deve ser encarada com flexibilidade, sem prejuízo do peso relativo e da profundidade do tratamento desejado que o número de aulas previsto indicia. O professor deve ter como preocupação fundamental abordar e desenvolver, em cada ano, os variados tópicos do programa, pois

eles fornecem métodos matemáticos diversificados e desempenham funções diferentes todas imprescindíveis para, em conjunto, contribuírem para a formação integral do cidadão autónomo e livre. Nunca se deve valorizar um conteúdo de tal forma que se possa prejudicar irremediavelmente a formação em algum dos grandes temas ou no desenvolvimento de alguma das capacidades/aptidões reportadas na redacção das finalidades e dos objectivos gerais deste programa de ensino.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARES

Recomenda-se que os professores desenvolvam as seguintes actividades complementares, em estreita ligação com os objectivos definidos para a disciplina de Matemática:

a) A **participação na Área Escola deve envolver sempre uma componente matemática**, como por exemplo: recolha de dados e sua análise estatística, elaboração de gráficos a partir de funções conhecidas, estudo ou elaboração de modelos matemáticos simples que se ajustem às situações em estudo, pôr em evidência a contribuição histórica que a matemática deu para o tema em apreço,...

b) O **trabalho desenvolvido na Área Escola deve poder ser um trabalho de base matemática**, em que as outras disciplinas irão dando contribuições conforme as áreas (história, aplicações, filosofia, etc)

c) Deve ser incentivada (mas não forçada) a **participação dos alunos nas Olimpíadas de Matemática**; complementarmente deve ser incentivada a discussão dos problemas que foram sendo propostos ao longo dos anos; devem ser organizadas sessões de resolução de problemas em regime de clube de Matemática, como preparação para as Olimpíadas de matemática ou para simples recreação dos alunos mais interessados; devem ser incentivadas realizações tipo Olimpíadas, desde o **Problema da Semana, da Quinzena,...** até à realização de pequenos torneios escolares (tipo 'rally-paper') ou inter-escolas.

d) Devem ser convidados professores da escola ou exteriores à escola para proferir **pequenas palestras sobre temas relacionados com a Matemática** (explicação de uma descoberta recente como o Último Teorema de Fermat, exploração de um tema histórico, de aplicações da matemática,...)

e) Sempre que existir uma semana cultural na Escola deve haver um lugar para a Matemática, pois a **Matemática também é cultura**. Desde exposição dos trabalhos dos alunos até ao pedido de exposições elaboradas por outras entidades (APM, SPM, Museus da Ciência,...) ou a simulação de congressos científicos em que os alunos apresentam comunicações ou atribuem prémios tipo "Oscar" ou tipo "Nobel" (ou melhor, Medalha Fields), tudo deve ser pretexto para falar da matemática, criar gosto pela Matemática ou fornecer aos alunos outra visão da Matemática.

f) A **Biblioteca da Escola deve ter um número razoável de textos de matemática**. Os textos oficiais (Programas -vários exemplares-, publicações do ex-GEP, do IIE,...), as obras citadas nos programas oficiais, as obras de Sebastião e Silva, os livros da colecção "O prazer da Matemática" da Editora Gradiva, o "Jornal de Mathematica Elementar" e a "Galeria de Matemáticos" do J.M.E., as publicações da APM e da SPM não devem faltar em qualquer biblioteca escolar. Logo que tal seja possível, as Escolas devem fazer-se sócios institucionais da APM e da SPM, para garantir a recepção regular de novas publicações. Livros escolares de outros países (em particular de Espanha, França, Inglaterra, Itália e Estados Unidos) e sobre História da Matemática ("História Concisa da Matemática" de Struik, "História da matemática" de C. Boyer, Ed. Edgard Blücher, "Mathématiques au fil des âges"- Ed. Gauthier-Villars, "Histoire de Problèmes - Histoire des Mathématiques" - Ed. Ellipses dos IREM e "The History of Mathematics - A Reader", Open University) serão um manancial de ideias para trabalhar com os alunos.

QUADRO RESUMO

Distribuição dos temas em cada ano

10º ANO	11º ANO	12º ANO
<p>1. Geometria no Plano e no Espaço I</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço • O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço • Vectores livres no plano e no espaço • Estudo vectorial da recta no plano e no espaço • Equação reduzida da recta no plano 	<p>1 Geometria no Plano e no Espaço II</p> <ul style="list-style-type: none"> • Resolução de problemas envolvendo triângulos • Ângulo e arco generalizados • Funções seno, co-seno e tangente; definição e variação (estudo no círculo trigonométrico) • Equações trigonométricas elementares • Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço • Conjuntos definidos por condições • Equação cartesiana de planos e rectas no espaço. • Intersecção de planos e resolução de sistemas; equações cartesianas da recta no espaço • Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (inter-pretação vectorial) 	<p>1. Probabilid. e Combinatória</p> <ul style="list-style-type: none"> • Introdução ao cálculo de Pro-babilidades • Distribuição de frequências relativas e distribuição de pro-babilidades • Definição axiomática de Pro-babilidades (caso finito) e pro-priedades; definição de proba-bilidade condicionada e sua verificação da axiomática. • Combinatória <ul style="list-style-type: none"> Técnicas de contagem; permutações, arranjos com e sem repetição; pares de um conjunto e combinações sem repetição; propriedades. Triângulo de Pascal. Binómio de Newton. • Aplicações ao cálculo de Pro-babilidades Acontecimentos independentes; O problema das provas repetidas e referência à lei binomial de probabilidade
<p>2. Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal • Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função. • Estudo intuitivo de propriedades das: <ul style="list-style-type: none"> Funções quadráticas; referência à parábola Função módulo Funções definidas por 2 ou mais ramos Funções polinomiais (graus 3 e 4) • Equações e inequações do 2º grau; Inequações com módulos • Decomposição de polinómios 	<p>2. Introdução ao Cálculo Diferencial I- Funções Racionais e Com Radicais. Taxa de variação/Derivada</p> <ul style="list-style-type: none"> • Estudo de propriedades das Funções racionais do tipo $f(x) = a+b/(cx+d)$; referência à hipérbole • (Aproximação experimental da noção de limite) • Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição. • Noção de taxa média de variação; noção de taxa de variação; interpretação geométrica e física. • Determinação da derivada em casos simples; aplicações • Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cú-bicos 	<p>2. Introdução ao Cálculo Diferencial II</p> <ul style="list-style-type: none"> • Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1. Regras operatórias de expo-nenciais e logaritmos. Aplica-ções concretas. • Limite de função segundo Heine; Propriedades operató-rias sobre limites; limites notá-veis; indeterminações. Assimp-totas. • Continuidade Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas • Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de fun-ções elementares. Segunda de-finição do número e Segundas derivadas e concavi-dade. • Estudo de funções em casos simples • Problemas de optimização

3. Estatística

- Objecto e história
- Recenseamento e sondagem
- População e amostra
- Estatística descritiva e Estatística Indutiva
- Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)
- Medidas de localização de uma amostra
- Medidas de dispersão
- Diagramas de "extremos e quartis"
- Referência a distribuições bidimensionais

3. Sucessões

- Introdução ao conceito de sucessão
A suc. como função de variável natural; suc. monótonas; suc. limitadas; progr. aritméticas e geométricas.
- Estudo intuitivo de $(1+1/n)^n$ e primeira definição de e
- Limites:
Infinitamente grandes e infinitesimos; Limites de sucessões e convergência; determinação de limites

3. Trigonometria e Números Complexos

- Funções seno, co-seno e tan-gente; estudo de propriedades; cálculo de derivadas
- Introdução histórica dos números complexos, através dos problemas da resolubilidade algébrica.
- Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.
- Operações
- Domínios planos e condições em variável complexa.

»

n

DESENVOLVIMENTO DOS TEMAS E INDICAÇÕES METODOLÓGICAS

Apresenta-se, para cada ano e para cada grande tema, o desenvolvimento que pretende citar exaustivamente todos os conteúdos obrigatórios e facultativos. Em alguns casos, por se entender necessário um esclarecimento particular referem-se objetivos precisos nesse desenvolvimento dos temas.

Há quem pense que se pode substituir o programa no seu todo pela lista de itens de conteúdo fornecidos no desenvolvimento dos diversos temas. Não é assim.

As indicações metodológicas que acompanham o desenvolvimento dos temas esclarecem as questões estratégicas da metodologia de ensino e do "fazer matemática", definem as formas de abordar os conteúdos, sugerem oportunidades de introduzir outros conceitos e de estabelecer conexões, de utilizar tecnologia, de experimentar, etc, e só por isso são importantes e imprescindíveis partes do programa a par dos conteúdos. Podemos mesmo dizer que a forma de aprender a fazer matemática é um conteúdo do ensino de Matemática.

Para além disso, as indicações metodológicas são importantes e imprescindíveis neste programa e têm de ser seguidas, porque é nelas que se estabelecem em pormenor, para além da forma de abordagem, a profundidade requerida e o rigor exigido nas formalizações dos conceitos e definições, para além do tipo de exercícios e actividades que podem ser propostos aos alunos. Nessas indicações metodológicas aparecem mesmo instruções no sentido de evitar certos tipos de exercícios que, desse modo, são excluídos do programa e não podem ser considerados. A repetição de exercícios rotineiros consome tempo precioso, necessário para a leccionação do programa, é desaconselhada também porque, da sua leccionação, resulta a desqualificação dos conceitos que pretendem consolidar.

Resumindo, cada conteúdo do ensino secundário de Matemática não está mais do que esboçado no desenvolvimento dos temas; para efeitos deste programa, as indicações metodológicas não são simples indicações e concorrem até para a definição dos conteúdos de ensino.

De acordo com o desenvolvimento de cada tema e o grau de profundidade a atribuir à abordagem de cada conteúdo, faz-se corresponder um determinado número de horas à leccionação de cada tema. Embora isso não constitua uma instrução rígida, ela deve ser uma referência obrigatória de planificação e deve limitar a abordagem de cada tema, de modo a que, mesmo com prejuízo do aprofundamento deste ou daquele conteúdo específico, todos os temas sejam abordados com todos os alunos.

As indicações metodológicas, ao sugerir actividades e preocupações a ter, acabam por sugerir diversificação de tipos de instrumentos e de oportunidades de avaliação das aprendizagens.

10º ANO

Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I

(36 aulas)

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no aluno uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no aluno capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita.

O professor deve no início da unidade propor aos alunos actividades que permitam recordar e ampliar os conhecimentos adquiridos no 3º ciclo de modo a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o ensino Secundário.

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço todo o ponto de vista axiomático é excluído devendo a prática com as figuras ter um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar.

A exploração de programas adequados no computador pode ajudar eficazmente o aluno a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço

(.....) Pretende-se que os problemas a propor promovam o desenvolvimento de capacidades de experimentação, raciocínio geométrico e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.)

Alguns tópicos de geometria a considerar em situações concretas na resolução de problemas podem ser por exemplo :

- Modos de definir um plano.
- Propriedades usuais do paralelismo de duas rectas, de dois planos, de uma recta e um plano, assim como as propriedades usuais de perpendicularidade de duas rectas, de uma recta e de um plano.
- Intersecção de sólidos por um plano dado.
- Construção de uma representação da secção obtida.
- Estabelecimento de relações métricas entre figuras, nomeadamente entre medidas lineares, áreas e volumes.

Este tema pode ser introduzido a partir de actividades em que os alunos reflectam na organização do espaço e no modo como algumas propriedades dos seus objectos elementares (pontos, rectas e planos) permitem validar conjecturas.

O professor pode propor ao aluno actividades com poliedros (entre outros, estudar os cinco sólidos de Platão: cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro, dodecaedro). Partindo dos seus modelos podem ser estudadas as propriedades dos polígonos que constituem as suas faces. É importante que os alunos recordem as definições dos triângulos, quadriláteros e polígonos usuais e com base nestas descubram e verifiquem novas propriedades. Os alunos devem ser capazes de desenhar exemplos representativos de cada quadrilátero bem como dos polígonos regulares.

O aluno deve ser levado a reconhecer que quando uma figura do espaço está contida num plano se podem utilizar neste plano todas as propriedades da geometria plana.

Os problemas a propor aos alunos não devem ser numerosos. Devem ser ricos e não se reduzir a propostas fragmentadas. É mais importante um problema bem explorado do que muitos tratados apressadamente.

As actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos e o professor deve insistir para que o aluno exprima correctamente os seus raciocínios, oralmente e por escrito, através de pequenas composições. Também se pretende que os alunos realizem pequenas investigações.

Com os sólidos usuais, pretende-se que o aluno fique a saber desenhar representações planas destes, descrever a intersecção de um desses sólidos por um plano dado e saber construir e desenhar uma representação da intersecção obtida, utilizando as regras da perspectiva cavaleira (o aluno deve começar por modelar a situação por exemplo com sólidos de arestas, com sólidos transparentes ou de qualquer outro modo sugestivo). Devem ser estudadas as propriedades do polígono obtido como secção.

A resolução de problemas numéricos ligados ao cálculo e comparação de distâncias, áreas e volumes em configurações do plano ou do espaço poderá constituir uma oportunidade para o aluno voltar a trabalhar com números irracionais e/ou valores aproximados recorrendo à calculadora. O aluno deve ser estimulado a recorrer ao cálculo mental e à estimativa para confirmar se os valores encontrados são aceitáveis.

% Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Geometria Analítica

- O método cartesiano para estudar geometria no plano e no espaço:
- Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e \mathbb{R}^2 , entre o espaço e \mathbb{R}^3 . Conjuntos de pontos e condições. Distância entre dois pontos. Circunferência, círculo, elipse e mediatriz; Superfície esférica, esfera e plano mediador.
- Vectores livres no plano e no espaço:
- Componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado do plano
- Componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado do espaço.
- Adição de vectores e multiplicação por um escalar; propriedades. Colinearidade de dois vectores
- Soma de um ponto com um vector. Diferença de dois pontos.
- Norma de um vector.
- Coordenadas do ponto médio de um segmento de recta.

- Equação vectorial da recta no plano e no espaço.
- Equação reduzida da recta no plano e equação $x=x_0$.

O professor deve propor ao aluno actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter “as melhores coordenadas” experimentando com várias figuras no plano e no espaço.

Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou a unidade, recorrendo aos modelos já utilizados para fazer aparecer as novas noções (referencial, coordenadas, vectores, ...) levando o aluno a justificar determinadas proposições por mais de um processo. Só mais tarde deve recorrer a desenhos em perspectiva.

No plano, o aluno deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissetriz dos quadrantes ímpares. No espaço, o aluno deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

É importante aproveitar as analogias mas também salientar as diferenças no tratamento analítico do plano e do espaço.

Pretende-se que o aluno deduza propriedades de figuras geométricas (triângulos e quadriláteros) usando vectores e explore a ligação do cálculo vectorial com a Física.

A circunferência, a elipse e a superfície esférica devem ser tratadas essencialmente como lugares geométricos sem a preocupação de fazer múltiplos exercícios que envolvam apenas as suas equações. O mesmo para a mediatriz e o plano mediador.

A equação da elipse obtém-se facilmente a partir da circunferência por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas.

Não devem ser feitos exercícios repetitivos com as equações da recta, da elipse ou da circunferência.

O professor deve incentivar o aluno a fazer em todas as situações uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação não deixando que o aluno se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Além do mais o aluno deve descrever com algum detalhe o processo utilizado, justificando adequadamente.

10º ANO

Tema II - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo (36 aulas)

Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo numérico e gráfico devendo privilegiar o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Geografia ou de outras disciplinas.

Em particular faz-se o estudo detalhado das funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se gráfica e numericamente algumas equações e inequações.

Este tema tem um ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas. Esta ligação é muito importante para todos os que utilizarem matemática. A capacidade de as relacionar é uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do futuro e assim este tema deverá fornecer uma formação para a vida toda tão básica como a tabuada.

Pré-Requisitos:

Os alunos devem conhecer a função afim; devem poder reconhecer essa função através do gráfico, esboçar o gráfico e devem conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os alunos devem saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau. Os alunos devem conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal.
- Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função.
- Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos) e análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções (considerando a variação para cada parâmetro separadamente) para as seguintes funções:
 - Funções quadráticas; estudo a partir da família de funções definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e a partir dos zeros e do sinal do trinómio $ax^2 + bx + c$;
 - função módulo; estudo da família de funções definidas por $f(x) = a |bx + c| + d$;
 - funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).

Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras áreas da matemática como os constantes em livros de Física, Química, Geografia, Economia, etc, em recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos ligados com o trabalhos da Área-Escola e com a Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior. Os alunos devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes tipos de situações problemáticas.

Com vista a facilitar o uso de uma linguagem rigorosa (mas não formalista) o professor pode introduzir os conceitos de “condição” e “proposição” e referir sumariamente ao longo do tema as propriedades da conjunção, disjunção, negação e implicação.

Os alunos devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador.

Dificuldade a não exceder nas funções definidas por dois ou mais ramos:

$$f(r) = |r - a|, g(x) = |x - 3| + 1, h(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x > 0 \\ x^2 - 5x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

No estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações.

%Tema II - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Resolução de problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a uma representação gráfica.
- Referência à parábola, às suas principais propriedades e à sua importância histórica.
- Equações e inequações do 2º grau; inequações com um módulo.
- Estudo de funções polinomiais e polinômios, com particular incidência nos graus 3 e 4.
- Possibilidade da decomposição de um polinômio em factores (informação). Decomposição de um polinômio em factores em casos simples, por divisão dos polinômios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.
- Estudo gráfico de inequações envolvendo polinômios com recurso à calculadora gráfica ou a partir de uma decomposição em factores do polinômio, usando uma tabela de variação de sinais. Os alunos devem verificar que obtiveram o resultado esperado usando o outro método, ou usando propriedades conhecidas.
- Estudo de transformações simples de funções (tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica): dada a função f tanto a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado recorrendo a linguagem geométrica.
- Resolução de problemas concretos envolvendo funções polinomiais.

(*) Estudo intuitivo de curvas que se ajustem a um conjunto de pontos dados.

Experimentando com a calculadora gráfica ou computador, os alunos devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas da representação gráfica.

Quando for usada a calculadora gráfica os alunos devem explorar claramente os diversos comportamentos. Os alunos devem saber evitar conclusões apressadas e devem ser incentivados a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta mas devem ser sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões.

Os alunos devem observar que a representação gráfica depende de forma decisiva do rectângulo de visualização escolhido. Devem ainda estudar situações em que uma descrição qualitativa satisfatória do comportamento da função só é possível com um gráfico múltiplo (conjunto de gráficos em diferentes rectângulos de visualização)

Os alunos devem determinar pontos notáveis (como intersecção com os eixos coordenados) e extremos de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador.

No estudo de polinômios os alunos devem trabalhar tanto com po-linômios do tipo $3x^3 + x^2 + 5$ em que o trabalho será numérico e gráfi-co e em que para ter uma informação satisfatória são precisos dois grá-ficos, como devem trabalhar com polinômios do tipo $x^3 + x^2 - 3x + 1$, em que por tentativas é possível encontrar uma raiz (neste caso 1) e, depois de usar a regra de Ruffini, reduzir a um polinômio de grau inferior.

Um aluno deverá registar por escrito as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (para desenvolver o espírito crítico e a capacidade de comunicação matemática).

(*) O estudo de curvas deve ser feito de modo informal, experimentando o aluno qual dos tipos de funções já estudadas melhor se ajusta (poderá ser analisada a soma dos desvios ou a soma dos quadrados dos desvios).

10º ANO

Tema III - Estatística

(20 aulas)

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas no 3º ciclo é por isso possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente. Assim, o professor pode, se o considerar vantajoso, tratar este tema de uma forma descontínua ao longo do ano, nomeadamente sob a forma de trabalho de projecto.

O aluno deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre crítica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da Estatística contribua para melhorar a capacidade dos alunos para avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação de dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este tema fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os alunos incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os alunos devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem.

Pré-Requisitos:

Estatística do 3º ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.
- Recenseamento e sondagem.
- As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.
- Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.

Os alunos podem recolher dados na turma, em revistas, livros ou junto de instituições, empresas, serviços públicos, autarquias, I.N.E, Comunidade Europeia, ... devendo, no entanto, ter-se em conta a maturidade e sensibilidade dos alunos para os problemas apresentados.

O professor deve acentuar que o principal objectivo da Estatística Descritiva é organizar os dados observados (amostra) e extrair deles as características mais importantes, resumindo a informação neles contida (redução dos dados).

Deve salientar-se que a Estatística Descritiva se limita ao estudo da amostra.

Numa segunda fase, a da Estatística Indutiva, conhecidas as propriedades da amostra procura-se inferir para todo o universo. Esta segunda fase não faz parte do programa.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos):

- Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de bandas, pictogramas); determinação da moda;
- Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes.
- Variável discreta: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráfico de barras; (gráficos circulares e pictogramas); função cumulativa.
- Variável contínua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.
- Medidas de localização de uma amostra: Moda ou classe modal; média; mediana; quartis.
- Medidas de dispersão de uma amostra: Amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis.
- Discussão das limitações destes parâmetros estatísticos.

O professor deve rever o estudo dos atributos qualitativos, nomeadamente o estudo gráfico procurando clarificar a distinção entre os diferentes tipos de atributos e correspondente estudo.

Quando os dados são quantitativos pode ser útil usar um tipo de representação sugestiva - Stem-and-leaf (caule e folha) - que se pode considerar entre a tabela e o gráfico. Utiliza-se principalmente para representar amostras de dois dígitos e consiste em escrever do lado esquerdo de uma linha vertical o dígito (ou dígitos) da classe de maior grandeza, seguidos dos restantes.

Esta representação facilita o cálculo da mediana e reflecte a forma da distribuição da população subjacente aos dados observados.

Os alunos devem construir tabelas de frequências absolutas ou efectivos, de frequências relativas e de frequências relativas acumuladas associadas a dados preferencialmente correspondentes a situações reais.

Os alunos devem ainda construir e interpretar gráficos de barras (caso discreto), histogramas e gráficos poligonais (caso contínuo) e, eventualmente, em ambos os casos, gráficos circulares e pictogramas.

Os alunos devem definir e interpretar a função cumulativa e fazer a respectiva representação gráfica.

No estudo de variáveis estatísticas contínuas deverá ter-se em conta que o seu estudo tem subjacente a hipótese de que em cada classe a frequência (absoluta ou relativa) está uniformemente distribuída (isto é, a frequência por unidade de amplitude de cada classe é igual ao quociente entre a frequência e a amplitude dessa classe).

No caso contínuo, a função cumulativa deverá ser introduzida de forma intuitiva; assim, dever-se-á começar por calcular o seu valor nos extremos das classes e, em seguida, usando a hipótese de distribuição uniforme, construir os segmentos de recta associados a cada classe.

Os alunos devem compreender e interpretar medidas de localização, em particular, as medidas de tendência central assim como as medidas de dispersão.

Não se pedem fórmulas estatísticas para além da média e do desvio padrão, devendo utilizar-se as funções estatísticas da calculadora mal tenham os alunos compreendido os conceitos a que essas fórmulas referem.

Recorrendo à análise conjunta das medidas de localização e de dispersão, em particular recorrendo à média e ao desvio padrão os alunos devem interpretar distribuições.

A mediana e os quartis deverão ser definidos a partir da função cumulativa não devendo no entanto perder-se a interpretação corrente (por exemplo, no caso da mediana: é o valor que tem à sua esquerda e à sua direita o mesmo número de observações).

Além disso, no caso discreto deverá ser apresentada a regra prática para o cálculo da mediana cuja dedução poderá ilustrar a interpretação atrás referida; é desnecessária, a este nível, a apresentação das regras práticas para a determinação dos 1º e 3º quartis bem como a sua obtenção no caso contínuo.

Deverá ser observado que, no caso contínuo, o cálculo da média e do desvio padrão só é possível se introduzirmos uma variável discreta relacionada com a que está em estudo. Isto é feito por intermédio da variável das marcas cuja escolha é legitimada pela hipótese de distribuição uniforme em cada classe.

Com exemplos devem ser estudadas propriedades elementares da média e da variância ou do desvio padrão; em particular, analisar o efeito nestes parâmetros de uma transformação linear afim dos valores da variável.

- Diagramas de “extremos e quartis”
- Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva):
- Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula.
- Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1, 1]$.
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.

O aluno deve construir e interpretar diagramas de extremos e quartis de uma distribuição, enquanto gráfico que permite ter simultaneamente em conta medidas de localização e de dispersão.

A partir de exemplos de nuvens de pontos o aluno deve identificar o tipo de correlação. A medida que se utiliza com mais frequência para medir o grau da associação linear é o coeficiente de correlação (linear) que se representa por r . Não devem ser propostos exercícios que envolvam o cálculo (a não ser pela máquina) nem é de exigir o conhecimento da fórmula do coeficiente de correlação.

Os alunos devem verificar, a partir de exemplos, algumas propriedades do coeficiente de correlação:

- O valor de r está no intervalo $[-1, 1]$
- Quanto maior for o módulo de r , maior será a correlação linear entre os valores de x e de y .
- Significado e interpretação do sinal de r .

Pode definir-se a recta de regressão (linear) como a recta tal que a soma dos quadrados das distâncias de cada ponto da nuvem à recta seja mínima.

Informar que se pode calcular como sendo a recta que passa pelo centro de gravidade da distribuição e cujo declive é dado pelo coeficiente de regressão; sobre este coeficiente informar apenas que o sinal é o mesmo do coeficiente de correlação e em seguida calculá-lo usando a calculadora.

Os alunos poderão ainda obter a recta de regressão na calculadora gráfica e em seguida verificar que passa pelo centro de gravidade.

É conveniente chamar a atenção dos alunos que a equação da recta de regressão desligada da nuvem de pontos não nos permite certificar se ela foi ou não influenciada por um pequeno número de pontos anormais. Ora, por vezes, uma investigação adicional destes pontos poderá permitir eventualmente rejeitá-los e obter assim uma recta mais ajustada.

11º ANO

Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II

(36 aulas)

A trigonometria tem a sua origem no estudo da medição de triângulos. Problemas relacionados com a navegação, a topografia, a indústria de moldes, entre muitos outros, exigem a resolução de triângulos. Mais tarde ao serem estudadas as funções trigonométricas veremos aparecer o seno e o co-seno como modelos matemáticos para fenómenos periódicos tais como variações de temperatura, de marés,...., mas nesta primeira abordagem para além da resolução de problemas que envolvam triângulos trata-se somente de ampliar o conceito de ângulo que passa a ser encarado como “gerado” por uma semi-recta em movimento (sentido positivo ou negativo) bem como o estudo do círculo trigonométrico e a resolução de algumas equações trigonométricas simples.

A calculadora facilitará o estudo da Trigonometria e permitirá que o tempo seja dedicado à compreensão dos conceitos e às aplicações ligadas a problemas reais, reduzindo-se o ênfase em exercícios de cálculo.

A continuação do estudo da Geometria com a noção de produto escalar e suas aplicações ligada à resolução de problemas deve permitir ao aluno melhorar as suas capacidades de visualização e representação aumentando a sua intuição geométrica.

Devem continuar a explorar-se as ligações da Geometria aos outros conteúdos. Os conhecimentos adquiridos nesta unidade devem mostrar ao aluno como a linguagem das coordenadas e dos vectores lhe fornece novos utensílios para resolver problemas já abordados noutras perspectivas.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Resolução de problemas que envolvam triângulos.

- Ângulo e arco generalizados:
 - Radiano.
 - Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.
- Funções seno, co-seno e tangente: definição; variação (estudo no círculo trigonométrico); valores em $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ radianos.
- Relações entre as funções circulares de α , e de $\pi/2 - \alpha$, $\pi/2 + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$ e $-\alpha$.
- Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente. Equações trigonométricas elementares.

Devem propôr-se aos alunos problemas variados ligados a situações concretas onde apliquem métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia, históricos,...) de modo a que o aluno se aperceba da importância da trigonometria para as várias Ciências. As calculadoras permitem que o aluno se preocupe menos com os cálculos e mais com a compreensão do problema.

Embora se refiram estes valores por se considerar que é importante que o aluno conheça alguns valores exactos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possa confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas, não devem os alunos trabalhar preferencialmente com eles pois possuem uma calculadora.

Devem aperceber-se da diferença em trabalhar por exemplo com $\text{sen } l$ em *graus* e *radianos* de modo a ter sempre bem presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados.

Depois de compreendidas as relações referidas por observação do círculo trigonométrico tornam-se desnecessários exercícios repetitivos de puras técnicas de cálculo e rotina.

É importante que os alunos verifiquem que se mantêm as relações:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1; \quad \text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x} \quad \text{e} \quad 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\text{cos}^2 x}$$

e as usem na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.

As equações trigonométricas a resolver devem ser simples do tipo $\text{sen}(kx) = \text{sen } \alpha$, $\text{cos}(kx+a) = \text{cos } \alpha$, $\text{tg}(kx) = \text{tg } \alpha$.

Não é de excluir uma breve referência aos *seno* e *co-seno* como funções reais de variável real e aos gráficos destas funções trigonométricas.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente. Equações trigonométricas elementares.
- Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço:
 - Definição e propriedades.
 - Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado.
 - Ângulo de duas rectas; inclinação de uma recta; declive como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da recta no plano.
 - Perpendicularidade de vectores e de rectas.
 - Aplicação do produto escalar à dedução da fórmula do desenvolvimento de $\cos(x-y)$
- Conjuntos definidos por condições.
- Breve referência à equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vector normal.
- Intersecção de planos; interpretação geométrica; resolução de sistemas.
- Equações cartesianas da recta no espaço.
- Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).

(*) Programação linear - breve introdução.

A partir da equação vectorial o aluno pode chegar facilmente às equações cartesianas da recta.

O ensino deve dedicar a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois o aluno para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos.

O professor deve assegurar que neste estudo da Geometria o aluno não se limite unicamente à “manipulação” de condições desligadas de situações concretas e sem as interpretar. Deve procurar que a aprendizagem dos novos conceitos apareça ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o aluno poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas)

11º ANO

Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I - Funções racionais e com radicais. Taxa de variação / Derivada (36 aulas)

Com o estudo numérico e gráfico de novas funções - racionais e envolvendo radicais - aplicam-se os conhecimentos do 10º ano relativos a funções. Tal como no 10º ano privilegiam-se funções que relacionam variáveis com significado concreto. As operações com funções são abordadas neste Tema. Serão estudadas funções inversas e funções compostas. É introduzida a noção de taxa média de variação e taxa de variação/derivada recorrendo a um uso informal da noção de limite.

Pré-Requisitos:

Os alunos devem conhecer a função afim e a função definida por $f(x) = k/x$, com $k > 0$ e $x > 0$. Todo o Tema II - Funções e Gráficos do 10º ano. Trigonometria do tema anterior.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíptotas, limites nos ramos infinitos) e análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções (considerando a variação para cada parâmetro separadamente) para as seguintes funções:
 - i) funções racionais definidas por $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$;
 - ii) funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
- Uso da calculadora para uma aproximação experimental da noção de limite, de $-\infty$ e $+\infty$.
- Referência à hipérbole, informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.
- Operações com funções (soma, diferença, produto, quociente, composição) num contexto do estudo de funções racionais envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
- Resolução de problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas em anos anteriores, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos.

Valem aqui indicações metodológicas semelhantes às dadas para o Tema II - Funções e Gráficos do 10º ano, pelo que não serão repetidas.

No estudo das propriedades das funções os alunos devem ser obrigados a utilizar uma linguagem cada vez mais precisa.

A noção de limite deve ser utilizada de forma intuitiva (incluindo a de limite lateral esquerdo e direito); será formalizada mais tarde. Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso.

Retomando os conhecimentos de polinómios, o aluno deverá ser capaz de transformar expressões como $\frac{x^2+2}{x+1}$ em $x-1+\frac{3}{x+1}$ ou $\frac{x+3}{x+1}$ em $1+\frac{2}{x+1}$ e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações. Por outro lado esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Os alunos devem usar este processo e o gráfico para lá chegar e em seguida verificar pelo outro processo. Os alunos devem poder concluir intuitivamente o limite no infinito de uma função racional.

A resolução de equações e inequações fraccionárias apenas deve aparecer num contexto de resolução de problemas, por exemplo, ligados ao estudo de gráficos ou de modelação matemática.

%Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I - Funções racionais e com radicais. Taxa de variação/Derivada

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- **Noção de taxa média de variação;** cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples. Cálculo aproximado da taxa de variação. Exemplos concretos, e em particular, envolvendo velocidades e acelerações.
- Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).
- Constatação, por argumentos geométricos, de que:
 - i) se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente e se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente;
 - ii) se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto então a derivada é nula nesse ponto (análise dos casos x^3 e $|x|$).
- Determinação da derivada em casos simples (função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo)
- Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações.
- Operações com funções: inversão. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização)
- Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação da elipse a partir da sua propriedade focal.

Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva.

No caso da função inversa os alunos devem analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injectividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa.

Será necessário introduzir a noção de raiz índice n. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência.

Grau de dificuldade a não ultrapassar: $\sqrt{x+3}$, $\sqrt[3]{x+4}$



11º ANO

Tema III - Sucessões

(20 aulas)

A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e particularmente úteis, bem como à necessidade e elaboração de representações formalizadas. Este assunto permite também, com facilidade e vantagens, a utilização intensiva de calculadoras. E permite exercícios de comunicação (pela fala e pela composição escrita). As propriedades das progressões e outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática.

Pré-Requisitos:

Os estudantes precisam de deter capacidades de cálculo elementares e devem dominar o conceito de função.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Introdução ao conceito de sucessão

- A sucessão real como função real de variável natural.
- Sucessões monótonas.
- Sucessões limitadas
- Casos particulares das progressões aritméticas e geométricas:
- Termo geral, soma de n termos consecutivos.
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática; primeira definição do número e .

As sucessões devem aparecer como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita introduzindo vários problemas, de tipo geométrico tal como vêm propostos no articulado do actual programa. Outros exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria —por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia — por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia — por exemplo, calculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento,...

O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos/modelos. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se devem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc

O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc deve ser feito à medida que vão aparecendo como aspectos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, devem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões).

Estes problemas devem ainda servir para introduzir a definição por recorrência., para casos simples.

Os estudantes podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e deve ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, devem ser introduzidas as redacções simbólicas consagradas. As redacções simbólicas devem então ser testadas com exercícios rápidos.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Limites

- Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.
Definição e resultados para classificação por comparação com sucessões conhecidas.
Operações sobre infinitamente grandes e infinitésimos.
- Limites de sucessões e convergência.
Noção de limite real.
Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite e sobre limites de sucessões convergentes obtidas a partir de outras mais simples igualmente convergentes.
A convergência das sucessões monótonas e limitadas.
Exemplos de sucessões monótonas não convergentes. Exemplos de sucessões limitadas não convergentes.
Resultados e determinação de limites por comparação de sucessões.
Problemas de limites com progressões .

- (*) Estudo de casos simples de caos usando sucessões definidas por recorrência

Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno, de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas. Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.

As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo.

Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas.

12º ANO

Tema I - Probabilidades e Combinatória

(36 aulas)

As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza. Este estudo, que pode ser em grande parte experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística.

As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas.

Considera-se ainda que o tema das Probabilidades constitui uma boa oportunidade para a introdução de uma axiomática, uma das formas de organizar uma teoria matemática.

Finalmente, qualquer destes assuntos é bom para prosseguir objectivos de trabalho em aspectos da História da Matemática.

Pré-requisitos:

Noções elementares sobre conjuntos, Probabilidades do 3º Ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Introdução ao cálculo de Probabilidades:

- Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimento como subconjunto.
- Operações sobre acontecimentos.
- Acontecimento elementar; acontecimento certo, impossível; acontecimentos contrário e incompatíveis.
- Lei dos grandes números
- Conceito frequentista de probabilidade; Propriedades
- Cálculo de probabilidades pela Lei de Laplace

Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades

- Média, desvio padrão
- Representação gráfica: referência à curva de Gauss e a caracteres que se distribuem normalmente

Definição axiomática de Probabilidade (caso finito) e propriedades elementares

- Definição de probabilidade condicionada. e sua verificação da axiomática das probabilidades

Todo o trabalho deve iniciar-se pela realização de experiências aleatórias (frequências relativas e probabilidades). Os estudantes devem ser levados a elaborar formas de registo "legíveis" para os resultados das suas experiências que podem ser partilhadas em grupo. As experiências e o estudo de situações (em particular dos jogos) devem ser aproveitadas para dinamizar discussões de tipo científico, bem como o trabalho cooperativo.

A axiomática das Probabilidades pode ser obtida pela intuição a partir das conclusões que se forem tirando das experiências e de outros exemplos apresentados. A axiomática, por ser curta , permite alguns exercícios de verificação simples capazes de motivar a apropriação da utilidade deste tipo de abordagem matemática.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Combinatória

- Técnicas de contagem.
- Permutações. Arranjos com e sem repetição.
- Partes de um conjunto e combinações sem repetição; propriedades. Triângulo de Pascal.
- Binómio de Newton.

No caso das contagens que sejam facilitados por raciocínios combinatórios, os alunos devem começar por contar os elementos um a um, utilizando exemplos (desde os mais simples até aos complicados), até que reconheçam a utilidade dos diagramas e depois das organizações simplificadoras. Os exemplos de conjuntos para a contagem devem surgir de situações problemáticas que lhes forem sendo propostas. Mesmo o triângulo de Pascal deve ser introduzido a partir de problemas. Muitos problemas postos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos.

As propriedades devem ser acedidas por meio de raciocínios combinatórios, mas não deve ser desprezada a ideia de, caso seja possível, introduzir conexões matemáticas - com métodos recursivos e fazendo alguma demonstração por indução matemática.

Pascal, Tartaglia e Laplace são exemplos "interessantes" para realizar incursões na história dos conceitos matemáticos, na vida dos matemáticos, nas ligações da Matemática com outros ramos de saber e actividade. Deve ser referido que muitos resultados de contagens já eram conhecidos anteriormente noutras civilizações (o triângulo de Pascal era conhecido na China vários séculos antes de Pascal)

Aplicações ao cálculo de Probabilidades

- Acontecimentos independentes.

Pretende-se que o aluno trate agora com rigor os conceitos anteriormente estudados de forma primordialmente intuitiva.

- (*) O problema das provas repetidas e referência à lei binomial de probabilidade

12º ANO

Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial II

(36 aulas)

Aqui são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada.

O estudo das funções é ampliado com as funções exponencial e logarítmica.

Pré-requisitos:

Tema II - Funções e Gráficos do 10º ano. Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11º ano.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Função exponencial de base superior a um.
- Crescimento exponencial. Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$ com $a > 1$.
- Função logarítmica de base superior a um.
- Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = \log_a x$ com $a > 1$.
- Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.
- Aplicações concretas de exponenciais e logaritmos.
- Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assíntotas. Continuidade.
- Teorema de Bolzano-Cauchy (informação) e aplicações numéricas.
- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição do número e . Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica).

As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. Apenas se devem levantar as indeterminações em casos simples. Dificuldade a não exceder:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 2x + 1}{x^2 + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Os alunos devem experimentar numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.

Derivada da função composta: grau de dificuldade a não ultrapassar $f(ax), f(x+b), f(x^k)$

Em todos os teoremas se deve analisar a necessidade das condições do enunciado através de contra-exemplos.

Deve ser adoptada a definição: f é derivável quando a derivada existe (isto é, é um número real); limites infinitos não existem, $+\infty$ e $-\infty$ não devem nunca ser considerados como números reais.

e é o único número real tal que $(e^x)' = e^x$.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Estudo de funções em casos simples.

Dificuldade a não ultrapassar:

$$f(x) = 2^{-x} + 2^x, \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}, \quad f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$$

- Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.

Os alunos poderão realizar trabalhos individuais ou em grupo de História do Cálculo Diferencial referindo o trabalho de alguns matemáticos como Fermat, Newton, Leibniz, Berkeley, Anastácio da Cunha, Bolzano, Cauchy, etc. Uma referência obrigatória é a de José Anastácio da Cunha; com esse pretexto referir um pouco de história da Matemática em Portugal desde o tempo dos descobrimentos até à actualidade.

- Problemas de optimização.

Os problemas de optimização devem ser escolhidos de uma forma a que um aluno trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.

- (*) Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.

(*) Os teoremas a demonstrar devem incluir: continuidade implica limitação numa vizinhança; continuidade e $f(x_0) \neq 0$ implicam permanência de sinal numa vizinhança de x_0 ; derivabilidade implica continuidade; derivada da potência inteira e racional e do quociente.

12º ANO

TEMA III - Trigonometria e Números Complexos

(20 aulas)

Com pretexto de responder a problemas de resolubilidade algébrica amplia-se o conceito de número. As operações com números complexos, nas formas algébrica e trigonométrica são aproveitadas para apropriar diferentes representações analíticas para domínios definidos geometricamente, bem como para apropriar relações entre operações algébricas e transformações geométricas. O estudante precisa dos conhecimentos de Geometria Analítica, em geral, e da Trigonometria em \mathbb{R} , e precisa de saber resolver equações e inequações dos 1º e 2º graus.

Pré-Requisitos: Trigonometria do Tema I - Geometria no Plano e no Espaço do 11º ano.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

Funções seno, co-seno, tangente.

- Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica de: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assíntotas, limites nos ramos infinitos.
- Estudo intuitivo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$. Cálculo das derivadas do seno e co-seno.

Complexos

- Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e do modo como se foram considerando novos números. Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental de número. Experimentação da necessidade de i , à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e "partidos".
- **Números complexos.** O número i . O conjunto \mathbb{C} dos números complexos
- A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica.
- Representação de complexos na forma trigonométrica. Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para outra. Operações com complexos na forma trigonométrica. Interpretações geométricas das operações.
- Domínios planos e condições em variável complexa.
- (*) Demonstração de propriedades de Geometria usando números complexos

As derivadas do seno e do co-seno devem ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$.

A introdução dos complexos deve ser ancorada em pequena abordagem histórica, do ponto de vista dos problemas/escolhos que foram aparecendo no desenvolvimento dos estudos matemáticos. Os estudantes podem realizar trabalhos sobre a extensão do conceito de número e sobre problemas de resolubilidade algébrica, quer do ponto de vista histórico, quer do ponto de vista da sua experiência com anteriores desenvolvimentos.

Será interessante a referência à impossibilidade da extensão a \mathbb{C} de uma ordenação compatível com a adição e a multiplicação.

As operações com complexos podem ser definidas na base da manutenção das propriedades das operações e do quadrado de i ser -1 . De modo intuitivo deve ser introduzido o $|z|$, estendendo a noção de valor absoluto de um real (distância de dois pontos no eixo, distância de dois pontos no plano cartesiano)

A passagem à forma trigonométrica pode ser feita com referência a outros sistemas de coordenadas.

Devem ser exploradas a multiplicação por i e as diversas operações ligadas a outras realidades matemáticas - vectores, operações com vectores, transformações geométricas.

A resolução e a interpretação das soluções de condições em z , devem ajudar a compreender a utilidade dos diversos sistemas de representação analítica.

O tema "Lógica e Raciocínio Matemático" aparece como "Tema Geral", lateralmente ao corpo do programa, pois não se pretende que constitua em si mesmo um conteúdo do programa de ensino; contudo a sua abordagem é indispensável para a formação secundária em Matemática. Os diversos itens deste tema são obrigatoriamente tratados ao longo dos três anos. No corpo do programa são feitas algumas sugestões para as oportunidades da abordagem destes temas, mas cabe ao professor, consideradas a maturidade dos alunos e as condições das turmas, decidir quando e onde deve fazer a abordagem proposta.

Tema Geral

Lógica e Raciocínio Matemático

A aprendizagem matemática dos alunos passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais). Neste capítulo, chama-se a atenção para alguns assuntos que, não constituindo em si mesmos conteúdos do programa, são alguma da essência de muitos passos da aprendizagem de diversos assuntos e constituem elementos que ajudam os estudantes a compreender demonstrações e a racionalizar os desenvolvimentos desta ou daquela teoria. Como se pode ver pelo corpo do programa, não se pretende que a matemática ou matemáticas sejam introduzidas axiomáticamente, mas pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente. Defende-se que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas, sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de "simbolização". Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática. A escrita simbólica das proposições matemáticas há-de aparecer, se possível naturalmente, para efeitos de precisão, condensação e economia, clareza de exposição.

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Noções de lógica
- Operações com condições e operações com conjuntos.
- Implicação formal e inclusão: transitividade. Lei da conversão.
- Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.

Todas as noções de lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações, propriedades dos módulos, propriedades das funções, axiomática das probabilidades.

Muitos pequenos exemplos ligados ao trabalho com I R e suas propriedades podem servir como exemplos de esclarecimento de alguma operação lógica.

- Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração.
- Métodos de demonstração: método analítico, método sintético, método de redução ao absurdo, indução matemática. Contra-exemplos.

No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os alunos terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclideana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas. O hábito de pensar correctamente, que é o que afinal está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os alunos devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações (que não são mais do que novos problemas, por vezes dentro de outros problemas cuja resolução carece de ser comprovada). A indução matemática, como método de demonstração, deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo (quer para provar propriedades de sucessões, quer para provar propriedades combinatórias, se houver tempo).

%o

%oLógica e Raciocínio Matemático

Desenvolvimento

Indicações Metodológicas

- Reflexão sobre as heurísticas de Polya para a resolução de problemas.

A organização da heurística de Polya (de Guzmán, ou outra) para a resolução de problemas deve aparecer aos alunos após a resolução de vários problemas (abstractos, por exemplo com conjuntos, ou envolvendo aplicações) e depois dos alunos discutirem os procedimentos usados. Elas servirão como pano de fundo organizacional do pensamento para atacar os problemas, de modo a que os alunos não esqueçam qualquer fase importante. É importante que os estudantes se apercebam da necessidade de um plano, e que, sem que eles abandonem a criação dos seus próprios estilos de organização e a experiência já existente, compreendam que o conhecimento destas heurísticas vai permitir melhorá-los. Estas organizações de pensamento são úteis para todos os aspectos da vida e não só para a Matemática.

A introdução e o desenvolvimento destes temas é facilitador do "desenvolvimento da linguagem e do simbolismo para comunicar ideias matemáticas" de modo que os alunos "reflectam sobre, e clarifiquem, o seu pensamento matemático no que diz respeito às noções e relações matemáticas, formulem definições matemáticas e expressem generalizações descobertas através de investigações, expressem as noções matemáticas oralmente e por escrito, ... façam perguntas de clarificação e de desenvolvimento relacionadas com assuntos matemáticos que leram ou ouviram falar e apreciem a economia, o poder e a elegância da notação matemática bem como o seu papel no desenvolvimento das ideias matemáticas." Estamos em crer que estes temas, incluídos em experiências variadas, são facilitadores de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, pelas oportunidades de formular e testar conjecturas e analisar contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações.

- O processo de modelação matemática.

Finalmente, quando for oportuno (as probabilidades e a estatística são temas e momentos apropriados na falta de outros momentos) devem ser abordadas as diferenças entre raciocínio plausível e raciocínio demonstrativo, ao mesmo tempo que se abordam os diversos tipos de evidência científica. Estas abordagens constituem bases seguras para criar um espírito crítico construtivo capaz de destrinçar a qualidade relativa de cada uma das informações que o aluno recebe.

Deve ser discutido com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual. Este tema deverá ser abordado o mais tardar a propósito dos problemas de optimização no 12º ano.

