Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2005, 1.ª chamada)**

Proposta de resolução

1. Fazendo a contagem dos alunos que se enquadram em cada uma das opções apresentadas, temos:

   - Ter lido menos do que um livro, ou seja zero livros: 20 alunos
   - Ter lido mais do que dois livros, ou seja, três, quatro ou cinco livros: $11 + 20 + 24 = 55$ alunos
   - Ter lido menos do que três livros, ou seja zero, um ou dois livros: $20 + 16 + 9 = 45$ alunos
   - Ter lido mais do que quatro livros, ou seja, cinco livros: 24 alunos

   Assim, de entre as opções apresentadas, concluímos que o acontecimento mais provável é que um aluno escolhido ao acaso tenha lido mais do que dois livros.

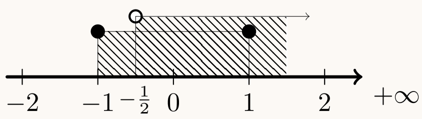
   Resposta: **Opção** Ter lido mais que dois livros

2.

   2.1. Como o conjunto A contém números maiores que 1, tem que resultar da união do intervalo $[-1,1[$ com outro conjunto que contenha números superiores a 1. Logo as opções (A) e (B) pelo que podemos afirmar que as igualdades das opções (A) e (B) não são verdadeiras.

   Devemos ainda considerar que o conjunto A não contém números menores que -1, pelo que não pode resultar da união do intervalo $[-1,1[$ com outro conjunto que contenha números superiores a menores que -1, como está expresso na igualdade da opção (C).

   Desta forma, de entre as opções apresentadas, a única forma de escrever o conjunto A é $A = [-1,1[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, como se pode verificar representando os dois conjuntos na reta real:



   Resposta: **Opção** $A = [-1,1[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

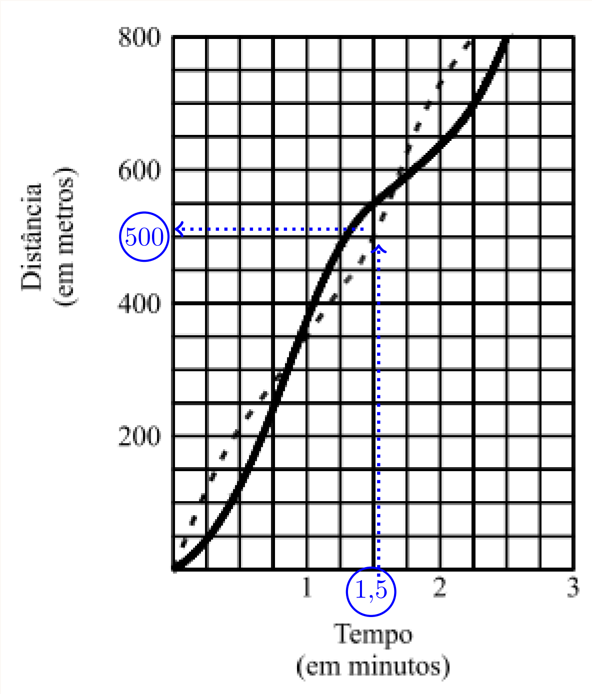
   2.2. Resolvendo a inequação, temos:

$$3 + \frac{1-x}{2} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} \leq 4 - 3 \Leftrightarrow 1 - x \leq 1 \times 2 \Leftrightarrow -x \leq 2 - 1 \Leftrightarrow -x \leq 1 \Leftrightarrow x \geq -1$$

   C.S.$=[-1, +\infty[$

   Logo o conjunto A é o conjunto solução da inequação.

3.



3.1. Como, logo após o sinal de partida, o João estava à frente do Carlos, e no gráfico, no minuto inicial, a linha tracejada tem os pontos que correspondem a uma maior distância percorrida, podemos verificar que o gráfico que o gráfico com a linha tracejada descreve a corrida do João.

Assim, identificando o ponto da linha tracejada que corresponde ao objeto 1,5 (1 minuto e meio), podemos verificar que a imagem associada é 500.

Assim, durante o primeiro minuto e meio da corrida, o João percorreu 500 metros.

3.2. Como a extensão da corrida é de 800 metros, pela observação do gráfico, podemos verificar que os dois amigos percorreram esta distância em intervalos de tempo que diferem de $\frac{1}{4}$ de segundo (os pontos que correspondem à distância percorrida de 800 metros em cada um dos amigos estão à distância de uma quadrícula, e como 1 minuto corresponde a 4 quadrículas, cada quadrícula representa $\frac{1}{4}$ de minuto).

Desta forma, como cada minuto tem 60 segundos, o tempo, em segundos, que decorreu entre a chegada de cada um dos dois amigos à meta é:

$$\frac{1}{4} \times 60 = \frac{60}{4} = 15 \text{ segundos}$$

4. De acordo com a figura, podemos observar que:

- Depois de cortado o prisma, existem $4 \times 3 = 12$ cubos
- Existem 8 cubos com três faces pintadas (4 na camada superior e 4 na camada inferior - esta camada também foi pintada porque é explicitado que foram pintadas as seis faces do prisma antes de o cortar)
- Existem 4 cubos com duas faces pintadas (na camada central)

Assim, escolhendo, ao acaso, um dos cubos, existem 12 casos possíveis, dos quais apenas 4 são favoráveis à observação de que o cubo escolhido tenha só duas faces pintadas, pelo que, calculando a probabilidade e escrevendo o resultado na forma de uma fração irredutível, temos:

$$p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

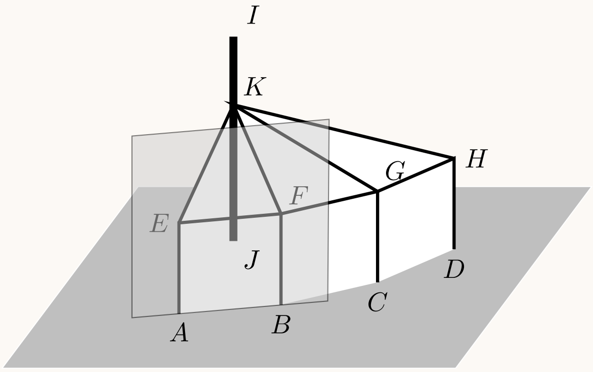
5.

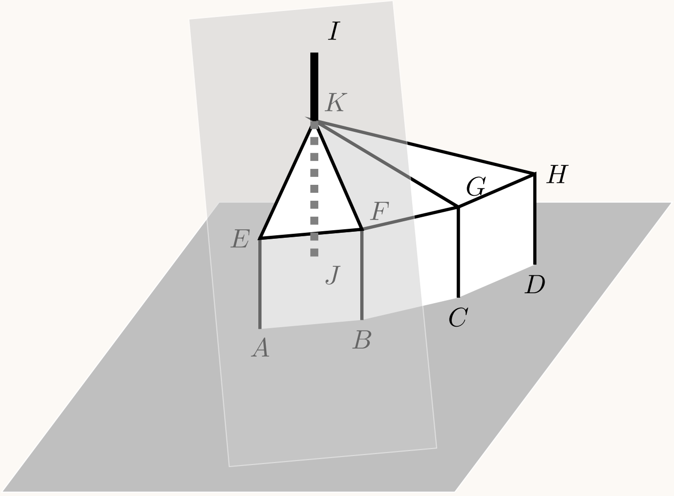
5.1.

5.1.1. Como os segmentos de reta $[EA]$ e $[FB]$ são perpendiculares ao chão, e pertencem ao plano ABF, então este plano é perpendicular ao chão.

Assim, qualquer reta perpendicular ao chão é paralela ao plano ABF, como por exemplo:

a reta IJ





5.1.2. Um plano que intersecte o plano do chão e uma reta perpendicular ao chão num único ponto, não é perpendicular ao plano do chão. Como a reta JK é perpendicular ao chão, um plano com estas características, é, por exemplo:

o plano EFK

5.2. Designando por x o número de crianças com idade até 10 anos, e por y o número de crianças com mais de 10 anos que foram ao circo, temos que, como o grupo era composto por 20 crianças,

$$x + y = 20$$

Como o bilhete de cada criança com idade até 10 anos é de 10 €, o custo total dos bilhetes desde tipo, em euros, para x crianças é de $x \times 10$, ou simplesmente $10x$
Da mesma forma, como o bilhete para cada criança com mais de 10 anos é de 15 €, então o custo total dos bilhetes desde tipo, em euros, para y crianças é de $15y$
Como na compra dos 20 bilhetes se gastaram 235 €, vem que

$$10x + 15y = 235$$

Assim, podemos escrever um sistema e determinar o valor de y:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 10x + 15y = 235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ 10(20 - y) + 15y = 235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ 200 - 10y + 15y = 235 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ 5y = 235 - 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ 5y = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ y = \dfrac{35}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ y = 7 \end{cases}$$

Logo, podemos concluir que número de crianças do grupo com mais de 10 anos de idade é 7.

6. Como π é um número irracional e $\pi \approx 3{,}14$, então

$$\pi + 1$$

é um número irracional compreendido entre 4 e 5

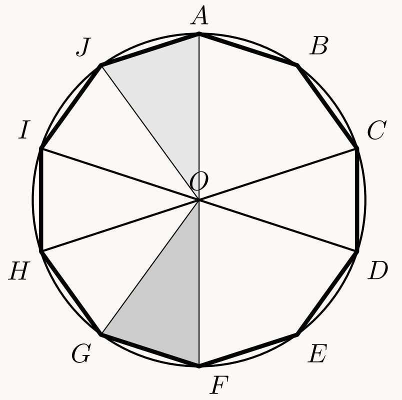
7.

7.1. Como $[ABCDEFGHIJ]$ é um decágono regular, pode ser dividido em 10 triângulos isósceles congruentes, cujos ângulos menores têm amplitude $\frac{360}{10} = 36°$

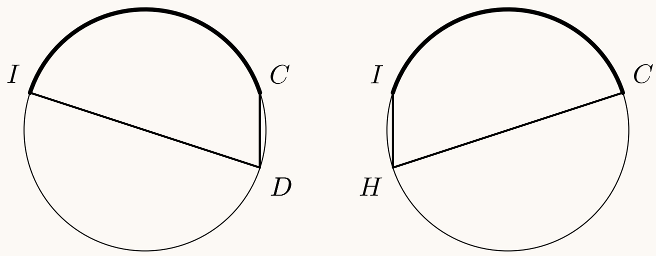
Assim, como $\frac{144}{36} = 4$, o transformado do ponto A pela rotação de centro em O e de amplitude 144° é:

o ponto G

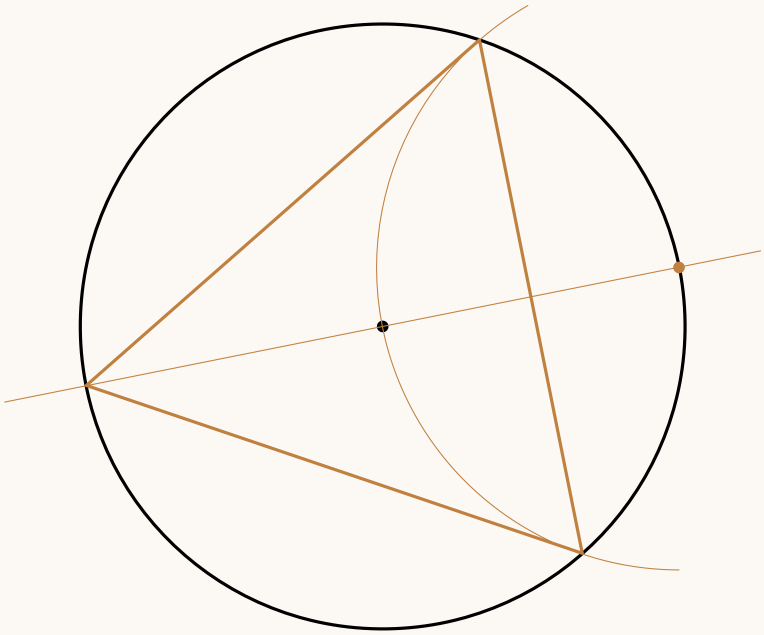
(como se pode observar na figura ao lado).



7.2. Como os ângulos CDI e CHI são ângulos inscritos, relativos ao mesmo arco de circunferência (arco CI), então têm a mesma amplitude.



7.3.



Devem ser percorridos, sucessivamente, os seguintes passos:

- Traçar uma reta que contenha um diâmetro da circunferência.
- Traçar um arco de circunferência com centro numa extremidade do diâmetro e raio igual ao raio da circunferência.
- Traçar o triângulo com os vértice nas duas interseções do arco com a circunferência e na outra extremidade do diâmetro.

8.

8.1. Como a área dos retângulos é 18 cm^2, então o produto do comprimento (c) pela largura (l), ambos expressos em centímetros, é 18, ou seja:

$$c \times l = 18$$

Assim, para cada um dos retângulos A e B, temos:

- **Retângulo A**: $4 \times l = 18 \Leftrightarrow l = \frac{18}{4} \Leftrightarrow l = 4{,}5$
- **Retângulo A**: $c \times 0{,}5 = 18 \Leftrightarrow c = \frac{18}{0{,}5} \Leftrightarrow l = 36$

Relativamente ao retângulo C, podemos observar, por exemplo que $18 \times 1 = 18$, pelo que podemos considerar $c = 18$ e $l = 1$

Desta forma, a tabela pode ser preenchida com os valores calculados:

	Retângulo A	**Retângulo B**	**Retângulo C**
Comprimento (cm)	4	**36**	**18**
Largura (cm)	**4,5**	0,5	**1**

8.2. Como $c \times l = 18 \Leftrightarrow l = \frac{18}{c}$, ou seja, as grandezas c e l são inversamente proporcionais, pelo que o gráfico que representa a relação entre as variáveis é uma hipérbole.
Desta forma podemos excluir as opções (A) e (B).
Podemos ainda verificar que na opção (D) a imagem do objeto 1 é um valor superior a 18, ou seja, $c \times l \neq 18$, pelo que este gráfico também não representa a relação entre as variáveis.

Assim, temos que o gráfico da opção (C) é parte de uma hipérbole, traduzindo uma relação de proporcionalidade inversa, e em que o produto das coordenadas de todos os pontos do gráfico é 18.

Resposta: **Opção** Gráfico C

9. Como os dois triângulos retângulos formados pelos degraus e pela rampa são congruentes (porque têm os ângulos correspondentes com a mesma amplitude e um lado com a mesma medida), então a medida da hipotenusa de cada um deles é $\frac{c}{2}$. Podemos ainda verificar que, relativamente ao ângulo de amplitude 3°, a altura do degrau é o cateto oposto do triângulo.

Assim, recorrendo à definição de seno de um ângulo, temos que:

$$\operatorname{sen} 3^\circ = \frac{10}{\frac{c}{2}} \Leftrightarrow \frac{c}{2} = \frac{10}{\operatorname{sen} 3^\circ} \Leftrightarrow c = \frac{10}{\operatorname{sen} 3^\circ} \times 2$$

Como $\operatorname{sen} 3^\circ \approx 0{,}0523$, o comprimento da rampa, em centímetros, é:

$$c \approx \frac{10}{0{,}0523} \times 2 \approx 382{,}4092 \text{ cm}$$

Pelo que o comprimento da rampa, em metros, arredondado às décimas, é 3,8 m

10. Como o perímetro de um círculo de raio r é $P_\circ = 2\pi r$. Como neste caso o diâmetro é de 10 cm, temos que raio é $r = \frac{10}{2} = 5$ cm. E assim o perímetro do círculo, em centímetros, é dado por:

$$P_\circ = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31{,}416 \text{ cm}$$

Desta forma, observando todas as aproximações apresentadas podemos verificar que a melhor aproximação é 31,42, ou seja a aproximação do João.

Resposta: **Opção** João

11. Designa por r o raio de cada uma das esferas, temos que:

- o volume de cada esfera é: $V_E = \frac{4}{3}\pi r^3$
- o volume das três esferas é: $3 \times V_E = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$
- a medida do raio da base do cilindro é r, e a altura é o triplo do diâmetro, ou seja, $h = 3 \times 2 \times r = 6r$
- o volume do cilindro é: $V_C = A_{\text{Base}} \times h = \pi r^2 \times 6r = 6\pi r^3$
- o volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é a diferença do volume do cilindro e das três esferas, ou seja: $V = V_C - 3 \times V_E = 6\pi r^3 - 4\pi r^3 = 2\pi r^3$

E, desta forma podemos concluir que:

$$V = 2\pi r^3 = \frac{4\pi r^3}{2} = \frac{3 \times V_E}{2}$$

Ou seja, o volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.