Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2005, 2.ª chamada)**

Proposta de resolução

1. Analisando cada uma das afirmações, confrontando com a observação do gráfico, temos que:

   - Observando o eixo vertical, podemos verificar que a segunda parte do percurso corresponde a uma distância percorrida menor que a primeira parte, pelo que a afirmação é falsa.
   - Observando a parte do gráfico correspondente à segunda parte do percurso, podemos verificar que, por comparação com a primeira parte, foi percorrida uma distância menor em mais tempo, ou seja, deslocou-se mais depressa na primeira parte do percurso. Assim podemos concluir que a segunda parte do percurso foi feita a andar e corresponde a uma menor distância percorrida, pelo que a afirmação é falsa.
   - Como a primeira parte do percurso foi feita a correr, observando o eixo horizontal, podemos verificar que a primeira parte do percurso corresponde a um período de tempo menor que a segunda parte, pelo que a afirmação é falsa.
   - Como a primeira parte do percurso foi feita a correr (porque se deslocou mais depressa), e a segunda parte foi feita a andar (porque se deslocou mais devagar), a afirmação é verdadeira.

   Resposta: **Opção** A Ana iniciou o percurso a correr e terminou-o a andar.

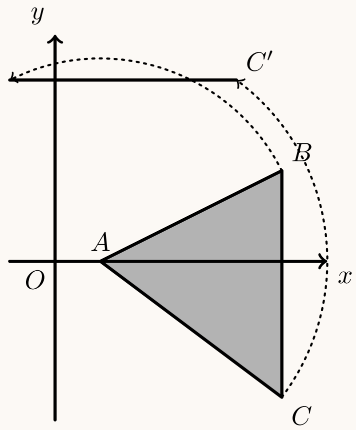
2.

   2.1. Como o perímetro do triângulo $[ABC]$ é

   $$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{20} + 5 + 5 = \sqrt{20} + 10$$

   E $\sqrt{20} \approx 4{,}47$, então temos que $P_{[ABC]} \approx 4{,}47 + 10 \approx 14{,}47$

   Assim, $14{,}4 < P_{[ABC]} < 14{,}5$, ou seja um valor aproximado por defeito do perímetro do triângulo $[ABC]$, a menos de $0{,}1$, é $14{,}4$ e o valor aproximado por excesso, a menos de $0{,}1$, é $14{,}5$

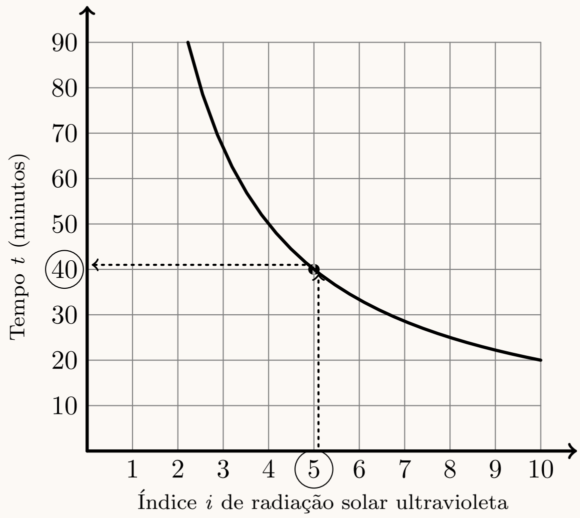


2.2. Considerando o transformado do segmento de reta $[BC]$ obtido por meio de uma rotação de centro em A e amplitude $90°$, obtemos o segmento de reta $[B'C']$ paralelo ao eixo dos xx (como se pode observar na figura ao lado).

Resposta: **Opção** ... paralelo ao eixo dos xx

3.

3.1. Identificando o ponto do gráfico correspondente ao índice 5 de radiação solar ultravioleta, e observando o tempo correspondente, podemos verificar que a Ana minutos pode ter a pele diretamente exposta ao sol, sem ficar com eritema durante 40 minutos.



3.2. Considerando a relação $t = \frac{D}{i}$, temos que no caso da Ana, e por exemplo considerando o índice 5 e o tempo correspondente (40), podemos determinar o valor da constante D:

$$40 = \frac{D}{5} \Leftrightarrow 40 \times 5 = D \Leftrightarrow 200 = D$$

Assim, recorrendo à tabela, temos que a cor do cabelo da Ana, ou seja a cor do cabelo correspondente ao valor 200 para a constante D é "Ruivo".

4. Como o pai da Ana recebe uma quantia fixa de 200 euros por mês, para mais do que 1500 euros, quantia que ele terá que conseguir na percentagem das vendas é:

$$1500 - 200 = 1300 \text{ euros}$$

Como ele recebe 12% do preço de cada computador e o preço é de 600 euros, então, por cada computador vendido, o valor que recebe é:

$$600 \times \frac{12}{100} = 600 \times 0{,}12 = 72 \text{ euros}$$

Assim, para conseguir atingir 1300 euros em partes de 72 euros, o número de partes é:

$$\frac{1300}{72} \approx 18{,}06$$

Assim, temos que, o número de computadores que o pai da Ana deve vender num mês, para receber no mínimo 1500 euros, deve ser superior a 18 computadores, ou seja, deve vender 19 computadores.

5.

5.1. Como cada face tem a mesma probabilidade de sair em qualquer lançamento de um dado equilibrado, no terceiro lançamento desta série de lançamentos (como em qualquer outro lançamento) a face com o símbolo ◇ tem igual probabilidade de sair - a sua ocorrência não é mais provável.

5.2. Identificando as posições relativas dos símbolos ✻ , ⊠ e ◆ , nas planificações apresentadas e nas figuras, podemos verificar que:

- As faces com os símbolos ✻ e ⊠ , na Figura 1, são faces adjacentes, e nas Planificações B e D são faces opostas, pelo que, estas planificações não representam o dado das figuras.
- As faces com os símbolos ✻ e ◆ , na Figura 2, são faces adjacentes, e na Planificação C são faces opostas, pelo que, esta planificação não representa o dado das figuras.

Desta forma, de entre as planificações apresentadas, a única que pode representar o dado das figuras é a Planificação A.

Resposta: **Opção** Planificação A

6.

6.1. Como o *degrau* é um prisma triangular reto, podemos considerar o triângulo retângulo em que um ângulo agudo tem amplitude 17°, e relativamente a este ângulo a medida do cateto oposto é a altura, a, do *degrau*, e ainda a medida do cateto adjacente é 5.

Assim, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que:

$$\text{tg } 17^\circ = \frac{a}{5} \Leftrightarrow 5 \times \text{tg } 17^\circ = a$$

Como tg 17° ≈ 0,3057, arredondando o resultado às décimas, a altura do *degrau* é:

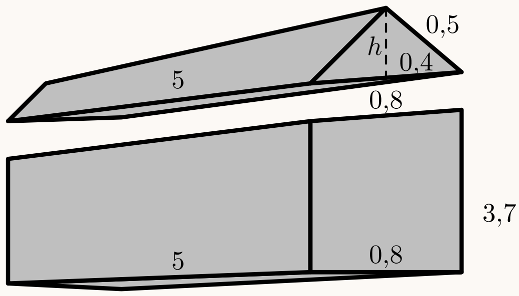
$$a \approx 5 \times 0{,}3057 \approx 1{,}5 \text{ m}$$

6.2. Podemos determinar o volume do espigueiro como a soma dos volumes de um prisma retangular e de um prisma triangular.

Desta forma, temos que o volume do prisma retangular, em metros cúbicos, é:

$$V_{\text{PR}} = 5 \times 0{,}8 \times 3{,}7 = 14{,}8 \text{ m}^3$$

Para calcular o volume do prisma triangular, devemos calcular previamente a área da base.
Como a base é um triângulo isósceles, podemos calcular a altura (h), decompondo o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos, cujo comprimento da hipotenusa é 0,5 m e de um dos catetos é 0,4 m.
Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, temos que:



$$h^2 + 0{,}4^2 = 0{,}5^2 \Leftrightarrow h^2 + 0{,}16 = 0{,}25 \Leftrightarrow h^2 = 0{,}25 - 0{,}16 \Leftrightarrow h^2 = 0{,}09 \underset{h>0}{\Rightarrow} h = \sqrt{0{,}09} \Leftrightarrow h = 0{,}3$$

Desta forma, temos que o volume do prisma triangular, em metros cúbicos, é:

$$V_{\text{PT}} = A_{\text{Base}} \times \text{altura} = \frac{0{,}8 \times 0{,}3}{2} \times 5 = 0{,}6 \text{ m}^3$$

Pelo que o volume do espigueiro, em metros cúbicos, é:

$$V_{\text{espigueiro}} = V_{\text{PR}} + V_{\text{PT}} = 14{,}8 + 0{,}6 = 15{,}4 \text{ m}^3$$

7.

7.1. Organizando todas as escolhas possíveis que as duas amigas podem fazer, com recurso a uma tabela, temos:

Ana / **amiga**	Queijo	Fiambre	Presunto
Queijo	QQ	QF	QP
Fiambre	FQ	FF	FP
Presunto	PQ	PF	PP

Assim, é possível verificar que existem 9 escolhas possíveis das duas amigas, (ou seja 9 casos possíveis), e que apenas uma delas corresponde a que ambas escolham sanduíches de queijo (ou seja 1 caso favorável).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de ambas escolherem uma sanduíche de queijo, é:

$$p = \frac{1}{9}$$

7.2. Como sabemos que a Ana comprou, no bar da escola, mais três sanduíches do que sumos, a equação $x = y + 3$ indicia que x designa o número de sanduíches comprados pela Ana, e y é o número de sumos igualmente comprados pela Ana.

Assim, como cada sanduíche custa 0,80 €, x sanduíches custam, em euros, $x \times 0{,}80$, ou mais simplesmente $0{,}8x$
Da mesma forma, como cada sumo custa 0,30 €, y sumos, custam $0{,}3y$
Como no total pagou 4,60 €, a soma do custo das x sanduíches e dos y sumos é igual a 4,6, pelo que uma equação do 1.º grau que permite completar o sistema, de modo que traduza o problema, é

$$0{,}8x + 0{,}3y = 4{,}6$$

8.

8.1. Como o segmento de reta $[AC]$ é um diâmetro, então:

$$\overset{\frown}{AC} = 180°$$

Como o ângulo CAB é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{CB} = 2 \times C\hat{A}B = 2 \times O\hat{A}B = 2 \times 30 = 60°$$

E a amplitude do arco AB é a diferença das amplitudes dos arcos AC e BC:

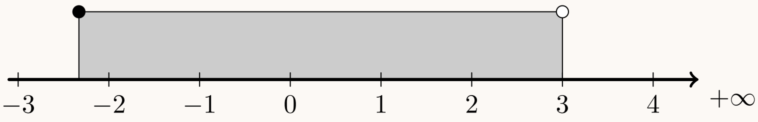
$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BC} = 180 - 60 = 120°$$

8.2. Como a reta é tangente à circunferência no ponto A, é perpendicular ao diâmetro $[AD]$, ou seja, o ângulo CAD é reto.
Assim, como os ângulos CAB e BAD são complementares, ou seja $C\hat{A}B + B\hat{A}D = C\hat{A}D$, temos que:

$$30 + B\hat{A}D = 90 \Leftrightarrow B\hat{A}D = 90 - 30 \Leftrightarrow B\hat{A}D = 60°$$

9.

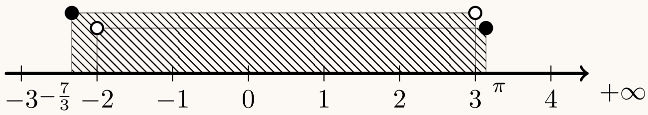
9.1. Como $-\frac{7}{3} \approx -2{,}33$, representando na reta real o intervalo $\left[-\frac{7}{3},3\right[$, temos:



Assim, verificando que, como o intervalo é aberto no limite superior, $3 \notin \left[-\frac{7}{3},3\right[$, vem que o conjuntos dos números inteiros relativos que pertencem ao intervalo $\left[-\frac{7}{3},3\right[$, é:

$$\{-2,-1,0,1,2\}$$

9.2. Como $\pi \approx 3{,}14$, representando o conjunto os dois intervalos na reta real, temos:



Assim temos que $]-2,\pi] \cup \left[-\frac{7}{3},3\right[= \left[-\frac{7}{3},\pi\right]$

10. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x^2 = 2(4-x) \Leftrightarrow x^2 = 8-2x \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow$$

$(a=1,\ b=2$ e $c=-8)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4(1)(-8)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+6}{2} \vee x = \frac{-2-6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \vee x = \frac{-8}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -4$$

C.S.$=\{-4,2\}$

11. Como os segmentos $[BF]$ e $[DH]$ são ambos diâmetros da circunferência, temos que:

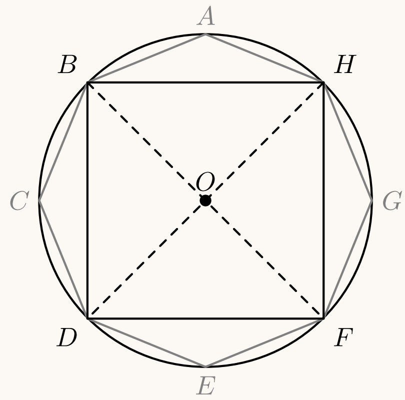
$$\overline{BF} = \overline{DH}$$

Como o octógono é regular, os arcos definidos por dois vértices consecutivos têm a mesma amplitude. Calculando a amplitude do arco BC (por exemplo), temos que:

$$\widehat{BC} = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

E assim, os arcos definidos por vértices consecutivos do quadriláteros, também têm a mesma amplitude. Calculando a amplitude do arco BD (por exemplo), temos que:

$$\widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = 2 \times \widehat{BC} = 2 \times 45 = 90^\circ$$



Desta forma temos que o ângulo BOD, que é o ângulo ao centro relativo ao arco BD (e por isso tem a mesma amplitude), é uma ângulo reto.
Assim, os segmentos $[BF]$ e $[DH]$, que são as diagonais do quadrilátero $[BDFH]$ são perpendiculares e têm o mesmo comprimento, pelo que o quadrilátero é um quadrado.