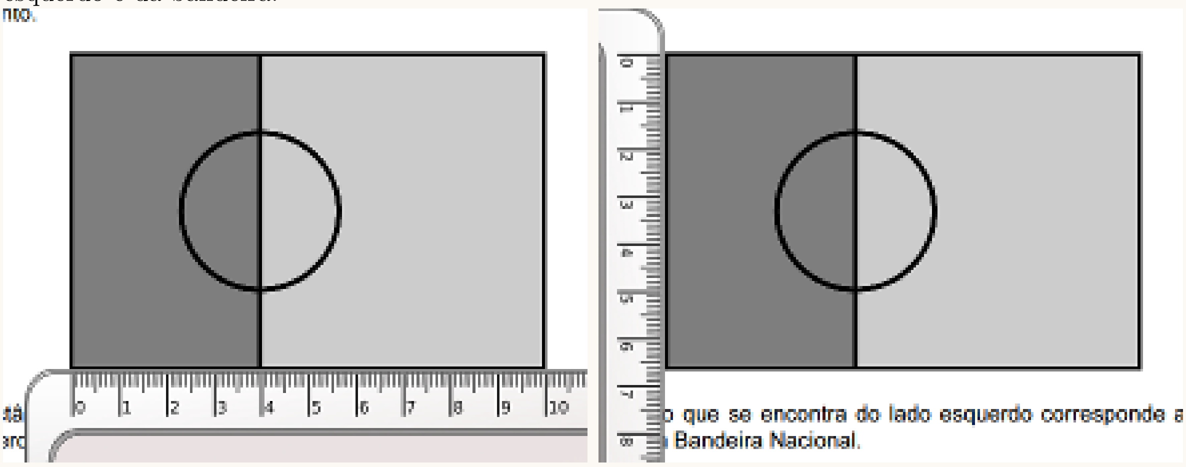
Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2006, 2.ª chamada)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Fazendo mas medições com uma régua, obtemos valores para as dimensões do retângulo do lado esquerdo e da bandeira:



Calculando as respetivas áreas, temos:

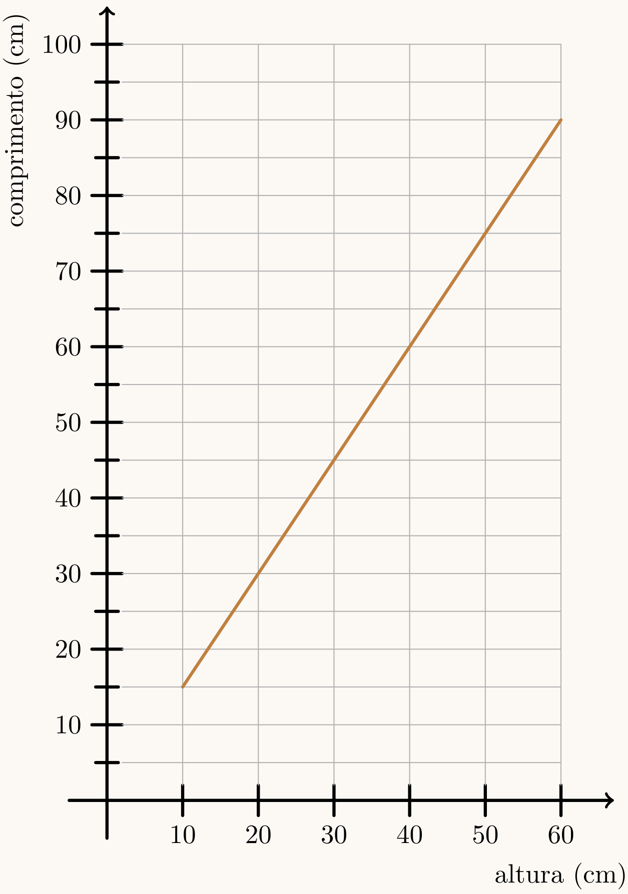
- Retângulo do lado esquerdo: $A = 4 \times 6{,}6 = 26{,}4 \text{ cm}^2$
- Bandeira: $A = 10 \times 6{,}6 = 66 \text{ cm}^2$

E, como:

$$\frac{2}{5} \times 66 = 26{,}4 \text{ cm}^2$$

Logo, podemos concluir que neste esquema, o retângulo da esquerda ocupa efetivamente $\frac{2}{5}$ da área total da bandeira.

1.2.



1.2.1. Como o comprimento é 1,5 vezes a altura, e pretende-se construir o gráfico para valores da altura compreendidos entre 10 e 60, temos que:

- se a altura é 10, então o comprimento correspondente é

$$1{,}5 \times 10 = 15$$

- se a altura é 60, então o comprimento correspondente é

$$1{,}5 \times 60 = 90$$

E assim, podemos traçar o gráfico, que é o segmento de reta de extremos nos pontos de coordenadas (10,15) e (60,90)

1.2.2. Como o comprimento é 1,5 vezes a altura, temos que o perímetro é:

$$P = 1{,}5 \times a + 1{,}5 \times a + a + a = 3a + 2a = 5a$$

Resposta: **Opção** $P = 5a$

2.

2.1. Depois de registar todas as idades, estas devem ser ordenadas.
Como a mediana é o registo da posição central e são nove registos (um registo por cada primo), então a mediana é a idade correspondente ao dado da posição cinco da lista ordenada:

$$\underbrace{\text{Idade}_1 \ \ \text{Idade}_2 \ \ \text{Idade}_3 \ \ \text{Idade}_4}_{4} \ \ \underbrace{\text{Idade}_5}_{\tilde{x}} \ \ \underbrace{\text{Idade}_6 \ \ \text{Idade}_7 \ \ \text{Idade}_8 \ \ \text{Idade}_9}_{4}$$

2.2. Como o Roberto tem nove primos, escolhendo, ao acaso, um deles, o número de casos possíveis é nove.

Como a probabilidade de ser um rapaz é de $\frac{1}{3}$, e existem nove casos possíveis, temos que $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$, pelo que para nove casos possíveis, existem 3 casos favoráveis, ou seja, o Ricardo tem três primos rapazes.

Como o Roberto tem nove primos, e três são rapazes, o número de raparigas é:

$$9 - 3 = 6$$

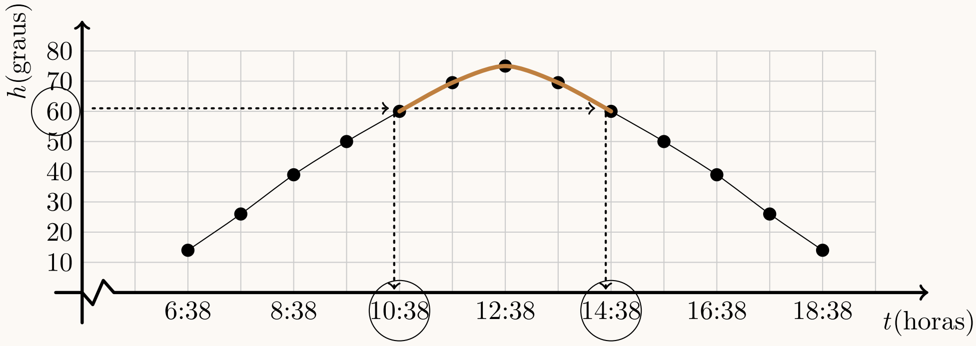
3. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e usando a propriedade distributiva, vem:

$$3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 - 2\times x + 1^2\right) = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = \frac{0}{3} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

Resposta: **Opção** $x^2 - 2x + 1 = 0$

4.

4.1. Observando o gráfico podemos verificar que o Sol esteve a uma altura superior a 60° entre as $10:38$ horas e as $14:38$ horas.

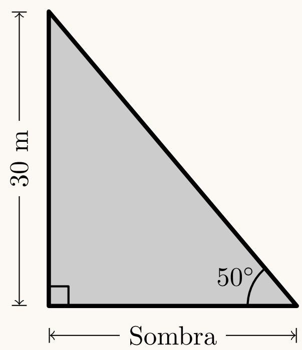


Assim, o número de horas em que a altura do Sol foi superior ou igual a 60°, foi de:

$$14:38 - 10:38 = 4 \text{ horas}$$

4.2. Pela observação do gráfico, podemos verificar que às 15 horas e 38 minutos do dia 21 de junho de 2006, a altura, h, do Sol é a amplitude, medida em graus, ou seja o ângulo que os raios solares faziam com o plano do horizonte era 50°

Fazendo um esboço para ilustrar a situação descrita, como na figura ao lado, consideramos um triângulo retângulo em que um dos ângulo tem amplitude 50°, e relativamente a esse ângulo sabemos que a medida do cateto oposto é 30 e queremos determinar a medida do cateto adjacente.

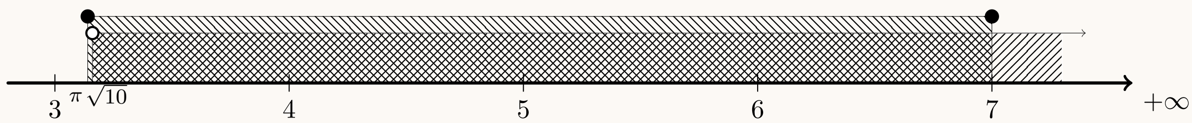


Assim, designado por s o comprimento da sombra, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que:

$$\text{tg } 50° = \frac{30}{s} \Leftrightarrow s = \frac{30}{\text{tg } 50°}$$

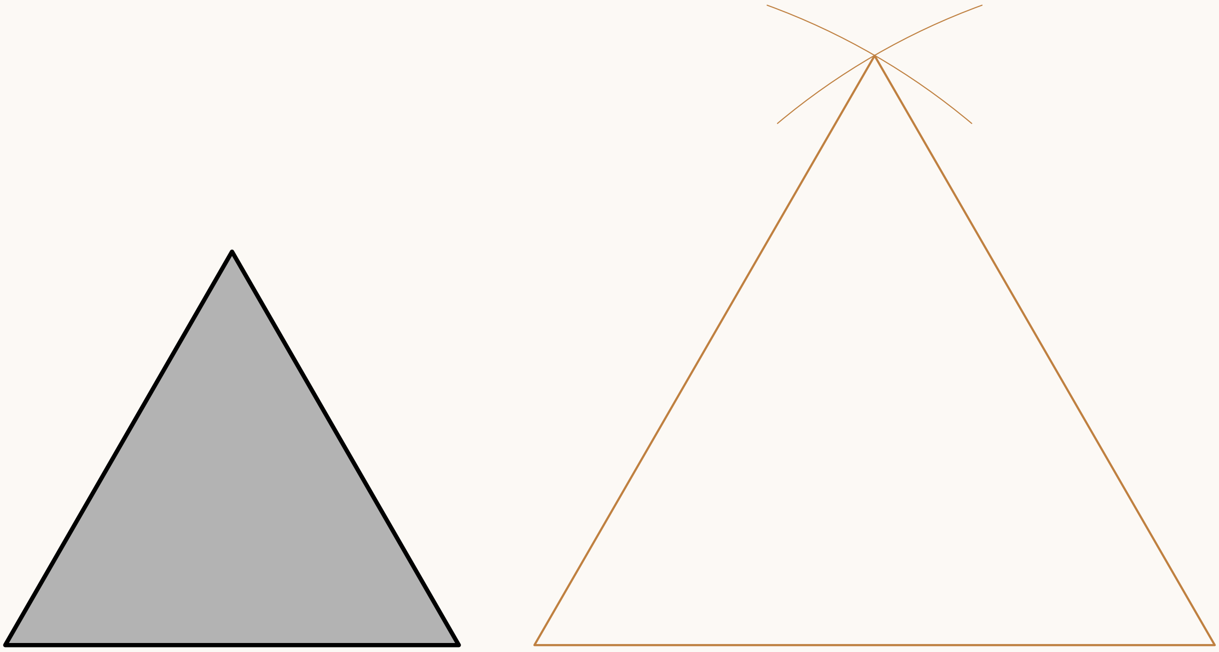
Como tg 50° $\approx 1{,}19$, vem que: $s \approx \frac{30}{1{,}19} \approx 25{,}21$ e assim, arredondando o resultado às unidades, temos que a sombra do monumento é, aproximadamente, 25 metros.

5. Como $\pi \approx 3{,}14$ e $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, representando os dois intervalos indicados na definição do conjunto A na reta real , temos:



Como $\pi < \sqrt{10}$ temos que $A = [\pi,7] \cap \left]\sqrt{10}, +\infty\right[= \left]\sqrt{10},7\right]$

6.



Devem ser percorridos os seguintes passos:

- Traçar um segmento de reta com $6 \times 1{,}5 = 9$ cm
- Com o compasso centrado num dos extremos do segmento, e abertura de 9 cm (ou seja, até ao outro extremo), traçar um arco que contenha um dos pontos que se encontra sobre a reta perpendicular que contém o ponto médio do segmento
- Usar o procedimento análogo ao anterior, mas com o centro do compasso no outro extremo do segmento de reta
- Unir os extremos do segmento ao ponto de interseção dos dois arcos de circunferência

7.

7.1. Considerando $t = 0$, temos que $v = -300 \times 0 + 2100 = 2100$

Assim, no contexto do problema, 2100 é o valor do computador, em euros, zero anos após a sua compra, ou seja, o valor do computador no momento da compra.

7.2. Dois anos após a compra do computador, o seu valor, em euros, é:

$$v = -300 \times 2 + 2100 = -600 + 2100 = 1500$$

Assim, e como sabemos (pelo item anterior) que o valor do computador na momento da sua compra era de 2100 euros, a desvalorização do computador nos dois anos após a sua compra é:

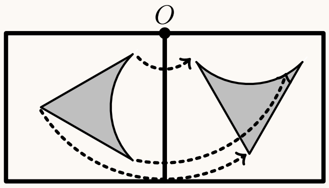
$$2100 - 1500 = 600$$

8. Como sabemos que:

- $3 \times 10^{-1} = 0{,}3$
- $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$

Então um número compreendido entre 3×10^{-1} e $\frac{1}{3}$, é, por exemplo: 0,31

9. Construindo o transformado da figura da esquerda por meio de uma rotação, com centro no ponto de O, amplitude 90° (como na figura ao lado), podemos observar que corresponde à figura da direita na opção (B).



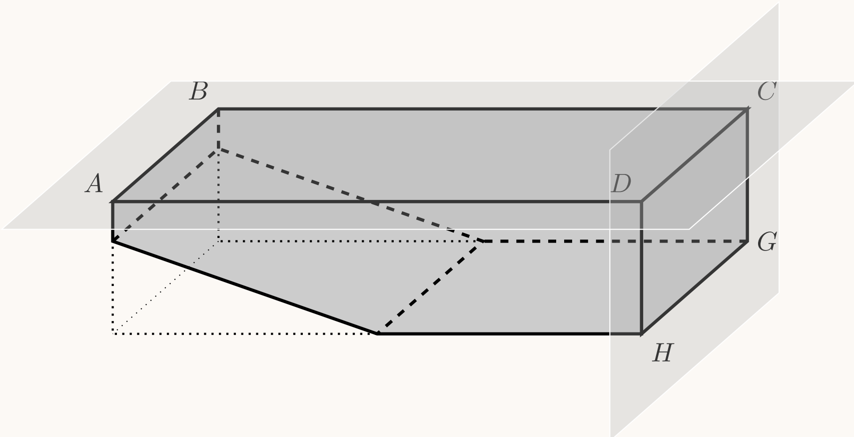
Resposta: **Opção B**

10.

10.1. Como num paralelepípedo retângulo duas faces que não sejam paralelas têm uma aresta em comum, ou seja, são correntes.

Assim, podemos considerar quaisquer dois planos em que um contenham faces não paralelas do paralelepípedo retângulo, por exemplo, os planos

ABC e CDH



10.2. Podemos determinar o volume da piscina, em metros cúbicos, como a diferença dos volumes do paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ e do prisma triangular $[IELJFK]$

Como $\overline{AD} = \overline{BC} = 20$ m, $\overline{DC} = \overline{HG} = 10$ m e $\overline{DH} = \overline{CG} = 2$ m, temos que, o volume do paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ é:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AD} \times \overline{DC} \times \overline{DH} = 20 \times 10 \times 2 = 400 \text{ m}^3$$

Como a altura do prisma triangular é $\overline{EF} = \overline{HG} = 10$ m, $\overline{EL} = \overline{EH} - \overline{LH} = 20 - 10 = 10$ m e $\overline{EI} = \overline{EA} - \overline{IA} = 2 - 0{,}6 = 1{,}4$ m, temos que, o volume do prisma triangular $[IELJFK]$ é:

$$V_{[IELJFK]} = A_{[EIL]} \times \overline{EF} = \frac{\overline{EL} \times \overline{EI}}{2} \times \overline{EF} = \frac{10 \times 1{,}4}{2} \times 10 = \frac{14}{2} \times 10 = 7 \times 10 = 70 \text{ m}^3$$

Desta forma, vem que o volume da piscina, em metros cúbicos, é:

$$V = 400 - 70 = 330 \text{ m}^3$$

Logo, fazendo a conversão para litros, de acordo com a igualdade indicada, temos que o volume da piscina, em litros, é:

$$V = 330 \times 1000 = 330\,000 \text{ litros}$$

11. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{x}{3} + \frac{1-x}{2} \geq x \Leftrightarrow \frac{x}{3}_{(2)} + \frac{1}{2}_{(3)} - \frac{x}{2}_{(3)} \geq \frac{x}{1}_{(6)} \Leftrightarrow \frac{2x}{6} + \frac{3}{6} - \frac{3x}{6} \geq \frac{6x}{6} \Leftrightarrow 2x + 3 - 3x \geq 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3x - 6x \geq -3 \Leftrightarrow -7x \geq -3 \Leftrightarrow 7x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{7}$$

C.S.$= \left]-\infty, \frac{3}{7}\right]$

12. Como o ângulo DOC é o ângulo ao centro relativo ao arco DC, a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{DC} = 60^\circ$$

Como o ângulo DAB é o ângulo inscrito relativo ao arco DB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{DB} = 2 \times D\hat{A}C = 2 \times 50 = 100^\circ$$

E a amplitude do arco CB é a diferença das amplitudes dos arcos DB e DC:

$$\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{DB} - \overset{\frown}{DC} = 100 - 60 = 40^\circ$$

13. Analisando cada uma das promoções, temos que:

- Promoção A:
  Usando o desconto maior - 25% - na compra do casaco (porque é o artigo mais caro), e o desconto de 10% na compra das calças, o valor da encomenda será:

  $$80 - \frac{25 \times 80}{100} + 30 - \frac{10 \times 30}{100} = 80 - 0{,}25 \times 80 + 30 - 0{,}1 \times 30 = 80 - 20 + 30 - 3 = 60 + 27 = 87 \text{ euros}$$

- Promoção B:
  Usando o desconto de 10 euros na compra do casaco, e o desconto de 20% na compra das calças, o valor da encomenda será:

  $$80 - 10 + 30 - \frac{20 \times 30}{100} = 70 + 30 - 0{,}2 \times 30 = 70 + 30 - 6 = 70 + 24 = 94 \text{ euros}$$

- Promoção B:
  Usando o desconto de 20% na compra do casaco, e o desconto de 10 euros na compra das calças, o valor da encomenda será:

  $$80 - \frac{20 \times 80}{100} + 30 - 10 = 80 - 0{,}2 \times 80 + 20 = 80 - 0{,}2 \times 80 + 20 = 80 - 16 + 20 = 64 + 20 = 84 \text{ euros}$$

Desta forma, podemos verificar que a opção que permite obter a encomenda ao preço mais baixo é a promoção B, usando o desconto de 20% na compra do casaco, e o desconto de 10 euros na compra das calças.