

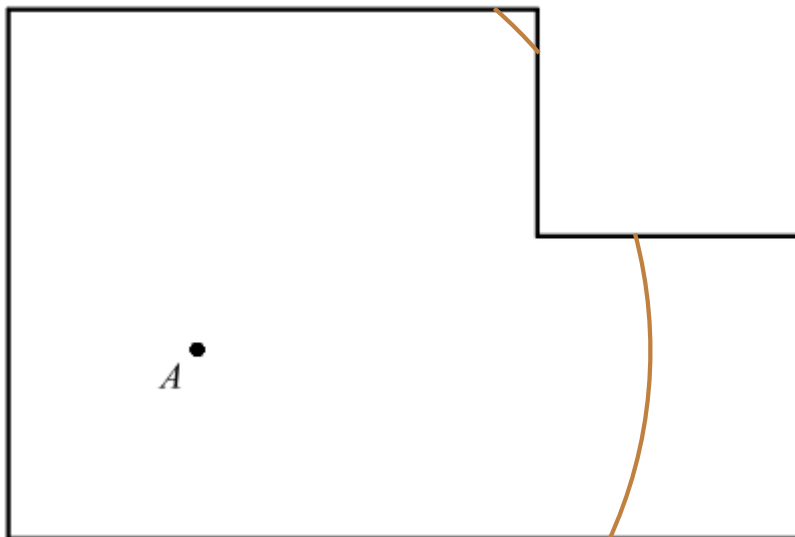
Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
2007 - 1ª Chamada

Proposta de resolução

1. Como a planta está desenhada à escala de 1:50 e o Miguel está sentado a 3 m do televisor, ou seja 300 cm, então a distância, em centímetros, do Miguel ao televisor (d), na planta da sala é dada por:

$$\frac{1}{50} = \frac{d}{300} \Leftrightarrow d = \frac{300}{50} \Leftrightarrow d = 6 \text{ cm}$$

Assim, todos os pontos da sala em que o televisor pode estar, correspondem à interseção do interior da sala com a circunferência de centro no ponto A e raio 6 cm:



2. Como o gráfico é parte de uma reta que contém a origem do referencial, sabemos que é uma função de proporcionalidade direta, ou seja que a expressão algébrica pode ser escrita na forma

$$d = k \times p, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Identificando as coordenadas de um ponto do gráfico, por exemplo, (1; 2,54), podemos calcular o valor da constante de proporcionalidade, substituindo as coordenadas na expressão algébrica:

$$2,54 = k \times 1 \Leftrightarrow \frac{2,54}{1} = k \Leftrightarrow 2,54 = k$$

E assim, temos que a diagonal do ecrã de um televisor (d), em centímetros é calculada em função do seu comprimento(p), em polegadas pela expressão $d = 2,54p$

Resposta: **Opção** $d = 2,54p$



3. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 3 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - \left(\frac{x}{2} - 2\right) = 3 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{x}{2} + 2 = 3 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{1(2)} - \frac{x}{2} + \frac{2}{1(2)} = \frac{3}{1(2)} \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{4}{2} = \frac{6}{2} \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x + 4 = 6 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 4 \\ y = \frac{x}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{2}{2} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$C.S = \{(2, -1)\}$$

4. Como 18 é um múltiplo de 9, sempre que o anúncio foi repetido no canal B, também foi repetido no canal A.

Assim, identificar os dias em que o anúncio foi repetido nos três canais, é equivalente a identificar os dias em que o anúncio foi repetido nos três B e C, ou seja, os múltiplos comuns entre 18 e 24 que sejam inferiores ou iguais a 180.

Assim temos que o conjunto dos múltiplos de 18 e 24, inferiores a 180, temos:

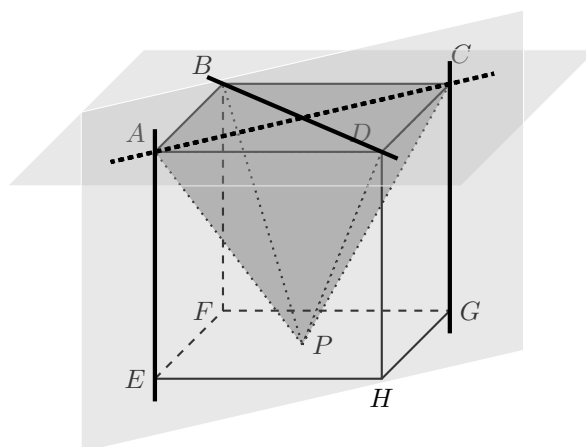
- $M_{18} = \{18, 36, 54, \mathbf{72}, 90, 108, 126, \mathbf{144}, 162, 180\}$
- $M_{24} = \{24, 48, \mathbf{72}, 96, 120, \mathbf{144}, 168\}$

Assim, temos que o anúncio passou nos três canais no dia 1, 72 dias depois, e 144 dias depois, ou seja, no 1º dia, no 73º dia e no 145º dia.

5.

5.1. Podemos considerar dois planos que contêm a reta $[AC]$:

- Considerando o plano ABC , podemos verificar que uma reta perpendicular à reta $[AC]$ é a reta $[BD]$ (porque contêm as diagonais de um mesmo quadrado)
- Considerando o plano ACG , podemos verificar que uma reta perpendicular à reta $[AC]$ é a reta $[AE]$ ou a reta $[CG]$ (porque contêm arestas concorrentes de um quadrado)



5.2. Como o cubo e a pirâmide têm a mesma base e a mesma altura, o volume do cubo é o triplo do volume da pirâmide:

$$V_{[ABCDEFGH]} = 3 \times V_{[ABCDP]} = 3 \times 9 = 27 \text{ cm}^3$$

E assim, podemos calcular o comprimento, a , da aresta do cubo, em centímetros:

$$a^3 = 27 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow a = 3 \text{ cm}$$



- 5.3. Como o recipiente inicialmente está vazio, ao iniciar a contagem do tempo a altura de água no recipiente é zero, ou seja, o gráfico da função contém o ponto de coordenadas $(0,0)$, pelo que podemos rejeitar os gráficos A e C.

Como o recipiente tem a forma de uma pirâmide e a quantidade de água que sai da torneira, por unidade de tempo é constante, então, com o avanço do tempo, será necessária mais água para que a mesma variação da altura da água, ou seja, a altura vai aumentar a um ritmo progressivamente menor, pelo que podemos rejeitar o gráfico B e identificar o gráfico D como a opção correta.

Resposta: **Opção** Gráfico D

6.

- 6.1. A diminuição do número de pessoas que viu televisão num computador entre janeiro e fevereiro, é:

$$680 - 663 = 17$$

Como 100% corresponde ao número de pessoas que viu televisão num computador em janeiro, (680), então, a percentagem correspondente à diminuição (17 pessoas) é dado por:

$$\frac{17 \times 100}{680} = 2,5\%$$

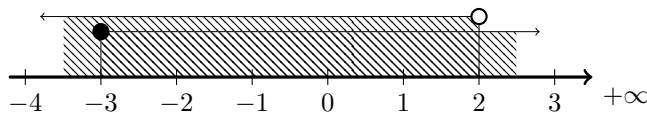
- 6.2. Como se sabe que a média do número de pessoas que viu televisão, num computador, (em milhares), nos primeiros quatro meses, foi de 680, designado por a o número de pessoas (em milhares) viram televisão num computador, e calculando o valor de a durante o mês de abril desse ano, vem que:

$$\frac{680 + 663 + 682 + a}{4} = 680 \Leftrightarrow \frac{2025 + a}{4} = 680 \Leftrightarrow 2025 + a = 680 \times 4 \Leftrightarrow a = 2720 - 2025 \Leftrightarrow a = 695$$

7. O valor $\frac{6}{5}$ não representa uma probabilidade porque é maior que 1, logo não pode ser a resposta correta à questão.

O valor $\frac{2}{5}$ representa uma probabilidade inferior a 0,5 (porque 2 é menos que metade de 5), logo não pode ser a resposta correta a esta questão, porque sabemos que mais de metade das vezes que o Miguel vê televisão depois das 22 horas chega atrasado à escola, no dia seguinte, pelo que a resposta correta deve ser um número superior a 0,5

8. Representando o conjunto $A \cup B$ na reta real, temos:



Assim temos que $A \cup B =] - \infty, 2[\cup] - 3, + \infty[=] - \infty, + \infty[$

Resposta: **Opção** $] - \infty, + \infty[$



9. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, escrevendo a equação na fórmula canônica e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x + (x - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow x + x^2 - 2 \times x + 1^2 = 3 \Leftrightarrow x + x^2 - 2x + 1 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(a = 1, b = -1 \text{ e } c = -2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{2} \vee x = \frac{1-3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4}{2} \vee x = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

$$\text{C.S.} = \{-1, 2\}$$

10. Num retângulo com 4 cm de comprimento e 3 cm de largura podemos calcular a medida da diagonal, d , recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow d^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow d^2 = 25 \underset{d>0}{\Rightarrow} d = \sqrt{25} \Leftrightarrow d = 5$$

Como sabemos que a medida do comprimento diagonal do televisor é $D = 70$, e os retângulos são semelhantes, temos que as medidas dos lados são proporcionais, tal como as medidas das diagonais, pelo que podemos calcular a medida, c , do comprimento do televisor:

$$\frac{c}{4} = \frac{D}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{4} = \frac{70}{5} \Leftrightarrow c = \frac{70 \times 4}{5} \Leftrightarrow c = \frac{280}{5} \Leftrightarrow c = 56 \text{ cm}$$

Analogamente podemos calcular a medida, l , da largura do televisor:

$$\frac{l}{3} = \frac{D}{d} \Leftrightarrow \frac{l}{3} = \frac{70}{5} \Leftrightarrow l = \frac{70 \times 3}{5} \Leftrightarrow l = \frac{210}{5} \Leftrightarrow l = 42 \text{ cm}$$

11. Escrevendo 9 na forma de uma potência de base 3 e usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

12.

- 12.1. Como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco CD , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{CD} = 2 \times \widehat{CAD} = 2 \times 30 = 60^\circ$$

- 12.2. Como o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E , relativamente ao ângulo EAD , o lado $[ED]$ é o cateto oposto e o lado $[AD]$ é a hipotenusa pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen}(E\hat{A}D) = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \text{sen } 30^\circ = \frac{\overline{ED}}{5} \Leftrightarrow 5 \times \text{sen } 30^\circ = \overline{ED}$$

Como $\text{sen } 30^\circ = 0,5$, determinando \overline{ED} , vem

$$\overline{ED} = 5 \times 0,5 = 2,5$$



12.3. Como o triângulo $[ADE]$ é retângulo em E , o ângulo ADE é reto, e assim o ângulo CDE também é reto (porque ADE e CDE são ângulos suplementares).

Como o segmento de reta $[BD]$ é um diâmetro, é um eixo de simetria da circunferência, e assim a reflexão do ponto A , relativamente à reta BD é o ponto C (porque as retas AC e BD são perpendiculares), e assim vem que o ponto E é o ponto médio da corda $[AC]$, pelo que $\overline{AE} = \overline{EC}$

Como o lado $[DE]$ é comum aos dois triângulos, temos que os dois triângulos têm dois pares de lados com o mesmo comprimento e o ângulo por eles formado tem a mesma amplitude, pelo que os triângulos são geometricamente iguais (critério LAL).

