Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2007, 2.ª chamada)**

Proposta de resolução

1. Organizando todas as somas que o Paulo pode obter, com recurso a uma tabela, temos:

+	1	2	3	4	5	6
-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
-5	-4	-3	-2	-1	0	1
-4	-3	-2	-1	0	1	2
-3	-2	-1	0	1	2	3
-2	-1	0	1	2	3	4
-1	0	1	2	3	4	5

Assim, é possível verificar que, de entre as 36 configurações possíveis de obter no lançamento dos 2 dados (ou seja 36 casos possíveis), em 15 delas a soma dos números saídos é um número negativo (ou seja 15 casos favoráveis).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade da soma ser um número negativo, é:

$$p = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

2.

2.1. Como os segmentos de reta são semelhantes, a razão dos seus comprimentos é igual à constante de proporcionalidade (r).
Como se trata de uma redução, a razão é inferior a 1, logo a razão é a divisão do menor comprimento pelo maior, ou seja:

$$r = \frac{0{,}8}{4} = 0{,}2$$

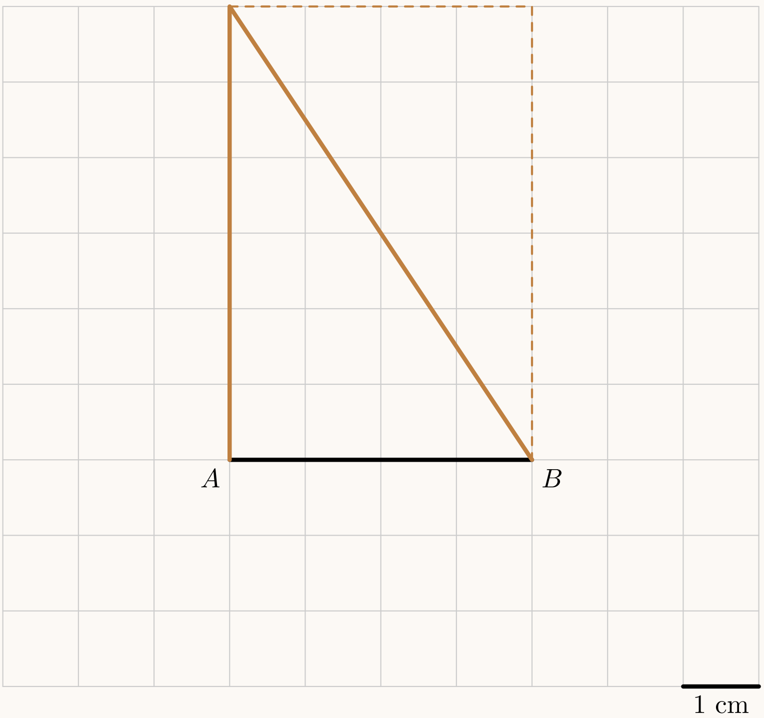
Resposta: **Opção** 0,2

2.2. Construindo um retângulo sobre o segmento $[AB]$ com área 24 cm^2, podemos dividir o retângulo pela diagonal para obter um triângulo com metade da área , ou seja, um triângulo com 12 cm^2

Para que o retângulo tenha 24 cm^2, como um dos lados tem medida 4, temos que o outro lado deve ter medida 6, porque $4 \times 6 = 24$

Podemos ainda verificar que temos um triângulo cujas medidas da base e da altura são 4 cm e 6 cm, pelo que a área é:

$$A = \frac{4 \times 6}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}^2$$



3. Seja x o custo do telemóvel do João sem o desconto de 15%.
Assim temos que:

- o valor do desconto no telemóvel do Paulo é de $75 \times \frac{20}{100}$
- o valor do desconto no telemóvel do João é de $x \times \frac{15}{100}$
- Como o valor dos dois descontos, em euros, foi igual, vem que: $75 \times \frac{20}{100} = x \times \frac{15}{100}$

Resolvendo a equação, vem que:

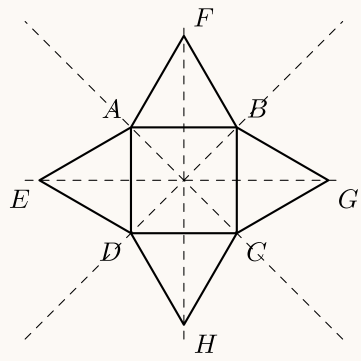
$$75 \times \frac{20}{100} = x \times \frac{15}{100} \Leftrightarrow \frac{75 \times 20}{100} = \frac{x \times 15}{100} \Leftrightarrow 75 \times 20 = 15x \Leftrightarrow \frac{1500}{15} = x \Leftrightarrow 100 = x$$

Assim temos que o telemóvel do João, sem o desconto de 15%, teria custado 100 euros.

4. Se duas grandezas são inversamente proporcionais, então à variação de uma delas corresponde uma variação inversa na mesma proporção, ou seja, se x aumenta para o dobro, para o triplo, ou para o quádruplo, então y diminui para metade, para a terça parte ou para a quarta parte, respetivamente.

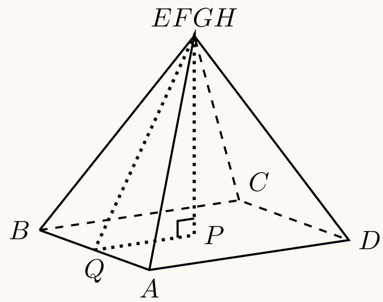
Resposta: **Opção** Se x aumenta para o dobro, então y diminui para metade.

5.



5.1. Desenhando sobre o quadrado as duas diagonais e as duas perpendiculares aos lados pelos pontos médios podemos visualizar todos os eixos de simetria do quadrado.

Logo, a figura tem quatro eixos de simetria.



5.2. Desenhando um esboço do sólido (representado na figura ao lado), temos que o sólido é uma pirâmide quadrangular.

Como $\overline{AB} = 6$, temos que

$$\overline{QP} = \overline{QA} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

E como a altura relativa ao triângulo $[ABF]$ relativa à base $[AB]$ é 5,

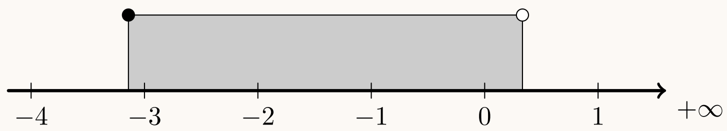
$$\overline{QF} = 5$$

A altura da pirâmide é o segmento $[PF]$, e como a altura á perpendicular à base, o triângulo $[QPF]$ é retângulo, pelo que, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, calculamos a altura da pirâmide, ou seja a medida do comprimento do segmento $[PF]$:

$$\overline{QF}^2 = \overline{QP}^2 + \overline{PF}^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + \overline{PF}^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + \overline{PF}^2 \Leftrightarrow 25 - 9 = \overline{PF}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16 = \overline{PF}^2 \underset{\overline{PF}>0}{\Rightarrow} \sqrt{16} = \overline{PF} \Leftrightarrow 4 = \overline{PF}$$

6. Como $-\pi \approx -3{,}14$ e $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$, representando na reta real o intervalo $\left[-\pi, \frac{1}{3}\right[$, temos:



Assim, vem que o conjuntos dos números inteiros relativos que pertencem ao intervalo $\left[-\pi, \frac{1}{3}\right[$, é

$$\{-3, -2, -1, 0\}$$

7. Para determinar o número médio de chamadas telefónicas feitas, ontem, pelos alunos da turma do Paulo, devemos percorrer as seguintes etapas:

   - Registar o número de chamadas feitas ontem por cada um dos alunos da turma do Paulo.
   - Somar todos os números registados, ou seja, calcular o total de chamadas feitas ontem por todos os alunos da turma do Paulo.
   - Contar o número de alunos de alunos da turma do Paulo.
   - Dividir a soma do número de chamadas pelo número de alunos da turma do Paulo.

8.

8.1. Como o Paulo tem 80 cêntimos disponíveis, o gráfico da função deve intersetar o eixo vertical no ponto de coordenadas (0,80) (porque antes de fazer a chamada, ou seja, aos zero segundos, corresponde uma quantia de dinheiro de 80 cêntimos). Assim podemos rejeitar os gráficos A e D porque intersetam o eixo vertical nos pontos de coordenadas (0,70) e (0,0), respetivamente.

Como o preço da chamada para a rede A é de 0,5 cêntimos por segundo, com o saldo de 80 cêntimos, o Paulo consegue falar durante $\frac{80}{0{,}5} = 160$ segundos antes que o dinheiro se esgote, ou seja, o gráfico deve intersetar o eixo horizontal no ponto de coordenadas (160,0), o que não acontece no gráfico B.

Assim temos que o gráfico C, é o que representa a situação descrita.

Resposta: **Opção C**

8.2. Designando por a o tempo, segundos, das chamadas efetuadas ontem pelo Paulo para a rede A e por b o tempo, segundos, das chamadas efetuadas ontem pelo Paulo para a rede B, como a soma dos tempos de duração dessas chamadas foi de 60 segundos

$$a + b = 60$$

Por outro lado, se em cada segundo o Paulo gasta 0,5 cêntimos para a rede A, então, em a segundos gasta $0{,}5 \times a$ cêntimos, ou simplesmente $0{,}5a$ cêntimos.
Da mesma forma, para a rede B, em b segundos o Paulo gasta $0{,}6a$ cêntimos. cêntimos.
Como no total, o Paulo gastou 35 cêntimos, temos que

$$0{,}5a + 0{,}6b = 35$$

Assim, podemos escrever um sistema e determinar o valor de a:

$$\begin{cases} a + b = 60 \\ 0{,}5a + 0{,}6b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ 0{,}5(60 - b) + 0{,}6b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ 30 - 0{,}5b + 0{,}6b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ 0{,}1b = 35 - 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ 0{,}1b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - b \\ b = \frac{5}{0{,}1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 60 - 50 \\ b = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 50 \end{cases}$$

Assim podemos verificar que o tempo total de duração das chamadas efetuadas pelo Paulo, para a rede A, foi de 10 segundos.

9. Para que um número seja divisível por 2, tem que ser par, e para que seja divisível por 3, a soma dos seus algarismos deve ser um múltiplo de 3.

   Assim, como o algarismo dos milhares tem que ser 5, se escolhermos o algarismo 1 para as centenas (para que a soma seja divisível por 3), e zeros para os algarismos das dezenas e das unidades (para que o número seja par), obtemos um número nas condições do enunciado:

$$5100$$

10. Começamos por determinar o comprimento da sombra da vara. Como a vara foi colocada perpendicularmente ao solo, a vara e a sua sombra definem um ângulo reto (e um triângulo retângulo), pelo que, relativamente ao ângulo de amplitude 43°, a vara (de comprimento 1,8 m) é o cateto oposto e a sombra da vara é o cateto adjacente.
    Assim, designado por v o comprimento da sombra da vara, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que:

$$\operatorname{tg} 43^\circ = \frac{1{,}8}{v} \Leftrightarrow v = \frac{1{,}8}{\operatorname{tg} 43^\circ}$$

    Como $\operatorname{tg} 43^\circ \approx 0{,}93$, vem que: $v \approx \dfrac{1{,}8}{0{,}93} \approx 1{,}94$ e assim, a sombra da antena é $14 + 1{,}94 \approx 15{,}94$ m

    Como os dois triângulos (um formado pela antena e a respetiva sombra e o outro formado pela vara e pela respetiva sombra são semelhantes, porque têm dois ângulos iguais - o ângulo de amplitude 43° que é comum e os ângulos retos), então os lados correspondentes são proporcionais, ou seja

$$\frac{h}{15{,}94} = \frac{1{,}8}{1{,}94} \Leftrightarrow h = \frac{1{,}8 \times 15{,}94}{1{,}94} \Leftrightarrow h \approx 14{,}79$$

    Pelo que a altura da antena é de, aproximadamente, 15 m.

11. Resolvendo a inequação, temos

$$x + \frac{1-2x}{3} \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1_{(6)}} + \frac{1}{3_{(2)}} - \frac{2x}{3_{(2)}} \leq \frac{x}{2_{(3)}} \Leftrightarrow \frac{6x}{6} + \frac{2}{6} - \frac{4x}{6} \leq \frac{3x}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x + 2 - 4x \leq 3x \Leftrightarrow 6x - 4x - 3x \leq -2 \Leftrightarrow -x \leq -2 \Leftrightarrow x \geq 2$$

    C.S.$=[2, +\infty[$

12. Simplificando as frações temos:

    - $\left(\dfrac{1}{9}\right)^2 = \dfrac{1^2}{9^2} = \dfrac{1}{81}$
    - $\dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$
    - $\dfrac{1}{9} \div 2 = \dfrac{1}{9} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{18}$
    - $2 \div \dfrac{1}{9} = 2 \times 9 = 18$

    E assim verificamos que, de entre os números apresentados o menor é $\dfrac{1}{81}$, ou seja, $\left(\dfrac{1}{9}\right)^2$

    Resposta: **Opção** $\left(\dfrac{1}{9}\right)^2$

13. Como o arco AB tem 180° de amplitude, então o lado $[AB]$ do triângulo é um diâmetro da circunferência, pelo que, independentemente da posição do vértice C, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo.
Assim como o triângulo $[ABC]$ tem um ângulo reto não é um triângulo equilátero, pois para o ser, todos os ângulos internos teriam amplitude de 60°

14.