Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
2008 - 2ª Chamada

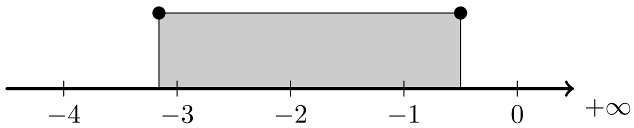
Proposta de resolução

1. Como a e b são números primos diferentes são primos entre si, ou seja não têm fatores comuns na sua decomposição em fatores primos. De resto a decomposição em fatores primos de cada um dos números é o próprio número, pelo que, como o mínimo múltiplo comum é o produto dos fatores primos comuns e não comuns (cada um elevado ao maior expoente), temos que

$$\text{m.m.c. } (a,b) = a \times b$$

Resposta: **Opção** $a \times b$

2. Como $-\sqrt{10} \approx -3{,}16$, representando na reta real o intervalo $\left[-\sqrt{10}, -\frac{1}{2}\right]$, temos:



Assim, verificando que $-4 \notin \left[-\sqrt{10}, -\frac{1}{2}\right]$, podemos verificar que o menor número inteiro pertencente a este intervalo é -3

Resposta: **Opção** -3

3. Como o produto de um número ímpar por um número par é um número par, então existem números pares que têm divisores ímpares diferentes de 1, por exemplo, $6 = 3 \times 2$ é um número par, cujo conjunto de divisores é

$$D_6 = \{1,2,3,6\}$$

Assim, 6 é par e tem um divisor ímpar, maior que 1, concretamente o 3, pelo que a frase é falsa.

4.

4.1. Da observação do gráfico podemos verificar que:

- $5+3=8$ alunos nunca doaram sangue
- $6+7=13$ alunos doaram sangue uma vez
- $4+5=9$ alunos doaram sangue duas vezes

Desta forma o número total de alunos da turma é $8+13+9=30$

Assim, calculando a percentagem relativa a cada uma das opções vem:

- Percentagem de alunos que nunca doaram sangue: $\dfrac{8\times 100}{30} \approx 27\%$
- Percentagem de alunos que doaram sangue duas vezes: $\dfrac{9\times 100}{30} = 30\%$
- Percentagem de alunos que doaram sangue mais do que uma vez, ou seja, duas vezes: $\dfrac{9\times 100}{30} = 30\%$
- Percentagem de alunos que doaram sangue menos que duas vezes, ou seja, doaram sangue por uma vez ou nunca doaram sangue: $\dfrac{(13+8)\times 100}{30} = \dfrac{21\times 100}{30} = 70\%$

Pelo que se concluí que, de entre as opções apresentadas, a percentagem relativa aos alunos que doaram sangue duas vezes é a única correta.

Resposta: **Opção** 30% dos alunos doaram sangue duas vezes.

4.2. O número total de alunos da turma da Beatriz, ou seja, o número de casos possíveis, é:

$$5+3+6+7+4+5=30$$

O número de casos favoráveis, que corresponde ao número de raparigas que doou sangue menos do que duas vezes, ou seja, que nunca doaram sangue ou doaram apenas por uma vez, é de

$$3+7=10$$

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando o valor da probabilidade e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

5.

5.1. Como 1 hora tem 60 minutos, então $\dfrac{1{,}5\times 10^3}{60}$ é o total de horas que a turma vai treinar antes do torneio.

Simplificando o quociente, temos:

$$\frac{1{,}5\times 10^3}{60} = \frac{1{,}5\times 10^3}{6\times 10} = \frac{1{,}5}{6}\times\frac{10^3}{10} = 0{,}25\times 10^{3-1} = 2{,}5\times 10^{-1}\times 10^2 = 2{,}5\times 10^{-1+2} = 2{,}5\times 10 = 25$$

Ou seja, os alunos irão realizar 25 treinos antes do torneio.

5.2. Da observação do gráfico podemos verificar que:

- A equipa A ganhou todos os jogos - ou seja ganhou com a equipa B, com a equipa C e com a equipa D
- A equipa B, ganhou 2 jogos e perdeu 1. Como perdeu contra a equipa A, ganhou contra a equipa C e contra a equipa D
- A equipa C, ganhou 1 jogo e perdeu 2. Como perdeu contra a equipa A e contra a equipa B, o jogo que ganhou foi contra a equipa D
- A equipa D, perdeu todos os jogos, mas estes já foram todos identificados anteriormente

Assim, preenchendo a tabela, vem:

Jogo	**Turma vencedora**
A com **B**	**A**
A com **C**	**A**
A com **D**	**A**
B com **C**	**B**
B com **D**	**B**
C com **D**	**C**

6. Como a representação gráfica da função é uma hipérbole, ou seja, é uma função de proporcionalidade inversa, sabemos que $y = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Identificando as coordenadas de um ponto do gráfico, por exemplo, o ponto (1,40), e substituindo estas coordenadas na expressão anterior, podemos determinar o valor da constante k:

$$40 = \frac{k}{1} \Leftrightarrow 40 = k$$

Assim, substituindo o valor de k na expressão inicial, obtemos a representação analítica da função:

$$y = \frac{40}{x}$$

Resposta: **Opção** $y = \frac{40}{x}$

7. Resolvendo a inequação, temos

$$x + \frac{4-3x}{2} \leq -5 \Leftrightarrow \frac{x}{1}_{(2)} + \frac{4-3x}{2} \leq -\frac{5}{1}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{2x}{2} + \frac{4-3x}{2} \leq -\frac{10}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4 - 3x \leq -10 \Leftrightarrow 2x - 3x \leq -10 - 4 \Leftrightarrow -x \leq -14 \Leftrightarrow x \geq 14$$

C.S.=$[14, +\infty[$

8. Se aos 20 cm subtrairmos a altura da boneca mais pequena, obtemos:

$$20 - 1 = 19 \text{ cm}$$

Ou seja, se existir uma boneca com 20 cm, então os 19 cm de diferença para a boneca mais pequena estão repartidos em partes iguais de 0,75 cm, que corresponde à diferença de alturas entre duas bonecas consecutivas.

Como $\frac{19}{0{,}75} \approx 25{,}3$ não é um número inteiro, não é possível, adicionar a 1, 0,75 sucessivamente até atingir 20, ou seja, não existe, na série das bonecas descrita, uma boneca com 20 cm de altura.

Podemos confirmar esta impossibilidade calculando a altura da 25ª boneca ($1 + 25 \times 0{,}75 = 19{,}75$) e da 26ª boneca ($1 + 26 \times 0{,}75 = 20{,}5$).

9.

9.1. Como na descrição do percurso do Luís existem dois períodos em que esteve parado (ou seja em que distância a casa se manteve constante), e o primeiro corresponde ao arranjo do pneu e o segundo ao visionamento do jogo, então, no gráfico, a mudança do pneu corresponde ao segmento de reta horizontal localizado à esquerda.
Identificando o segmento de reta que corresponde ao arranjo do pneu, podemos verificar que a distância a casa se manteve constante entre os 10 e os 20 minutos, ou seja, o Luís demorou 10 minutos a ser arranjar o furo.

9.2. Como a distância a casa é zero no aos zero minutos (que corresponde às 10 horas e 30 minutos) e só volta a ser zero após 140 minutos, então o Luís voltou a casa 140 minutos depois das 10 horas e 30 minutos.
Como 140 minutos podem ser escritos como 120+20, significa que o Luís voltou a casa 2 horas e 20 minutos depois de ter saído, ou seja às 12 horas e 50 minutos.

9.3. Identificando, no gráfico, o segmento de reta horizontal, localizado à direita como correspondente ao período de tempo em que o Luís esteve parado, a ver o jogo, podemos verificar que esteve a ver o jogo entre os 50 e os 90 minutos depois de ter saído de casa, ou seja esteve a ver o jogo $90 - 50 = 40$ minutos.
Como o jogo tinha dois períodos, com a duração de 20 minutos cada, e um intervalo de 5 minutos entre os dois períodos, o tempo total entre o início e o final do jogo é de $20 + 5 + 20 = 45$ minutos.
Como o Luís só esteve a ver o jogo durante 40 minutos e o tempo total de visionamento do jogo era de 45 minutos, então o Luís não assistiu ao jogo todo.

10. Como os ângulos AOC e β são suplementares, e $\beta = 60°$, então temos que:

$$A\hat{O}C + \beta = 180 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 180 - \beta \Leftrightarrow A\hat{O}C = 180 - 60 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 120°$$

Como o triângulo $[AOC]$ é isósceles, porque ambos os lados $[AO]$ e $[OC]$ são raios da circunferência, então $\overline{AO} = \overline{OC}$; e num triângulo a lados com a mesma medida opõem-se ângulos com a mesma amplitude, pelo que $O\hat{A}C = \alpha$
Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então, calculando a amplitude em graus do ângulo α, vem que:

$$O\hat{A}C + \alpha + A\hat{O}C = 180 \Leftrightarrow \alpha + \alpha + 120 = 180 \Leftrightarrow 2\alpha = 180 - 120 \Leftrightarrow 2\alpha = 60 \Leftrightarrow \alpha = \frac{60}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30°$$

11. Recorrendo ao Teorema de Pitágoras para calcular a medida do comprimento do outro cateto, c, e escrevendo o resultado na forma de valor exato, temos

$$15^2 = 10^2 + c^2 \Leftrightarrow 225 = 100 + c^2 \Leftrightarrow 225 - 100 = c^2 \Leftrightarrow 125 = c^2 \underset{c>0}{\Rightarrow} \sqrt{125} = c$$

12. Como a área do círculo é dada por $A = \pi r^2$, temos que:

$$A = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{A}{r^2} = \pi$$

E como $P = 2\pi r$ e $2\pi = d$, vem que:

$$P = 2\pi r \Leftrightarrow \frac{P}{2r} = \pi \Leftrightarrow \frac{P}{d} = \pi$$

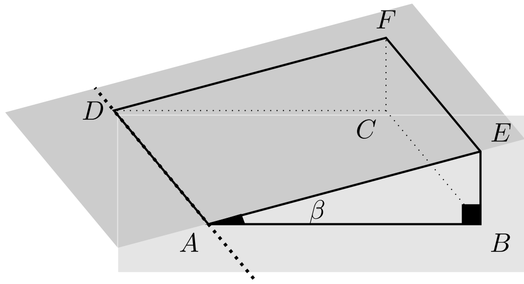
Pelo que, de entre as igualdades apresentadas, $\frac{A}{2r} = \pi$ é a única que não é verdadeira.

Resposta: **Opção** $\frac{A}{2r} = \pi$

13.

13.1. Como a reta AD é perpendicular ao plano que contém a face $[ABE]$ e está contida no plano que contém a face $[AEFD]$, então os dois planos são perpendiculares.

Resposta: **Opção** O plano que contém a face $[ABE]$ é perpendicular ao plano que contém a face $[AEFD]$



13.2. Sabemos que $[ABE]$ é um triângulo retângulo em A e, relativamente ao ângulo BAE, ou seja, ao ângulo β, o lado $[BE]$ é o cateto oposto e o lado $[AB]$ é o cateto adjacente.
Assim, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, e substituindo as medidas dos lados, temos que:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{42}{300}$$

Como $\frac{42}{300} = 0{,}14$, procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo β às unidades, temos que

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1}(0{,}14) \approx 8^\circ$$

13.3. Calculando a área da base do prisma, ou seja do triângulo ABE, temos que:

$$A_{[ABE]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BE}}{2} = \frac{300 \times 42}{2} = 6300 \text{ cm}^3$$

E assim, considerando a aresta $[BC]$ como a altura do prisma e calculando o volume do prisma, em centímetros cúbicos, vem:

$$V_{[ABCDEF]} = A_{[ABE]} \times \overline{BC} = 6300 \times 250 = 1\,575\,000 \text{ cm}^3$$