Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2010, 1.ª chamada)**

Proposta de resolução

1. Organizando as escolhas possíveis da Teresa numa tabela, temos

	Maria(M)	Inês(I)	Joana(J)
Sábado(s)	Ms	Is	Js
Domingo(d)	Md	Id	Jd

Assim, podemos observar que existem 6 escolhas possíveis, das quais apenas uma corresponde a selecionar a Maria e o sábado para ir ao arraial, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, temos que:

$$p = \frac{1}{6}$$

Resposta: **Opção** $\frac{1}{6}$

2. Designando por n o número de rifas que a Alice comprou, como foram vendidas 250 rifas, recorrendo à Regra de Laplace temos que a probabilidade de a Alice ganhar o prémio é $\frac{n}{250}$

Como sabemos que esta probabilidade é $\frac{1}{25}$, estabelecendo a igualdade e determinado o valor de n, vem:

$$\frac{n}{250} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow n = \frac{250}{25} \Leftrightarrow n = 10$$

Resposta: **Opção** 10

3. Observando o gráfico, podemos verificar que no dia 11 foram vendidos 16 vasos, no dia 12 foram vendidos 20 vasos e no dia 13 foram vendidos 25 vasos.
Como nos primeiros 10 dias forma vendidos, em média, 3 vasos por dia, ou seja 30 vasos ($3 \times 10 = 30$), calculando a média dos vasos vendidos nos 13 dias, temos:

$$\overline{x} = \frac{30 + 16 + 20 + 25}{13} = \frac{91}{13} = 7 \text{ vasos}$$

Resposta: **Opção** 7

4. Como a Beatriz contou os rebuçados de 2 em 2 e não sobrou nenhum, e depois contou de 5 em 5 e também não sobrou nenhum, então o número de rebuçados é múltiplo de 2 e também de 5, pelo que é múltiplo de 10.

   Como quando a Beatriz contou de 3 em 3, sobraram 2 rebuçados, e o saco tinha mais de 60 rebuçados, devemos procurar um múltiplo de 10, maior que 60, cujo resto da divisão inteira por 3 seja 2:

   - $70 \div 3 = 23 + 1$
   - $80 \div 3 = 26 + 2$

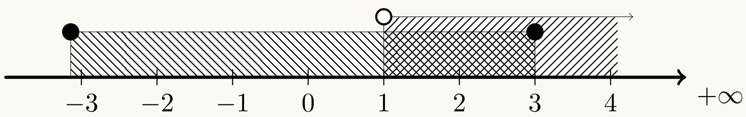
   Logo, de acordo com as condições definidas, o menor número de rebuçados que o saco que a Beatriz comprou pode ter é 80

5. Analisando cada uma das opções, temos que

   - $\sqrt{25} = 5$, logo $\sqrt{25} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{25}$ não é um número irracional
   - $\sqrt{2{,}5} = \sqrt{\frac{25}{10}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$, logo, como $\sqrt{10}$ é um número irracional, também $\sqrt{2{,}5}$ é um número irracional
   - $\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, logo $\sqrt{0{,}25} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{0{,}25}$ não é um número irracional
   - $\sqrt{0{,}0025} = \sqrt{\frac{25}{10000}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{10000}} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, logo $\sqrt{0{,}0025} \in \mathbb{Q}$, ou seja $\sqrt{0{,}0025}$ não é um número irracional

   Resposta: **Opção** $\sqrt{2{,}5}$

6. Representando os dois intervalos indicados na definição do conjunto C na reta real, temos:



   Assim temos que $[-\pi{,}3] \cap]1, +\infty[=]1{,}3]$

   Resposta: **Opção** $]1{,}3]$

7. Designando por x a massa de uma caixa vazia, e por y a massa de um bolo, a afirmação ≪*uma caixa com quatro bolos tem uma massa de 310 gramas*≫, pode ser traduzida por

$$x + 4y = 310$$

Da mesma forma, a afirmação ≪*duas caixas, cada uma com três bolos, têm uma massa total de 470 gramas*≫, ou seja a massa de duas caixas e seis bolos pode ser traduzida por

$$2x + 6y = 470$$

Assim, podemos escrever um sistema e determinar o valor de x:

$$\begin{cases} x + 4y = 310 \\ 2x + 6y = 470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ 2(310 - 4y) + 6y = 470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ 620 - 8y + 6y = 470 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ -2y = 470 - 620 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ -2y = -150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4y \\ y = \dfrac{-150}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 4 \times 75 \\ y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 310 - 300 \\ y = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 75 \end{cases}$$

Assim, temos que, a massa de cada caixa vazia, ou seja o valor de x em gramas, é de 10 gramas.

8. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{1}{3} - 2x < \frac{5}{3} + \frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}_{(2)} - \frac{2x}{1}_{(6)} < \frac{5}{3}_{(2)} + \frac{x}{2}_{(3)} \Leftrightarrow \frac{2}{6} - \frac{12x}{6} < \frac{10}{6} + \frac{3x}{6} \Leftrightarrow 2 - 12x < 10 + 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -12x - 3x < 10 - 2 \Leftrightarrow -15x < 8 \Leftrightarrow 15x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{15}$$

C.S.$= \left] -\dfrac{8}{15}, +\infty \right[$

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x(x-3) + 2x = 6 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 1,\ b = -1 \text{ e } c = -6)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1+5}{2} \vee x = \frac{1-5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$$

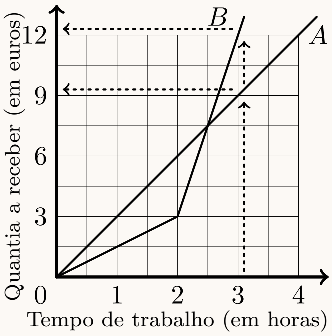
C.S.$=\{-2{,}3\}$

10.

10.1. Como o gráfico A é parte de uma reta que contém a origem do referencial, a função correspondente é uma função de proporcionalidade direta.
Assim, identificando no gráfico que o ponto de coordenadas (1,3) pertence ao gráfico A, podemos garantir que a uma hora de trabalho corresponde (de acordo com esta função) um pagamento de 3 euros, pelo que, a um tempo de trabalho de 6 horas corresponde um pagamento de $6 \times 3 = 18$ euros.

10.2. Observando o gráfico, podemos verificar que o pagamento correspondente a 3 horas de trabalho é maior na função representada pelo gráfico B do que na função correspondente ao gráfico A

Como os dois irmãos vão trabalhar ambos 3 horas e o Carlos irá receber mais, o gráfico B é o que representa a relação entre o tempo de trabalho do Carlos e a quantia que ele receberá por esse trabalho.



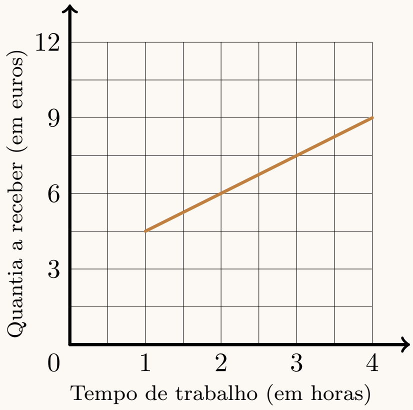
10.3. Como a Laura recebe 3 euros para o bilhete e mais 1,5 euros por cada hora de trabalho, por uma hora de trabalho, a Laura irá receber

$$3 + 1{,}5 = 4{,}5 \text{ euros}$$

Ao fim de 4 horas deve receber

$$3 + 1{,}5 \times 4 = 9 \text{ euros}$$

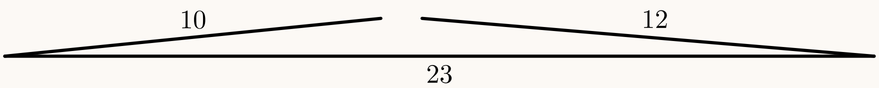
Ou seja, o gráfico que estabelece a quantia a receber pela Laura, em função do tempo de trabalho, para valores do tempo de trabalho compreendidos entre 1 hora e 4 horas (inclusive), é o segmento de reta de extremos $(1; 4{,}5)$ e $(4; 9)$



11. Como sabemos que num triângulo a soma dos comprimentos dos lados menores é superior ao comprimento do lado maior, e, neste caso

$$10 + 12 < 23$$

logo não pode existir um triângulo com estes comprimentos, como se ilustra na figura seguinte.



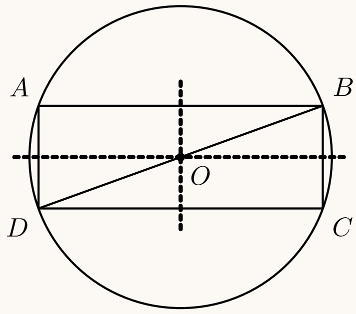
12.

12.1. Como o ângulo BDA é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times B\hat{D}A = 2 \times 70 = 140°$$

12.2. Desenhando sobre o retângulo as duas perpendiculares aos lados pelos pontos médios podemos visualizar os 2 eixos de simetria do retângulo (as diagonais não são eixos de simetria).

Logo, o retângulo $[ABCD]$ tem 2 eixos de simetria



12.3. Como o triângulo $[ABD]$ é retângulo em A, o lado $[BD]$ é a hipotenusa, e relativamente ao ângulo BDA, $[AB]$ é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

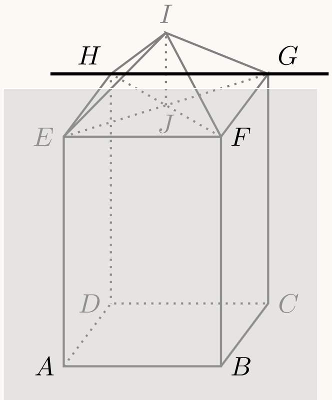
$$\operatorname{sen}(B\hat{D}A) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 70^\circ = \frac{4{,}35}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4{,}35}{\operatorname{sen} 70^\circ}$$

Como $\operatorname{sen} 70^\circ \approx 0{,}940$, vem que: $\overline{BD} \approx \dfrac{4{,}35}{0{,}940} \approx 4{,}63$ cm

13.

13.1. Como o plano ABF contém uma face do prisma e a reta HG contém uma aresta da face oposta, e as faces opostas do prisma estão em planos paralelos, então a reta HG é estritamente paralela ao plano ABF

Resposta: **Opção C**



13.2. Como a base do prisma $[ABCDEFGH]$ é um quadrado, o volume do prisma é

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{AB}^2 \times \overline{BF} = 13^2 \times 19 = 3\,211 \text{ cm}^3$$

Como a base da pirâmide $[EFGHI]$ tem a área igual à base do prisma, o volume da pirâmide é:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{IJ} = \frac{1}{3} \times 13^2 \times 6 = 338 \text{ cm}^3$$

E o volume do sólido pode ser calculado como a soma dos volumes do prisma e da pirâmide, pelo que o Volume do sólido é:

$$V_S = V_{[ABCDEFGH]} + V_{[EFGHI]} = 3\,211 + 338 = 3\,549 \text{ cm}^3$$

14.