# Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
# 2013 - 1ª Chamada

## Proposta de resolução

1. Como o João escolhe 1 de entre 9 bolas, o número de casos possíveis para as escolhas do João são 9.

   Como os números 2, 3, 5 e 7 são primos, têm apenas 2 divisores (o próprio número e o número 1).
   O número 1 tem também apenas um divisor.
   Os números 4, 6, 8 e 9 têm mais do que 2 divisores porque para além do próprio número e do número 1, são também todos divisíveis por 2 ou 3.
   Ou seja, o número de casos favoráveis é 4.

   Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de que o João escolha uma bola com um número que tenha 2 divisores é

   $$p = \frac{4}{9}$$

   Resposta: **Opção C**

2.

   2.1. Como a turma da Rita tem um número par de alunos, a mediana é a média dos dois valores centrais, da lista ordenada das idades.
   Como 50% dos alunos tem 13 anos, e os restantes têm 14 e 15 anos, os valores centrais, na lista ordenada das idades são 13 e 14.

   $$\underbrace{13\ 13\ \dots\ 13\ 13}_{50\%}\ \underbrace{14\ \dots\ 14\ 15\ \dots\ 15}_{50\%}$$

   Logo a mediana, $\tilde{x}$, das idades dos alunos da turma da Rita é

   $$\tilde{x} = \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

   2.2. Quando a classe tinha vinte alunos, a média das idades destes vinte alunos era de 13,2 anos, o que poderia ser escrito como

   $$\frac{k}{20} = 13{,}2 \ \Leftrightarrow\ k = 13{,}2 \times 20 \ \Leftrightarrow\ k = 264$$

   em que $k$ é a soma das idades dos 20 alunos.

   Como abandonaram a classe 2 alunos, o número total de alunos passou a ser de 18, e como estes alunos tinham 15 anos e a idade dos restantes não se alterou, a soma das idades dos 18 alunos passou a ser de

   $$k - 15 \times 2 = 264 - 30 = 234$$

   Logo a média, $\overline{x}$, dos 18 alunos é

   $$\overline{x} = \frac{234}{18} = 13$$

3. Aplicando repetidamente a propriedade referida, até obter o máximo divisor comum de dois números iguais, temos que

$$\begin{array}{l|l}
\text{Como } 80 - 32 = 48 & \text{m.d.c.}(80{,}32) = \text{m.d.c.}(48{,}32) \\
\text{Como } 48 - 32 = 16 & \text{m.d.c.}(48{,}32) = \text{m.d.c.}(32{,}16) \\
\text{Como } 32 - 16 = 16 & \text{m.d.c.}(32{,}16) = \text{m.d.c.}(16{,}16)
\end{array}$$

Como m.d.c.(16,16) = 16, então temos que

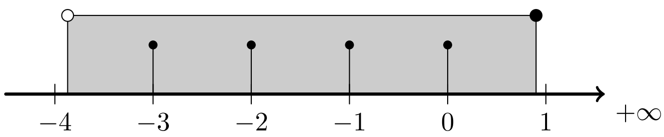
$$\text{m.d.c.}(80{,}32) = \text{m.d.c.}(16{,}16) = 16$$

4. Simplificando a expressão, usando as regras operatórias de potencias de expoente racional, temos que:

$$a^{-2} \times a^{4} = a^{-2+4} = a^{2}$$

Resposta: **Opção C**

5. Como $-\sqrt{15} \approx -3{,}87$, representando na reta real o intervalo $]-\sqrt{15}\ ;\ 0{,}9]$, e os números inteiros que pertencem a este conjunto, temos:




Assim, podemos verificar que

- o **menor** número inteiro que pertence ao conjunto $A$ é $-3$
- o **maior** número inteiro que pertence ao conjunto $A$ é 0

6. Como, num triângulo, a soma dos comprimentos de quaisquer dois lados não pode ser inferior ao comprimento do outro lado, podemos considerar, por exemplo, triângulos com comprimentos

- 3, 3 e 1, porque $3 + 3 + 1 = 7$ e temos que $3 + 1 > 3$ bem como $3 + 3 > 1$
- 2, 2 e 3, porque $2 + 2 + 3 = 7$ e temos que $2 + 3 > 2$ bem como $2 + 2 > 3$

7.

7.1. Como o volume do prisma é 42 cm$^3$ e o cubo tem o mesmo volume do prisma, temos que a medida $a$, da aresta do cubo, em centímetros, arredondada às décimas, é tal que

$$a^3 = 42$$

Logo,

$$a = \sqrt{42} \approx 3{,}5$$

Resposta: **Opção C**

7.2. Sabemos que o volume($V$) do um prisma é o produto da área da base ($A_b$) pela altura ($h$):

$$V = A_b \times h$$

Considerando a base do prisma o triângulo $[ABC]$, a altura a aresta $[AE]$, e a medida do volume 42, e substituindo as medidas conhecidas vem

$$V = A_{[ABC]} \times \overline{AE} \Leftrightarrow 42 = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} \times \overline{AE} \Leftrightarrow 42 = \frac{\overline{AB} \times 2}{2} \times 6 \Leftrightarrow \frac{42}{6} = \overline{AB} \Leftrightarrow 7 = \overline{AB}$$

Assim, como, relativamente ao ângulo $ABC$, o lado $[AC]$ é o cateto oposto e o lado $[AB]$ é o cateto adjacente, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que

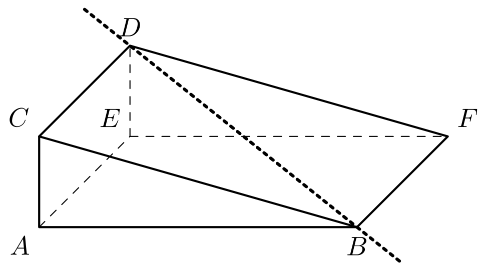
$$\text{tg}\,(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg}\,(A\hat{B}C) = \frac{2}{7}$$

Como $\frac{2}{7} \approx 0{,}2857$, procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo $ABC$ às unidades, temos que

$$A\hat{B}C = \text{tg}^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) \approx 16^\circ$$

7.3. Escolhendo um dos pontos, $B$ ou $C$, e outro ponto assinalado na figura definimos retas concorrentes com a reta $CB$.

É ainda necessário fazer essa escolha de forma a evitar que a reta definida contenha uma aresta do prisma, pelo que uma das escolhas possíveis é, por exemplo, a reta $BD$.




8.

8.1. Como o ângulo $ACB$ é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja,

$$\overset{\frown}{AB} = 2 \times A\hat{C}B = 2 \times 36 = 72^\circ$$

Resposta: **Opção D**

8.2. Como os triângulos $[ABC]$ e $[CDE]$ são semelhantes, e os lados $[BC]$ e $[CD]$ são correspondentes (porque são os lados que se opõem ao ângulo reto, em cada um dos triângulos), então $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = 0{,}5$ é a razão de semelhança.

Como o quociente das áreas de figuras semelhantes, é igual ao quadrado da razão de semelhança, vem que

$$\frac{\text{área do triângulo } [CDE]}{\text{área do triângulo } [ABC]} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\right)^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25$$

Resposta: **Opção B**

8.3. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em $A$ (porque um dos lados coincide com o diâmetro da circunferência e o vértice oposto a esse lado está sobre a circunferência), usando o Teorema de Pitágoras e substituindo as medidas conhecidas, temos que:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 6^2 + 10^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36 + 100 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 136 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{136}$$

Logo, como $[BC]$ é um diâmetro do círculo, a medida do raio, $r$, é:

$$r = \frac{\sqrt{136}}{2} \approx 5{,}83$$

E assim, calculando a área do círculo de diâmetro $[BC]$, em cm$^2$, e arredondando o resultado às unidades, vem

$$A = \pi r^2 \approx \pi \times 5{,}83^2 \approx 107\,\text{cm}^2$$

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$2x^2 + 3x = 3(1-x) + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 3 - 3x + 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 3 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 2,\ b = 6 \text{ e } c = -8)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(-8)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-6+10}{4} \vee x = \frac{-6-10}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{4} \vee x = \frac{-16}{4} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -4$$

C.S.=$\{-4{,}1\}$

10.

10.1. Como a abcissa do ponto $A$ é 1 ($x_A = 1$), podemos calcular a ordenada do ponto $E$, $y_E$, com recurso à função $f$:

$$y_E = f(x_A) = f(1) = 1$$

E assim, como o ponto $A$ tem de ordenada zero (porque pertence ao eixo das abcissas), vem que

$$\overline{AE} = y_E - y_A = 1 - 0 = 1$$

Analogamente, recorrendo à função $g$, podemos determinar a ordenada do ponto $D$, $y_D$:

$$y_D = g(x_A) = g(1) = 3(1)^2 = 3 \times 1 = 3$$

Como os pontos $C$ e $D$ têm a mesma ordenada, temos que $y_C = y_D = 3$, e assim, como o ponto $B$ tem de ordenada zero (porque pertence ao eixo das abcissas), vem que

$$\overline{BC} = y_C - y_B = 3 - 0 = 3$$

Finalmente, como o ponto $C$ está sobre a reta $y = x$, então a sua abcissa e a sua ordenada são iguais $x_C = y_C = 3$, e o ponto tem a mesma abcissa que o ponto $C$, ou seja, $x_B = x_C = 3$. Logo, temos que

$$\overline{AB} = x_B - x_A = 3 - 1 = 2$$

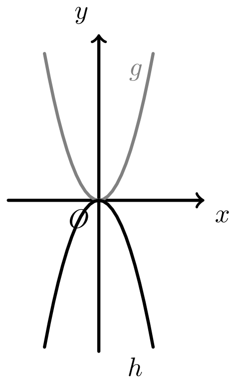
Assim, calculando a medida área do trapézio, $A_T$, considerando $[BC]$ como a base maior, $[AE]$ como a base menor e $[AB]$ como a altura, vem

$$A_T = \frac{\overline{BC} + \overline{AE}}{2} \times \overline{AB} = \frac{3+1}{2} \times 2 = \frac{4}{2} \times 2 = 4$$

10.2. Considerando o gráfico da função $h$ como o simétrico do gráfico da função $g$ relativamente ao eixo das abcissa, podemos observar que as duas parábolas têm a mesma abertura (ver figura ao lado), ou seja o coeficiente de $x^2$ deve ter o mesmo valor absoluto nas duas funções, pelo que

$$h(x) = -3x^2$$

Resposta: **Opção D**




11. Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} x - \frac{1+y}{2} = 3 \\ \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ \\ 2\left(3 + \frac{1+y}{2}\right) + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ \\ 6 + 2 \times \frac{1+y}{2} + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ \\ 6 + 1 + y + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ \\ 7 + 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ \\ 4y = -1 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1+y}{2} \\ \\ y = \frac{-8}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \frac{1-2}{2} \\ \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{1_{(2)}} + \frac{-1}{2} \\ \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} \\ \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ \\ y = -2 \end{cases}$$

$C.S. = \left\{ \left( \frac{5}{2}, -2 \right) \right\}$

12. De acordo com o enunciado, sabemos que a máquina A demora 12 horas a fabricar todos os tapetes encomendados por uma certa empresa, e que como produz 6 tapetes por hora, podemos afirmar que a empresa encomendou $12 \times 6 = 72$ tapetes.
Como a máquina B produz $x$ tapetes por hora, a produção de 72 tapetes irá demorar $\frac{72}{x}$ horas, ou seja, $\frac{72}{x}$ representa o número de horas que demora a produzir todos os tapetes encomendados pela empresa usando a máquina B.

13. A área da região a sombreado, $A_S$, pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado $[ABCD]$ ($A_{[ABCD]} = a^2$) e a área do quadrado $[EFGH]$ ($A_{[EFGH]} = b^2$).
Assim, temos que

$$A_S = A_{[ABCD]} - A_{[EFGH]} = a^2 - b^2 = a^2 + ab - ab - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Resposta: **Opção C**