# Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2016, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

**Caderno 1**

1. Como a função representada graficamente é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$y = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto $P$ (que pertence ao gráfico da função), podemos calcular o valor de $k$:

$$21 = \frac{k}{5} \Leftrightarrow 21 \times 5 = k \Leftrightarrow 105 = k$$

Ou seja, $y = \frac{105}{x}$, e assim, calculando as imagens dos objetos 17, 19, 33 e 35, temos:

- $y = \frac{105}{17}$ e como $\frac{105}{17} \neq 9$, então o ponto de coordenadas (17,9) não pertence ao gráfico da função, logo não é o ponto $Q$
- $y = \frac{105}{19}$ e como $\frac{105}{19} \neq 7$, então o ponto de coordenadas (19,7) não pertence ao gráfico da função, logo não é o ponto $Q$
- $y = \frac{105}{33}$ e como $\frac{105}{33} \neq 5$, então o ponto de coordenadas (33,5) não pertence ao gráfico da função, logo não é o ponto $Q$
- $y = \frac{105}{35}$ e como $\frac{105}{35} = 3$, então o ponto de coordenadas (35,3) pertence ao gráfico da função, logo pode ser o ponto $Q$

Resposta: **Opção D**

2. Escrevendo 1 milhão em notação científica, temos:

$$1\,000\,000 = 1 \times 10^6$$

Pelo que, 1700 milhões, em notação científica, é:

$$1700 \times 1 \times 10^6 = 1{,}7 \times 10^3 \times 1 \times 10^6 = 1{,}7 \times 10^3 \times 10^6 = 1{,}7 \times 10^{3+6} = 1{,}7 \times 10^9$$

Determinando 45% deste valor, em euros, e escrevendo o resultado em notação científica, vem que:

$$1{,}7 \times 10^9 \times \frac{45}{100} = 1{,}7 \times 10^9 \times 0{,}45 = 0{,}765 \times 10^9 = 7{,}65 \times 10^{-1} \times 10^9 = 7{,}65 \times 10^{-1+9} = 7{,}65 \times 10^8 \text{ euros}$$

3. Como os triângulos $[ABO]$ e $[CDO]$ são semelhantes (porque têm um ângulo comum e os lados opostos a este ângulo - os lados $[AB]$ e $[CD]$ são paralelos).
Assim, a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}$$

Temos ainda que:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = 8 + 4{,}5 = 12{,}5 \text{ cm}$$

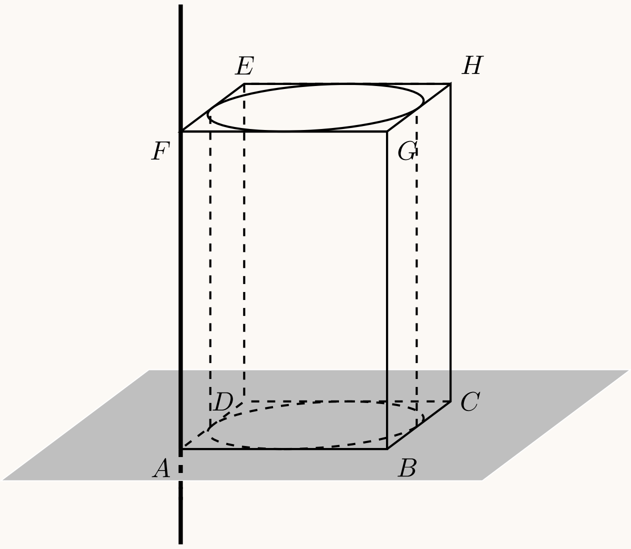
Desta forma, substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\frac{\overline{OD}}{9{,}6} = \frac{12{,}5}{8} \Leftrightarrow \overline{OD} = \frac{12{,}5 \times 9{,}6}{8} \Leftrightarrow \overline{OD} = 15 \text{ cm}$$

Como $\overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB}$, calculando o valor de $\overline{BD}$, em centímetros, vem:

$$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = 15 - 9{,}6 = 5{,}4 \text{ cm}$$

4.




4.1. Como as arestas laterais de um prisma são perpendiculares às bases do prisma, também o são relativamente ao plano que contém uma das bases do prisma.

Assim, uma reta perpendicular ao plano $ABC$, é, por exemplo:

a reta $AF$

4.2. Como $\overline{CH}$ é a medida da altura do cilindro e também do prisma, podemos determinar expressões do volume do prisma ($V_P$) e do volume do cilindro ($V_C$), em função de $\overline{CH}$:

- $V_P = A_{\text{Base}} \times \text{altura} = \overline{AB}^2 \times \overline{CH} = 20^2 \times \overline{CH} = 400\overline{CH}$
- $V_C = A_{\text{Base}} \times \text{altura} = \pi r^2 \times \overline{CH} = \pi \times \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \times \overline{CH} = \pi \times \left(\frac{20}{2}\right)^2 \times \overline{CH} = 100\pi\overline{CH}$

Com a diferença dos volumes, é de 3000 cm$^3$, vem que:

$$V_P - V_C = 3000 \Leftrightarrow 400\overline{CH} - 100\pi\overline{CH} = 3000 \Leftrightarrow \overline{CH}(400 - 100\pi) = 3000 \Leftrightarrow \overline{CH} = \frac{3000}{400 - 100\pi}$$

Assim, o valor de $\overline{CH}$, em centímetros, arredondado às unidades, é $\overline{CH} \approx 35$ cm

5. O triângulo $[CMT]$ é retângulo em $C$. Como, relativamente ao ângulo $CMT$, o lado $[MC]$ é o cateto adjacente e o lado $[TC]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{TC}}{\overline{MC}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\overline{TC}}{25{,}6} \Leftrightarrow 25{,}6 \times \operatorname{tg} 60^\circ = \overline{TC}$$

Como $\operatorname{tg} 60^\circ \approx 1{,}73$, vem que:

$$\overline{TC} \approx 25{,}6 \times 1{,}73 \approx 44{,}29$$

O triângulo $[CRT]$ é retângulo em $C$. Como, relativamente ao ângulo $CRT$, o lado $[CR]$ é o cateto adjacente e o lado $[TC]$ é o cateto oposto, voltando a usar a definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\overline{TC}}{\overline{CR}} \Leftrightarrow \overline{CR} = \frac{\overline{TC}}{\operatorname{tg} 45^\circ}$$

Como $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, vem que:

$$\overline{CR} \approx \frac{44{,}29}{1} \approx 44{,}29$$

Assim, determinando o valor de $\overline{MR}$, em metros, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$\overline{MR} = \overline{MC} + \overline{CR} \approx 25{,}6 + 44{,}29 \approx 70 \text{ m}$$

6. Para que o intervalo $A = [1,\sqrt{n}[$ tenha 28 números naturais, $\sqrt{n} > 28$, porque como o intervalo é aberto à direita, $\sqrt{n} \notin A$

Assim, como $28^2 = 784$, temos que o menor número natural que verifica a condição $\sqrt{n} > 28$ é:

$$n = 28^2 + 1 = 784 + 1 = 785$$

**Caderno 2**

7. Como a escola tem $2 + 7 + 20 + 11 = 40$ alunos, dividindo a lista ordenada em duas listas com 20 alunos cada, podemos determinar o 1º quartil, identificando a mediana do primeiro conjunto. Assim, a mediana corresponde à média das idades correspondentes às posições 10 e 11 da lista ordenada.

Como 9 alunos têm 13 anos ou menos, e são 20 os alunos com 14 anos, as posições 10 e 11 da lista ordenada das idades são ambas 14 anos, pelo que, o primeiro quartil deste conjunto de dados é 14 anos.

$$\overbrace{\underbrace{12\ \ 12\ \ 13\ \ 13\ \ 13\ \ 13\ \ 13\ \ 13\ \ 13\ \ 14}_{10}\ \ \underbrace{14\ \ 14\ \ \ldots\ \ 14}_{10}}^{20}\ \overbrace{\underbrace{14\ \ \ldots\ \ 15}_{10}\ \ \underbrace{15\ \ \ldots\ \ 15}_{10}}^{20}$$

Resposta: **Opção C**

8.

8.1. A Beatriz só vence a jogada se o seu dado tiver um número maior que o número do dado do António. Como só existe no dado uma face com um número superior a 5, e podem sair seis números, então o valor da probabilidade da Beatriz vencer a jogada, escrito na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{6}$$

8.2. Organizando numa tabela todos os conjuntos de lançamentos dos dois dados, e assinalando as situações em que o António é vencedor (A), em que é declarado empate, e em que a Beatriz vence (B), temos:

| António \ Beatriz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Empate | B | B | B | B | B |
| 2 | A | Empate | B | B | B | B |
| 3 | A | A | Empate | B | B | B |
| 4 | A | A | A | Empate | B | B |
| 5 | A | A | A | A | Empate | B |
| 6 | A | A | A | A | A | Empate |

Assim, é possível verificar que, de entre as 36 configurações possíveis de obter no lançamento dos 2 dados (ou seja 36 casos possíveis), em 15 delas o António tem um número maior (ou seja 15 casos favoráveis).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, calculando a probabilidade de que o António vença a nova jogada, e tornando a fração irredutível, é:

$$p = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

9. Como $q < r$ e $-2 < 0$ então $-2 \times q > -2 \times r$

   Resposta: **Opção B**

10. Observando a regularidade das somas apresentadas, podemos verificar que a soma dos primeiros $n$ números ímpares é $n^2$
    Assim, a soma dos primeiros 80 números ímpares é:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + ... + 159}_{80} = 80^2 = 6400$$

11. Como a função $f$ é uma função afim, a sua expressão algébrica é da forma $f(x) = mx + b$

    Como o gráfico de $f$ interseta o eixo das ordenadas no ponto de coordenadas $(0, -1)$, temos que $b = -1$

    Como o ponto de coordenadas (5,1) pertence ao gráfico de $f$, temos que $f(5) = 1$, e assim, substituindo os valores conhecidos na expressão algébrica, incluindo o valor de $b$, podemos determinar o valor de $m$:

$$1 = m \times 5 - 1 \Leftrightarrow 1 + 1 = m \times 5 \Leftrightarrow \frac{2}{5} = m$$

Desta forma, uma expressão algébrica da função $f$ é:

$$f(x) = \frac{2}{5}x + (-1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{5}x - 1$$

12. Observando que 40 é um número par e por isso $(-1)^{40} = 1$, escrevendo 4 na forma de uma potência de base 2 e usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$\frac{8^{30}}{2^{30}} \times (-1)^{40} = \left(\frac{8}{2}\right)^{30} \times 1 = 4^{30} = \left(2^2\right)^{30} = 2^{2\times 30} = 2^{60}$$

13. Como $h$ é o número de homens e $m$ é o número de mulheres, a afirmação «*o número de homens é igual a um quarto do número de mulheres*» pode ser traduzida por $h = \frac{1}{4}m$

Se a empresa contratar mais 2 homens, o número de homens passará a ser $h + 2$ e se a empresa contratar mais 3 mulheres, o número de mulheres passará a ser $m + 3$.
Como, nestas condições, o número de homens passará a ser igual a um terço do número de mulheres, então $h + 2 = \frac{1}{3}(m + 3)$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de homens e o número de mulheres, pode ser:

$$\begin{cases} h = \dfrac{1}{4}m \\ \\ h + 2 = \dfrac{1}{3}(m+3) \end{cases}$$

14. Aplicando a propriedade distributiva, escrevendo a equação na fórmula canónica e usando a fórmula resolvente, vem:

$$x^2 + 3(x-2) = x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 6 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 1,\ b = 2 \text{ e } c = -3)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+4}{2} \vee x = \frac{-2-4}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \vee x = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$$

C.S.$=\{-3{,}1\}$

15. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{x-1}{6} \leq \frac{5x-1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} \leq \frac{5x-1}{3}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{x-1}{6} \leq \frac{10x-2}{6} \Leftrightarrow x - 1 \leq 10x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 10x \leq -2 + 1 \Leftrightarrow -9x \leq -1 \Leftrightarrow 9x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{9}$$

C.S.$=\left[\frac{1}{9}, +\infty\right[$

16. Como $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = a + b$, temos que a área do quadrado de lado $\overline{OB}$ é:

$$A = \overline{OB}^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Resposta: **Opção A**

17.

17.1. Como a reta $MN$ é tangente à circunferência no ponto $P$, o raio $[OP]$ é perpendicular à reta $MN$

Desta forma, o triângulo $[OPM]$ é retângulo em $P$, ou seja $O\hat{P}M = 90°$, e assim, como $O\hat{M}N = O\hat{M}P = 15°$, temos que:

$$M\hat{O}P + O\hat{M}P + O\hat{P}M = 180 \Leftrightarrow M\hat{O}P + 15 + 90 = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M\hat{O}P = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow M\hat{O}P = 75°$$

Como o ângulo $MOP$ é o ângulo ao centro relativo ao arco $QP$, a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{QP} = 75°$$

Resposta: **Opção B**

17.2. O triângulo $[OPN]$ é retângulo em $P$ (porque o raio $[OP]$ da circunferência é perpendicular à reta tangente em $P$, que contém o lado $[PN]$ do triângulo).

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, temos que:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PN}^2 \Leftrightarrow \overline{ON}^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{ON}^2 = 3 + 9 \Leftrightarrow \overline{ON}^2 = 12 \underset{\overline{ON}>0}{\Rightarrow} \overline{ON} = \sqrt{12}$$

17.3. Como o ponto $O$ é a interseção de duas bissetrizes de ângulos do triângulo $[LMN]$, então o ponto $O$ é Incentro do triângulo.

Resposta: **Opção C**