

Prova final de MATEMÁTICA - 3º ciclo
2018 - 1ª Fase

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Ordenando os dados da tabela podemos verificar que os valores centrais, são 166 e 189.

$$\underbrace{18 \ 85 \ 166}_{50\%} \quad \underbrace{189 \ 203 \ 654}_{50\%}$$

Logo a mediana, \tilde{x} , do conjunto de dados é

$$\tilde{x} = \frac{166 + 189}{2} = \frac{355}{2} = 177,5$$

Resposta: **Opção A**

2. Temos que $3 - \sqrt{7} \approx 0,35$, ou seja $0,3 < 3 - \sqrt{7} < 0,4$
Assim, sendo r , o erro cometido com a aproximação, vem que $0,3 < r < 0,4$

Resposta: **Opção C**

3. Calculando 99% de 87 milhões, ou seja, o número de carros não elétricos vendidos em 2016, e escrevendo o resultado em notação científica, temos:

$$87\,000\,000 \times \frac{99}{100} = 8,7 \times 10^7 \times 0,99 = 8,7 \times 10^7 \times 0,99 = 8,7 \times 0,99 \times 10^7 = 8,613 \times 10^7$$

4. Como o triângulo $[MNO]$ é retângulo no vértice E e, relativamente ao ângulo DAE , o lado $[AE]$ é o cateto adjacente e o lado $[AD]$ é a hipotenusa, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos D\hat{A}E = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \cos 32^\circ = \frac{\overline{AE}}{0,90} \Leftrightarrow \overline{AE} = 0,9 \times \cos 32^\circ$$

Como $\cos 32^\circ \approx 0,848$, vem que:

$$\overline{AE} \approx 0,9 \times 0,848 \approx 0,763 \text{ m}$$

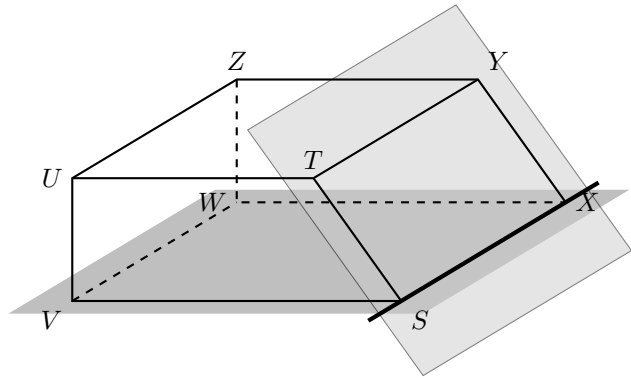
Como $\overline{EF} + \overline{AE} = \overline{AF} \Leftrightarrow \overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE}$, temos que, a distância em metros, do vértice D à parede do quarto, arredondado às centésimas, é:

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} \approx 1,05 - 0,763 \approx 0,29 \text{ m}$$



5.

- 5.1. Como os dois planos contêm o ponto S e o ponto X e não são coincidentes, a sua interseção é a reta SX



- 5.2. Como o triângulo $[UVS]$ é um triângulo retângulo em V , podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, e afirmar que:

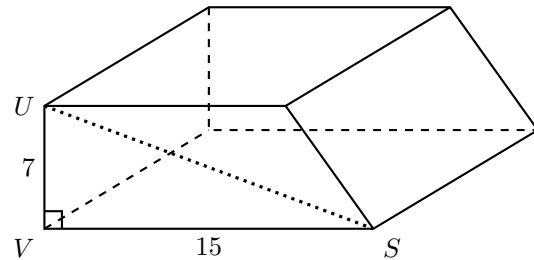
$$\overline{US}^2 = \overline{UV}^2 + \overline{VS}^2$$

Como $[SXWV]$ é um quadrado cujos lados têm 15 cm de comprimento, temos que $\overline{VS} = 15$ cm

Logo, como $\overline{UV} = 7$ cm, vem que:

$$\overline{US}^2 = 7^2 + 15^2 \Leftrightarrow \overline{US}^2 = 49 + 225 \Leftrightarrow \overline{US}^2 = 274 \xRightarrow{\overline{US} > 0} \overline{US} = \sqrt{274} \text{ cm}$$

Assim, como $\sqrt{274} \approx 16,6$, o valor de \overline{US} arredondado às décimas é 16,6 cm



- 5.3. Considerando o trapézio $[STUV]$ como a base do prisma e a medida \overline{VW} como a altura do prisma, substituindo os valores conhecidos, calculamos \overline{UT} , em centímetros, arredondado às décimas:

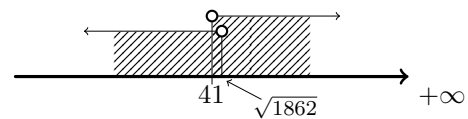
$$\begin{aligned} V_{[STUVWXYZ]} &= A_{[STUV]} \times \overline{VW} \Leftrightarrow V_{[STUVWXYZ]} = \frac{\overline{VS} + \overline{UT}}{2} \times \overline{UV} \times \overline{VW} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1250 &= \frac{15 + \overline{UT}}{2} \times 7 \times 15 \Leftrightarrow \frac{1250 \times 2}{7 \times 15} = 15 + \overline{UT} \Leftrightarrow \frac{2500}{105} - 15 = \overline{UT} \Rightarrow \overline{UT} \approx 8,08 \text{ cm} \end{aligned}$$

6. Para que $] - \infty, \sqrt{n}[\cup] 41, + \infty[= \mathbb{R}$, tem que se verificar $\sqrt{n} > 41$

Como $41^2 = 1681$, temos que:

- $\sqrt{1681} = 41$ ($\sqrt{1681} \neq 41$)
- $\sqrt{1682} > 41$ ($\sqrt{1682} \approx 41,01$)

Ou seja o menor valor natural para n é o 1682.



Caderno 2

7.

- 7.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, existem 6 grupos, ou seja, 6 casos possíveis; e que o Daniel está integrado apenas em um deles, ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{6}$$



- 7.2. Como os dois grupos são sorteados de entre um conjunto de 5, podemos organizar todas os pares de grupos que é possível sortear com recurso a uma tabela:

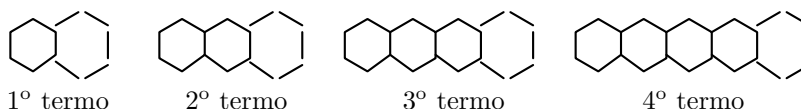
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Grupo 5
Grupo 1	–	1 e 2	1 e 3	1 e 4	1 e 5
Grupo 2	–	–	2 e 3	2 e 4	2 e 5
Grupo 3	–	–	–	3 e 4	3 e 5
Grupo 4	–	–	–	–	4 e 5

Assim, podemos observar que existem 10 pares diferentes de grupos que podem ser sorteados, dos quais apenas 4 incluem o grupo 1, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

8. Considerando que o primeiro termo é constituído por um hexágono completo (6 segmentos de reta) e mais 5 segmentos de reta, e que em cada termo são adicionados 5 segmentos de reta, o termo de ordem n terá um total de 6 segmentos de reta, mais $5 \times n$ segmentos adicionados, ou seja, um total de:

$$6 + \underbrace{5 + 5 + \dots + 5}_{n \text{ vezes}} = 6 + 5 \times n = 5n + 6 \text{ segmentos}$$



Resposta: **Opção C**

9. Como a reta r contém os pontos de coordenadas $(-4,6)$ e $(2,3)$, então podemos calcular o valor do declive:

$$m_r = \frac{6 - 3}{-4 - 2} = \frac{3}{-6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Assim, temos que uma equação da reta r é da forma:

$$y = -\frac{1}{2}x + b$$

Substituindo as coordenadas de um ponto da reta r , por exemplo $(2,3)$, podemos determinar o valor da ordenada da origem (b):

$$3 = -\frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow 3 = -1 + b \Leftrightarrow 3 + 1 = b \Leftrightarrow 4 = b$$

E assim, temos que uma equação da reta r é:

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável vem:

$$(x - 4)^2 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$$

Resposta: **Opção A**



11. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$$(a = 15, b = -2 \text{ e } c = -1)$$

$$15x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(15)(-1)}}{2(15)} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{30} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{30} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2 + 8}{30} \vee x = \frac{2 - 8}{30} \Leftrightarrow x = \frac{10}{30} \vee x = \frac{-6}{30} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right\}$$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{2(1-x)}{3} < \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{3} \underset{(2)}{<} \frac{x}{2} \underset{(3)}{+} \frac{2}{1} \underset{(6)}{\Leftrightarrow} \frac{4-4x}{6} < \frac{3x}{6} + \frac{12}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4x < 3x + 12 \Leftrightarrow -4x - 3x < 12 - 4 \Leftrightarrow -7x < 8 \Leftrightarrow 7x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{7}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\frac{8}{7}, +\infty \right[$$

13. Como o ponto P tem abcissa 3 e pertence ao gráfico da função f , temos que a sua ordenada é a imagem do objeto 3 pela função f , ou seja:

$$y_P = f(3) = \frac{4}{3} \times 3^2 = \frac{4}{3} \times 3 \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

Assim temos que as coordenadas do ponto P são $(3,12)$, e como o ponto P também pertence ao gráfico da função g , substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função podemos calcular o valor de a :

$$g(3) = 12 \Leftrightarrow \frac{a}{3} = 12 \Leftrightarrow a = 12 \times 3 \Leftrightarrow a = 36$$

14. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base $\frac{1}{8}$, temos que:

$$\frac{(4^5)^2}{4^{15}} \times 2^{-5} = \frac{4^{5 \times 2}}{4^{15}} \times 2^{-5} = \frac{4^{10}}{4^{15}} \times 2^{-5} = 4^{10-15} \times 2^{-5} = 4^{-5} \times 2^{-5} = (4 \times 2)^{-5} = 8^{-5} = \left(\frac{1}{8}\right)^5$$

15. Como x é o número de alunos do 2º ciclo e y é o número de alunos do 3º ciclo que participaram na visita de estudo, e o número de alunos do 2º ciclo foi o triplo do número de alunos do 3º ciclo, temos que $x = 3y$

Por outro lado, como cada aluno do 2º ciclo pagou 9 euros, o custo destes bilhetes foi de $9x$. Da mesma forma, como cada aluno do 3º ciclo pagou 12 euros, o custo destes bilhetes foi de $12y$.
E assim, como no total os bilhetes custaram 507 euros, temos que $9x + 12y = 507$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de alunos do 2.º ciclo e o número de alunos do 3.º ciclo que participaram na visita de estudo, é:

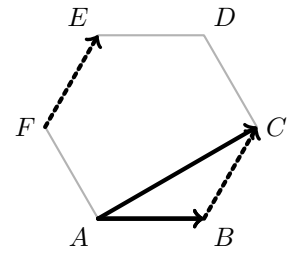
$$\begin{cases} x = 3y \\ 9x + 12y = 507 \end{cases}$$



16. Observando que $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$ (porque são vetores com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento), então temos que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Resposta: **Opção D**



17. Como o ângulo ABD é o ângulo inscrito relativo ao arco AD , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{56}{2} = 28^\circ$$

Como os ângulos OEB e BEC são ângulos suplementares e $B\hat{E}C = 72^\circ$, temos que:

$$O\hat{E}B + B\hat{E}C = 180 \Leftrightarrow O\hat{E}B + 72 = 180 \Leftrightarrow O\hat{E}B = 180 - 72 \Leftrightarrow O\hat{E}B = 108^\circ$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , e $A\hat{B}D = O\hat{B}E$ vem que:

$$O\hat{B}E + O\hat{E}B + B\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow 28 + 108 + B\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow B\hat{O}E = 180 - 108 - 28 \Leftrightarrow B\hat{O}E = 44^\circ$$

18. Como os triângulos $[ABI]$ e $[CDI]$ têm dois pares de ângulos iguais (os ângulos DCI e ABI são ângulos alternos internos, e os ângulos CID e BIA são ângulos verticalmente opostos), pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

Como os lados $[AB]$ e $[CD]$ são correspondentes, porque se opõem a ângulos iguais, e também os lados $[IA]$ e $[ID]$ são correspondentes, porque também se opõem a ângulos iguais, e assim temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{ID}}$$

Resposta: **Opção C**

