Prova final de MATEMÁTICA - 3.º ciclo
2019 - 1.ª Fase

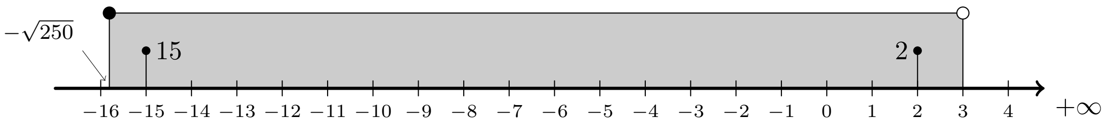
Proposta de resolução

Caderno 1

---

1. Como $-\sqrt{250} \approx -15{,}8$, temos que o menor número inteiro que pertence ao intervalo é 15.

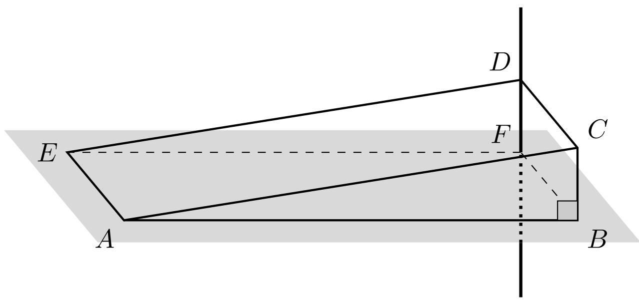
   Por outro lado, como o intervalo é aberto no limite superior, 3 não é um elemento do conjunto definido pelo intervalo, pelo que o maior número inteiro que pertence a este conjunto de números reais é 2.



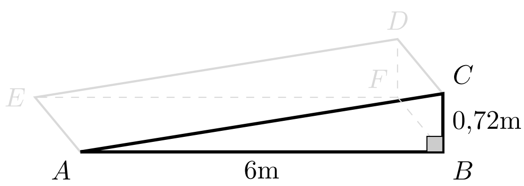
2.

   2.1. Como o prisma triângular é reto, as faces $ABFE$ e $BCDF$ são perpendiculares.

   Desta forma, como a reta DF é perpendicular às retas FB e FE, e ambas pertencem ao plano que contém a face $[ABFE]$, podemos concluir que a reta DF é perpendicular ao plano contém a face $[ABFE]$



   2.2. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo, porque $A\hat{B}C = 90°$, podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{AC}$:



$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 6^2 + 0{,}72^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 36 + 0{,}5184 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 36{,}5184 \underset{\overline{AC}>0}{\Rightarrow} \overline{AC} = \sqrt{36{,}5184} \text{ m}$$

   Assim, como $\sqrt{36{,}5184} \approx 6{,}043$, o valor de $\overline{AC}$, ou seja, o comprimento da rampa, em metros, arredondado às centésimas é 6,04 m.

3. Ordenando os números de praias classificadas como acessíveis, podemos verificar que os valores centrais são 184 e 194.

$$\underbrace{153\ \ 159\ \ 175\ \ 179\ \ 184}_{50\%}\ \underbrace{194\ \ 204\ \ 210\ \ 214\ \ 223}_{50\%}$$

   Logo a mediana, $\tilde{x}$, do conjunto de dados é

$$\tilde{x} = \frac{184 + 194}{2} = \frac{378}{2} = 189$$

   Resposta: **Opção C**

4. Como a percentagem da massa total que provinha de redes de pesca é de 46%, temos que a massa dos detritos plásticos provenientes de redes de pesca é:

$$79 \times \frac{46}{100} = 36{,}34 \text{ milhões de quilogramas}$$

Assim, escrevendo este número em notação científica, vem:

$$36{,}34 \text{ milhões de quilogramas} = 36\,340\,000 \text{ quilogramas} = 3{,}364 \times 10^7 \text{ quilogramas}$$

5. Como $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{64}$ são razões de números inteiros, são números racionais, ou seja, representam-se por dízimas finitas ou infinitas periódicas.

Como $\sqrt[3]{64} = 4$ é um número inteiro, e por isso não é uma dízima infinita não periódica.

$\sqrt{7}$ é um número irracional, pelo que a sua representação na forma de dízima corresponde a uma dízima infinita não periódica.

Resposta: **Opção A**

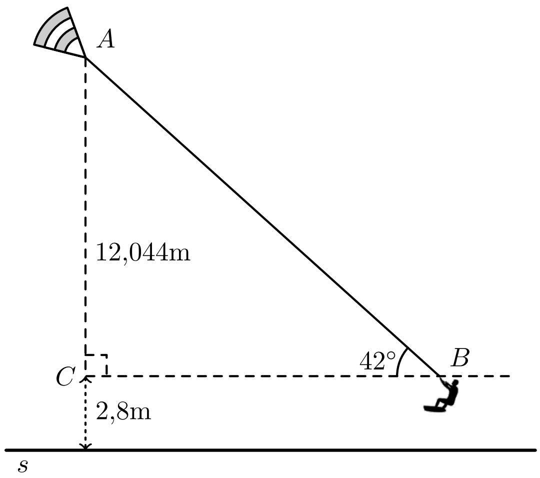
6. Como o ângulo BCA é reto, então o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e, relativamente ao ângulo ABC, o lado $[AC]$ é o cateto oposto e o lado $[AB]$ é a hipotenusa, pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\operatorname{sen} A\hat{B}C = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 42^\circ = \frac{\overline{AC}}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 \times \operatorname{sen} 42^\circ = \overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} \approx 12{,}044 \text{ m}$$

Desta forma, temos que a distância da asa à superfície da água, ou seja, a distância do ponto A à reta s, em metros, arredondado às décimas, é a soma de $\overline{AC}$ com a distância do ponto B à reta s, ou seja:

$$12{,}044 + 2{,}8 = 14{,}844 \approx 14{,}8 \text{ m}$$



7. Como os dois contentores devem ter o mesmo volume, começamos por determinar o volume do contentor atual, como a soma dos volumes da semiesfera e do cilindro:

- $V_{\text{Semiesfera}} = \frac{V_{\text{Esfera}}}{2} = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 2{,}4^3}{2} \approx 28{,}95 \text{ dm}^3$
- $V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{Base}} \times Altura = \pi \times 2{,}4^2 \times 7{,}6 \approx 137{,}53 \text{ dm}^3$
- $V_{\text{Contentor atual}} = V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cilindro}} \approx 28{,}95 + 137{,}53 \approx 166{,}48 \text{ dm}^3$

Como o futuro contentor deve ter a mesma altura do contentor atual (h), calculamos a área do contentor atual, como a soma do raio da semi-esfera com a altura do cilindro:

$$h = 7{,}6 + 2{,}4 = 10 \text{ dm}$$

Assim, como o volume do prisma reto de bases quadradas (V_P) é dado, em função da aresta da base (a), por:

$$V_P = A_{\text{Base}} \times h \Leftrightarrow V_P = a^2 \times h$$

Desta forma, como os volumes dos dois contentores devem ser iguais, substituindo os valores conhecidos na fórmula, determinamos o valor de a, em decímetros, arredondado às décimas:

$$166{,}48 = a^2 \times 10 \Leftrightarrow \frac{166{,}48}{10} = a^2 \Leftrightarrow 16{,}648 = a^2 \underset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{16{,}648} \Rightarrow a \approx 4{,}1 \text{ dm}$$

Caderno 2

8.

8.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, são 5 amigos, ou seja, 5 casos possíveis; e que apenas se pretende calcular a probabilidade da Ana ser selecionada para árbitro, ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{5}$$

8.2. Como são escolhidos dois dos cinco amigos, podemos organizar todos os pares de elementos que podem ser escolhidos, com recurso a uma tabela:

	Ana	Bruno	Carla	David	Elsa
Ana	—	♀♂	♀♀	♀♂	♀♀
Bruno	—	—	♂♀	♂♂	♂♀
Carla	—	—	—	♀♂	♀♀
David	—	—	—	—	♂♀
Elsa	—	—	—	—	—

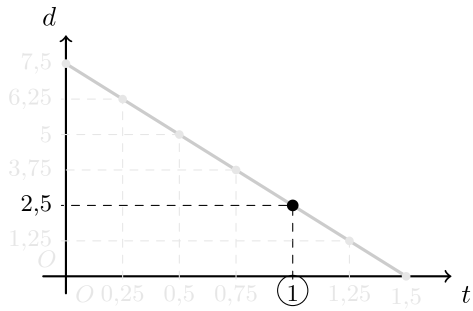
Assim, podemos observar que existem 10 pares de amigos que podem ser selecionados, dos quais 6 são constituídos por um rapaz e uma rapariga, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de uma fração irredutível, temos:

$$p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

9.

9.1. Identificando no gráfico o valor correspondente a 1 hora de caminhada, e o ponto do gráfico correspondente, podemos verificar que o valor da distância associado é 2,5.

Assim, temos que, de acordo com o gráfico, ao fim de 1 hora de caminhada, a distância, a que as duas amigas estavam da praia era de 2,5 quilómetros.



9.2. Como o gráfico da função é um conjunto de pontos sobre uma reta que interseta o eixo das ordenadas no ponto $(0; 7{,}5)$, sabemos que a ordenada na origem é $b = 7{,}5$

Considerando as coordenadas de dois pontos do gráfico, por exemplo $A(0; 7{,}5)$ e $B(1; 2{,}5)$ podemos calcular o declive da reta à qual pertencem todos os pontos do gráfico:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{7{,}5 - 2{,}5}{0 - 1} = \frac{5}{-1} = -5$$

Desta forma temos que a equação reduzida da reta à qual pertencem todos os pontos do gráfico é:

$$y = -5x + 7{,}5 \Leftrightarrow y = 7{,}5 - 5x$$

Pelo que uma expressão algébrica da função d, em função de t, é:

$$d(t) = 7{,}5 - 5t$$

Resposta: **Opção B**

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável e reduzindo os termos semelhantes, vem:

$$(x-3)^2 - x^2 = x^2 - 2\times 3\times x + 3^2 - x^2 = x^2 - 6x + 9 - x^2 = -6x + 9$$

Resposta: **Opção D**

11. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{1-x}{2} < 3(2x-1) \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < 6x-3 \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < \frac{6x}{1}_{(2)} - \frac{3}{1}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < \frac{12}{x} - \frac{6}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x < 12x-6 \Leftrightarrow -12x - x < -6-1 \Leftrightarrow -13x < -7 \Leftrightarrow 13x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{13}$$

C.S.$=\left]-\infty, \frac{8}{5}\right]$

12. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$(a = 10,\ b = 1 \text{ e } c = -2)$

$$10x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(10)(-2)}}{2(10)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{20} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+9}{20} \vee x = \frac{-1-9}{20} \Leftrightarrow x = \frac{8}{20} \vee x = \frac{-10}{20} \Leftrightarrow x = \frac{4}{10} \vee x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \vee x = -\frac{1}{2}$$

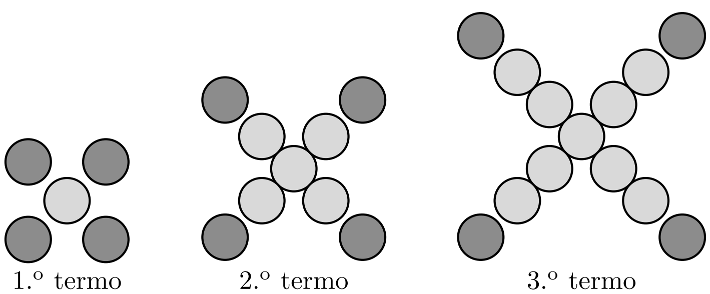
C.S.$=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right\}$

13. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, sabemos que $x \times y$ é um valor constante. Então, temos que:

$$10 \times 9 = 15 \times a \Leftrightarrow 90 = 15a \Leftrightarrow \frac{90}{15} = a \Leftrightarrow \frac{30}{5} = a \Leftrightarrow 6 = a$$

14. Considerando que o primeiro termo é constituído por 1 círculos (central) e mais 4 círculos (acrescentados em 4 direções diferentes), e que em cada termo são adicionados mais 4 círculos (acrescentados nas mesmas 4 direções), o termo de ordem n terá um total de 1 círculos, mais $4 \times n$ círculos adicionados, ou seja, um total de:

$$1 + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n \text{ vezes}} = 1 + 4 \times n = 4n + 1 \text{ círculos}$$



Desta forma, podemos verificar que $4021 = 4020 + 1$ e assumir que foram adicionados 4020 círculos, sucessivamente em grupos de 4.

Como $\frac{4020}{4} = 1005$, temos que foram adicionados 4 círculos 1005 vezes, ou seja, a ordem do termo da sequência que tem 4021 círculos, é 1005.

15. Como x o número de praticantes de *surf* e y o número de praticantes de *bodyboard* que estavam na praia quando a Maria chegou, e o total de praticantes era 51, então temos que $x + y = 51$

Como ao fim de algum tempo havia mais 7 praticantes de *surf*, ou seja, $x + 7$, e menos 4 de *bodyboard*, ou seja $y - 4$, e o número de praticantes de *surf* era o dobro do número de praticantes de *bodyboard*, temos que $x + 7 = 2(y - 4)$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de praticantes de cada uma das modalidades que estavam na praia quando a Maria chegou, é:

$$\begin{cases} x + y = 51 \\ \\ x + 7 = 2(y - 4) \end{cases}$$

16. Como $[ABCD]$ é um papagaio e $\overline{AB} = \overline{BC}$, então $\overline{CD} = \overline{AD}$ e também $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AD}$. Assim, calculando a amplitude do arco CDA, temos:

$$C\overset{\frown}{D}A = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = 110 + 100 = 220°$$

E desta forma a amplitude do arco AC é:

$$\overset{\frown}{AC} = 360 - C\overset{\frown}{D}A = 360 - 220 = 140°$$

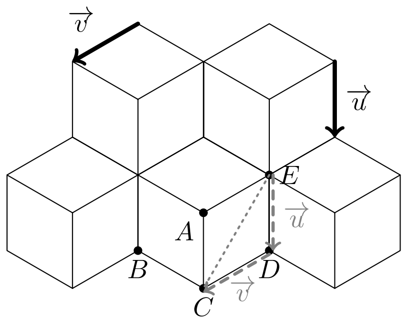
Desta forma, como o ângulo ADC é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{140}{2} = 70°$$

17. Observando que $[ACDE]$ é um losango, também é um paralelogramo e como os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ podem ser representados sobre lados desse paralelogramo, usando a regra do paralelogramo para a soma de vetores, temos que:

$$E + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = C$$

Resposta: **Opção C**



18. Como os ângulos EAD e BAC são ângulos verticalmente opostos, e ambos os triângulos têm um ângulo reto, pelo critério AA, concluímos que os triângulos são semelhantes.

Assim, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = 2 \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AD}$$

Como $\overline{AB} + \overline{AD} = a$, calculando a altura do triângulo $[ABC]$ relativa ao lado $[BC]$, ou seja, $\overline{AB}$, temos:

$$\overline{AB} + \frac{\overline{AB}}{2} = a \Leftrightarrow \frac{2\overline{AB}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} = a \Leftrightarrow \frac{3\overline{AB}}{2} = a \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{2a}{3}$$