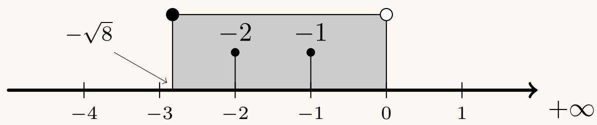
Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2022, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como $-\sqrt{8} \approx -2{,}8$, temos que o menor número inteiro que pertence ao intervalo é -2.

   Por outro lado, como o intervalo é aberto no limite superior, zero não é um elemento do conjunto definido pelo intervalo.

   Assim, os números inteiros que pertencem ao intervalo são, -2 e -1.

   Resposta: **Opção C**

2. Como o volume total de água captada em 2019, em Portugal, foi de 625,5 milhões de metros cúbicos e a percentagem desta água que foi distribuída pela rede foi de 75%, temos que o volume correspondente a esta percentagem, é:

   $$834 \times \frac{75}{100} = 625{,}5 \text{ milhões de metros cúbicos}$$

   Assim, escrevendo este número em notação científica, vem:

   $$625{,}5 \text{ milhões de metros cúbicos} = 625\,500\,000 \text{ metros cúbicos} = 6{,}255 \times 10^8 \text{ metros cúbicos}$$

3. Identificando os valores relativos aos consumos mensais, no período referido, e calculando a média destes valores temos:

   $$\overline{x} = \frac{13+12+17+18+22+20+21+21}{8} = \frac{144}{8} = 18$$

   Resposta: **Opção A**

4.

   4.1. Como o triângulo $[ABO]$ é retângulo em B, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{AO}$:

   $$\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BO}^2 \Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 6^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 36 + 16 \Leftrightarrow \overline{AO}^2 = 52 \underset{\overline{AO}>0}{\Rightarrow} \overline{AO} = \sqrt{52} \text{ cm}$$

   Assim, como $\sqrt{52} \approx 7{,}21$, o valor de $\overline{AO}$ em centímetros, arredondado às décimas é 7,2 cm.

4.2. Temos que:

- Como $[BD]$ é um diâmetro da circunferência, então $\overset{\frown}{BD} = 180°$
- $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + 110 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 180 - 110 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 70°$

Desta forma, como o ângulo BDC é o ângulo inscrito relativo ao arco BC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$B\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{70}{2} = 35°$$

Resposta: **Opção D**

5. Podemos calcular o volume do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, como a diferença dos volumes das duas pirâmides $[ABCDI]$ e $[EFGHI]$
Assim, calculando o volume das duas pirâmides, temos que:

- a altura da pirâmide $[ABCDI]$ é 36 cm e como a base é um quadrado de lado $\overline{AB}$, vem que: $A_{[ABCD]} = \overline{AB}^2 = 9^2 = 81$ cm^2

  E desta forma:

  $$V_{[ABCDI]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \times 9^2 \times 36 = \frac{81 \times 36}{3} = 972 \text{ cm}^3$$

- a altura da pirâmide $[EFGHI]$ é a diferença entre a altura da pirâmide $[ABCDI]$ e a distância entre os planos que contêm as bases, ou seja:

  $$\text{altura da pirâmide } [EFGHI] = 36 - 12 = 24 \text{ cm}$$

  e como a base é um quadrado de lado $\overline{EF}$, vem que: $A_{[EFGH]} = \overline{EF}^2 = 6^2 = 36$ cm^2

  E desta forma:

  $$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times altura = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 24 = \frac{36 \times 24}{3} = 288 \text{ cm}^3$$

E assim temos que o volume do tronco de pirâmide é:

$$V_{[ABCDEFGH]} = V_{[ABCDI]} - V_{[EFGHI]} = 972 - 288 = 684 \text{ cm}^3$$

6. Como o triângulo $[BAF]$ é retângulo em A, e, relativamente ao ângulo ABF, o lado $[AF]$ é o cateto oposto e o lado $[BF]$ é a hipotenusa, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen } A\hat{B}F = \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \text{sen } 25° = \frac{116}{\overline{BF}} \Leftrightarrow \overline{BF} = \frac{116}{\text{sen } 25°}$$

Assim, como $\frac{116}{\text{sen } 25°} \approx 274{,}47$, o comprimento da rampa, em metros, arredondado às unidades, é 274 metros.

Caderno 2

7. Usando as regras operatórias de potências, reconhecendo que $9 = 3^2$ e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base 3, temos que:

$$\frac{3^{12}}{\left(\frac{1}{3}\right)^4} \times 9^3 = \frac{3^{12}}{3^{-4}} \times \left(3^2\right)^3 = 3^{12-(-4)} \times 3^{2\times 3} = 3^{12+4} \times 3^6 = 3^{16} \times 3^6 = 3^{16+6} = 3^{22}$$

8.

8.1. Como a turma do João tem 23 alunos, dos quais 14 são raparigas, então o número de rapazes da turma é $23 - 14 = 9$

Assim, calculando a probabilidade, com recurso à Regra de Laplace, de escolher ao acaso um aluno da turma e ser selecionado um rapaz, temos:

$$p = \frac{9}{23}$$

Resposta: **Opção A**

8.2. Como a Catarina escolhe duas das cinco atividades propostas (três ao ar livre - L1, L2 e L3, e duas em sala de aula - S1 e S2), podemos organizar todos os pares de atividades que podem ser escolhidos, com recurso a uma tabela, e identificar os pares que correspondem a duas atividades ao ar livre:

	L1	L2	L3	S1	S2
L1	—	L1+L2	L1+L3	L1+S1	L1+S2
L2	—	—	L2+L3	L2+S1	L2+S2
L3	—	—	—	L3+S1	L3+S2
S1	—	—	—	—	S1+S2
S2	—	—	—	—	—

Assim, podemos observar que existem 10 pares de atividades que podem ser escolhidos, dos quais 3 são constituídos por atividades ao ar livre, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, temos:

$$p = \frac{3}{10}$$

9. Como o ponto B é o ponto do gráfico de f que tem abcissa 3, podemos determinar a sua ordenada:

$$y_B = \overline{AB} = f(3) = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

Assim, considerando a base do triângulo $[OAB]$, o lado $[OA]$ e a altura o lado $[AB]$, podemos calcular a área do triângulo:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AB}}{2} = \frac{3 \times 18}{2} = 3 \times 9 = 27$$

10. Determinando a ordenada do ponto A, recorrendo à expressão algébrica da função f, temos:

$$y_A = f(3) = 4 \times 3 = 12$$

Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, então $g(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e como $g(3) = 12$ (porque o ponto também A pertence ao gráfico de g), temos que o valor da constante de proporcionalidade (k), pode ser calculado, substituindo as coordenadas do ponto na expressão algébrica da função g:

$$12 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow 3 \times 12 = k \Leftrightarrow k = 36$$

Desta forma, como a função g é definida por $g(x) = \frac{36}{x}$, temos que:

$$g(2) = \frac{36}{2} = 18$$

11. Resolvendo a inequação, temos:

$$5(1-x) < \frac{x-3}{2} \Leftrightarrow 5 - 5x < \frac{x-3}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{1}_{(2)} - \frac{5x}{1}_{(2)} < \frac{x-3}{2} \Leftrightarrow \frac{10}{2} - \frac{10x}{2} < \frac{x-3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 10x < x - 3 \Leftrightarrow -10x - x < -3 - 10 \Leftrightarrow -11x < -13 \Leftrightarrow 11x > 13 \Leftrightarrow x > \frac{13}{11}$$

C.S.$=\left]\frac{13}{11}, +\infty\right[$

12. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$(a = 6,\ b = 1 \text{ e } c = -2)$

$$6x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(6)(-2)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1+7}{12} \vee x = \frac{-1-7}{12} \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} \vee x = \frac{-8}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{2}{3}$$

C.S.$=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

13. Como x é o número de alunos do oitavo ano que participaram na palestra e y é o número de alunos do nono ano que participaram na mesma palestra, e o número de alunos do nono ano excede em 156 o número de alunos do oitavo ano, então temos que $y = x + 156$

Como o número de alunos do oitavo ano é um terço do número de alunos do nono ano, temos que $x = \frac{y}{3}$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de praticantes de cada uma das modalidades que estavam na praia quando a Maria chegou, é:

$$\begin{cases} y = x + 156 \\ x = \frac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 156 \\ x = \frac{1}{3}y \end{cases}$$

Resposta: **Opção B**

14. Como os triângulos são semelhantes e a razão de semelhança da ampliação é 3, e a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos que:

$$\frac{A_{[ABC]}}{A_{[ADE]}} = r^2 \Leftrightarrow \frac{A_{[ABC]}}{2} = 3^2 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 2 \times 9 \Leftrightarrow A_{[ABC]} = 18$$

Resposta: **Opção C**

15. Observando a tabela e considerando que cada termo é obtido adicionado 5 unidades ao termo anterior, pelo que podemos comparar a sequência com a sequência de termo geral $5n$, e perceber que adicionando 4 unidades aos termos da sequência de termo geral $5n$, obtemos os termos da sequência dada.

	1º termo	**2º termo**	**3º termo**	...
	9	14	19	...
$5n$	5	10	15	...
$5n+4$	$5+4=9$	$10+4=14$	$15+4=19$	...

Como o termo geral da sequência é $5n+4$ podemos determinar a ordem do termo da sequência que é igual a 204, resolvendo a equação $5n+4=204$:

$$5n+4=204 \Leftrightarrow 5n = 204-4 \Leftrightarrow 5n = 200 \Leftrightarrow n = \frac{200}{5} \Leftrightarrow n = 40$$

Ou seja, o 40° termo da sequência é 204, isto é, a ordem do termo da sequência que é igual a 204 é 40.

16. Analisando cada uma das afirmações, temos que:

(1) A primeira linha refere-se ao volume vendido, *per capita*, de **água mineral** natural engarrafada, pelo que deve ser identificado o valor mínimo no **gráfico** para os anos 2013, 2015, 2017, 2018 e 2020, que é 50 L e corresponde ao ano 2013

(2) Na segunda linha também se refere ao volume vendido, *per capita*, de **água de nascente** engarrafada, pelo que deve ser identificado o valor máximo na **tabela** para os anos 2013, 2015, 2017, 2018 e 2020, que é 73,3 L e corresponde ao ano 2020

(3) A terceira linha refere-se à comparação entre os volumes engarrafado dos **dois tipos de água**, pelo que devem ser comparadas as leituras **no gráfico e na tabela** para os anos 2013, 2015, 2017, 2018 e 2020.
Verifica-se que apenas em 2017 o volume vendido de água mineral natural engarrafada (70 L *per capita* - valor do gráfico) foi superior ao volume vendido de água de nascente engarrafada (67,8 L *per capita* - valor da tabela)

		2013	2015	2017	2018	2020
(1)	O volume vendido, *per capita*, de água mineral natural engarrafada atingiu o valor mais baixo.	**X**				
(2)	O volume vendido, *per capita*, de água de nascente engarrafada atingiu o valor mais elevado.					**X**
(3)	O volume vendido, *per capita*, de água mineral natural engarrafada foi superior ao volume vendido, *per capita*, de água de nascente engarrafada.			**X**		