

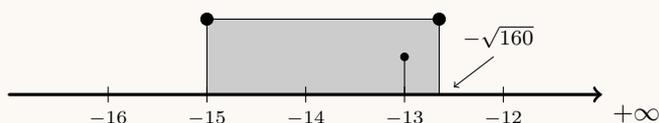
## Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2022, 2.ª fase)

Proposta de resolução



### Caderno 1

1. Como  $-\sqrt{160} \approx -12,6$ , logo  $-12 \notin [-15, -\sqrt{16}]$ , pelo que o maior número inteiro que pertence ao intervalo é  $-13$ .



Resposta: **Opção C**

2. Como no período considerado o total de energia elétrica produzida, em Portugal, foi de 430 mil milhões quilowatts-hora e, no mesmo período, a percentagem de energia elétrica obtida a partir da luz solar pela utilização de painéis solares, foi 1,1%, temos que a energia correspondente a esta percentagem, é:

$$430 \times \frac{1,1}{100} = 4,73 \text{ mil milhões quilowatts-hora}$$

Assim, escrevendo este número em notação científica, vem:

$$4,73 \text{ mil milhões quilowatts-hora} = 4\,730\,000\,000 \text{ quilowatts-hora} = 4,73 \times 10^9 \text{ quilowatts-hora}$$

3. Ordenando os dados da tabela, temos:

$$\underbrace{27 \ 34 \ 34 \ 40}_4 \quad \underbrace{47}_{\tilde{x}} \quad \underbrace{48 \ 51 \ 57 \ 58}_4$$

E assim a mediana deste conjunto de números é  $\tilde{x} = 47$

Resposta: **Opção C**

4.

- 4.1. Como o triângulo  $[CEB]$  é retângulo em  $E$ , recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de  $\overline{CE}$ :

$$\overline{CE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 + 5^2 = 10^2 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 + 25 = 100 \Leftrightarrow \overline{CE}^2 = 100 - 25 \underset{\overline{CE} > 0}{\Rightarrow} \overline{CE} = \sqrt{75} \text{ cm}$$

Assim, como  $\sqrt{75} \approx 8,66$ , o valor de  $\overline{CE}$  em centímetros, arredondado às décimas é 8,7 cm.

4.2. Temos que:

- O ângulo  $ACB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

- Como  $E\hat{C}B = \widehat{ACB}$  temos que  $E\hat{B}C = 30^\circ$
- Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , e  $C\hat{E}D = 90^\circ$  vem que:

$$E\hat{B}C + B\hat{C}E + C\hat{E}B = 180 \Leftrightarrow E\hat{B}C + 30 + 90 = 180 \Leftrightarrow E\hat{B}C = 180 - 90 - 30 \Leftrightarrow E\hat{B}C = 60^\circ$$

Como o ângulo  $E\hat{B}C = D\hat{B}C$  e o  $DBC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CD$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\widehat{AD} = 2 \times D\hat{B}C = 2 \times 60 = 120^\circ$$

Resposta: **Opção B**

5. Podemos calcular o volume do tronco de cone, como a diferença dos volumes dos cones cujas bases têm diâmetros  $[AB]$  e  $[CD]$

Assim, calculando o volume dos dois cones, temos que:

- a altura do cone cuja base tem diâmetro  $[AB]$  é 160 m e como a base é um círculo cujo diâmetro mede 4 m, a medida do raio da base é 2 m, e assim vem que:

$$V_{C_{[AB]}} = \frac{A_o \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 2^2 \times 160}{3} = \frac{\pi \times 4 \times 160}{3} = \frac{640\pi}{3} \text{ m}^3$$

- a altura do cone cuja base tem diâmetro  $[CD]$  é 80 m e como a base é um círculo cujo diâmetro mede 2 m, a medida do raio da base é 1 m, e assim vem que:

$$V_{C_{[CD]}} = \frac{A_o \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 1^2 \times 80}{3} = \frac{80\pi}{3} \text{ m}^3$$

E assim temos que o volume do tronco de cone, em metros cúbicos, arredondado às unidades, é:

$$V = V_{C_{[AB]}} - V_{C_{[CD]}} = \frac{640\pi}{3} - \frac{80\pi}{3} = \frac{640\pi - 80\pi}{3} = \frac{560\pi}{3} \approx 586 \text{ m}^3$$

6. Como o triângulo  $[JFG]$  é retângulo em  $F$ , e, relativamente ao ângulo  $JGF$ , o lado  $[FG]$  é o cateto adjacente e o lado  $[JG]$  é a hipotenusa, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos J\hat{G}F = \frac{\overline{FG}}{\overline{JG}} \Leftrightarrow \cos 26^\circ = \frac{10}{\overline{JG}} \Leftrightarrow \overline{JG} = \frac{10}{\cos 26^\circ}$$

Assim, como  $\overline{IJ} = 16$  dm, a área do painel, ou seja a área do retângulo  $[GHIJ]$  em decímetros quadrados, arredondado às unidades, é:

$$A_{[GHIJ]} = \overline{JG} \times \overline{IJ} = \frac{10}{\cos 26^\circ} \times 16 \approx 178 \text{ dm}^2$$



---

**Caderno 2**


---

7. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base  $\frac{1}{4}$ , temos que:

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4^6} \times 4^{-3} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-6}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-(-3)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-(-6)} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{8+3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{11}$$

8.

- 8.1. No agrupamento existem 24 turmas, das quais 5 são do 6.º ano (A, B, C, D e E). Assim, escolhendo ao acaso uma das turmas do agrupamento, a probabilidade, calculada com recurso à Regra de Laplace, da turma escolhida ser do 6.º ano, é:

$$p = \frac{5}{24}$$

Resposta: **Opção B**

- 8.2. Como existem 5 turmas do 6.º ano e 3 turmas do 9.º ano, o número total de pares de turmas que podem ser escolhidos são  $5 \times 3 = 15$ , dos quais, apenas 3 correspondem a pares em que as duas turmas são designadas pela mesma letra, como se pode observar na tabela seguinte:

6.º ano 9.º ano	A	B	C	D	E
A	AA	AB	AC	AD	AE
B	BA	BB	BC	BD	BE
C	CA	CB	CC	CD	CE

Assim, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, de escolher duas turmas nas condições indicadas e ambas serem designadas pela mesma letra, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

9. Como o ponto  $C$  pertence ao gráfico da função  $f$  e tem ordenada 9, designando por  $a$  a abcissa dos pontos  $C$  e  $B$ , temos que:

$$f(a) = 9 \Leftrightarrow a^2 = 9 \underset{a>0}{\Rightarrow} a = \sqrt{9} \Leftrightarrow a = 3$$

Como os pontos  $A$  e  $C$  têm a mesma ordenada e pertencem ao gráfico da função  $f$  (simétrico relativamente ao eixo  $Oy$ ) então têm ordenadas simétricas, pelo que a área do trapézio  $[AOBC]$ , na forma de dízima, é:

$$A_{[AOBC]} = \frac{\overline{AC} + \overline{OB}}{2} \times \overline{BC} = \frac{2 \times \overline{OB} + 3}{2} \times 9 = \frac{2 \times 3 + 3}{2} \times 9 = \frac{9}{2} \times 9 = \frac{81}{2} = 40,5$$



10. Resolvendo a inequação, temos:

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{3} + \frac{1}{2}x > 2(x-1) &\Leftrightarrow \frac{2x}{3} - \frac{5}{3} + \frac{x}{2} > 2x - 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{3(2)} - \frac{5}{3(2)} + \frac{x}{2(3)} > \frac{2x}{1(6)} - \frac{2}{1(6)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4x}{6} - \frac{10}{6} + \frac{3x}{6} > \frac{12x}{6} - \frac{12}{6} &\Leftrightarrow 4x - 10 + 3x > 12x - 12 \Leftrightarrow 4x + 3x - 12x > -12 + 10 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -5x > -2 &\Leftrightarrow 5x < 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{2}{5} \right[$$

11. Como a equação está escrita na fórmula canônica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$$(a = 12, b = -7 \text{ e } c = 1)$$

$$\begin{aligned} 12x^2 - 7x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(12)(1)}}{2(12)} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{24} \Leftrightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{24} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{7+1}{24} \vee x = \frac{7-1}{24} &\Leftrightarrow x = \frac{8}{24} \vee x = \frac{6}{24} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\}$$

12. Como a função  $g$  é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma

$$g(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto  $P$  (que pertence ao gráfico da função), podemos calcular o valor de  $k$ :

$$12 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow 12 \times 3 = k \Leftrightarrow 36 = k$$

Pelo que uma expressão que define a função  $g$  é  $g(x) = \frac{36}{x}$

Resposta: **Opção C**

13. Como os triângulos são semelhantes porque têm um ângulo comum e os lados opostos são paralelos, e a razão de semelhança da ampliação é 2 (porque  $[AC]$  e  $[AB]$  são lados correspondentes e  $\overline{AC} = 2\overline{AB}$ ), e a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos que:

$$r^2 = \frac{A_{[ACD]}}{A_{[ABE]}} \Leftrightarrow 2^2 = \frac{20}{A_{[ABE]}} \Leftrightarrow A_{[ABE]} = \frac{20}{4} \Leftrightarrow A_{[ABE]} = 5$$

Resposta: **Opção B**



14. Como  $x$  é o número de adultos que participaram na visita e  $y$  é o número de crianças que participaram na mesma visita, e O número de adultos era o dobro do número de crianças, então temos que  $x = 2y$

Como o preço de entrada para cada adulto foi 12 euros, as entradas de todos os adultos tiveram um custo de  $12x$ , e o custo das entradas de todas as crianças foi de  $7,5y$ , porque cada criança pagou 7,5 euros. Desta forma o custo de todas as entradas é  $12x + 7,5y$ , e como este custo foi de 252 euros, vem que  $12x + 7,5y = 252$

Assim, um sistema de equações cuja resolução permite determinar o número de adultos e o número de crianças, desse grupo de amigos, que visitaram a exposição, é:

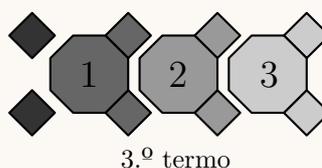
$$\begin{cases} 12x + 7,5y = 252 \\ x = 2y \end{cases}$$

Resposta: **Opção A**

15. Observando que cada termo pode ser obtido, relativamente ao anterior, acrescentando 1 octógono e 2 quadrados, o número de quadrados acrescentados a cada termo é o dobro do número de octógonos acrescentados.

Como o primeiro termo tem 1 octógono e 4 quadrados (ou seja  $2+2$ ), cada termo terá um número de octógonos igual à ordem do termo e um número de quadrados que é o dobro do número de octógonos acrescido de duas unidades.

Ou seja, o termo de ordem  $n$  tem  $n$  octógonos e  $2n + 2$  quadrados.



Assim, no termo que tem 32 quadrados, o número de quadrados é  $30+2$ , em que 30 é o dobro do número de octógonos; ou seja, o número de octógonos deste termo é  $\frac{30}{2} = 15$



16. Analisando cada uma das afirmações, temos que:

- (1) A primeira linha refere-se ao conjunto das percentagens de energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica, e pela observação do gráfico podemos observar que foi em **2017**, porque corresponde à produção por via hídrica mais baixa e a um dos anos em que a produção por via eólica foi mais baixa.
- (2) A segunda linha refere-se também ao conjunto das percentagens de energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica, e pela observação do gráfico podemos observar que, nos anos constantes na tabela, foi em **2014**, que a produção combinada das duas fontes foi superior a 50%, porque a produção por via hídrica foi superior a 30% e a produção por via eólica foi superior a 20%.
- (3) A terceira linha refere-se apenas à produção de energia elétrica por via eólica, e pela observação do gráfico podemos observar que, nos anos constantes na tabela, foi em **2019**, que a produção por esta via foi superior a 25%, ou seja mais de um quarto da energia elétrica total produzida.

		2012	2014	2015	2017	2019
(1)	A percentagem de energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica, em conjunto, foi a mais baixa.				X	
(2)	Em conjunto, a energia elétrica produzida por via hídrica e por via eólica foi superior a 50%.		X			
(3)	Mais de um quarto da energia elétrica total foi produzida por via eólica.					X

