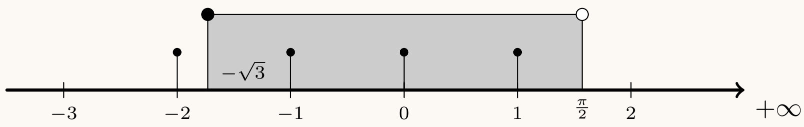
Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2023, Época especial)**

Proposta de resolução

1. Como $-\sqrt{3} \approx -1{,}73$ e logo $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, de entre os números apresentados, o menor número inteiro que pertence ao intervalo é o -1.



Resposta: **Opção B**

2. Calculando 40% de 450 milhares de visitas, ou seja, o crescimento estimado para 2023, relativamente ao ano de 2020, temos:

$$450 \times \frac{40}{100} = 180 \text{ milhares}$$

Assim, o número de visitantes dos museus da DGPC em 2023, de acordo com a estimativa, é:

$$450 + 180 = 630 \text{ milhares}$$

Pelo que, escrevendo este valor em notação científica, vem:

$$630\,000 = 6{,}3 \times 10^5$$

3. Como $\frac{13}{6}$, tal como $\frac{9}{4}$ são quocientes de números inteiros, e por isso são números racionais. Como $\sqrt{5} \approx 2{,}23$, $\sqrt{6} \approx 2{,}45$, $\frac{11}{5} = 2{,}2$ e $\frac{7}{3} \approx 2{,}33$. de entre os apresentados, o único número irracional compreendido entre $\frac{11}{5}$ e $\frac{7}{3}$ é $\sqrt{5}$.

Resposta: **Opção B**

4.

4.1. Como todas as equipas têm 5 elementos (ou seja 5 é o número de casos favoráveis se selecionarmos ao acaso um aluno da equipa da Maria), e a única onde o número de rapazes é 4 é a Equipa Vale do Côa (ou seja a única com 4 casos favoráveis à seleção de um rapaz), então esta é a equipa da Maria.
Resposta: **Opção B**

4.2. Como é escolhido um aluno da Equipa Arte do Côa e um aluno da Equipa Museu do Côa, podemos organizar todas os pares de elementos escolhidos com recurso a uma tabela:

E. Arte / **E. Museu**	Rapaz	Rapaz	Rapaz	Rapariga	Rapariga
Rapaz	♂♂	♂♂	♂♂	♂♀	♂♀
Rapariga	♀♂	♀♂	♀♂	♀♀	♀♀
Rapariga	♀♂	♀♂	♀♂	♀♀	♀♀
Rapariga	♀♂	♀♂	♀♂	♀♀	♀♀
Rapariga	♀♂	♀♂	♀♂	♀♀	♀♀

Assim, podemos observar que existem 25 pares diferentes que podem ser escolhidos, dos quais 8 são compostos por duas raparigas, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace de que os dois alunos selecionados serem raparigas, e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{8}{25}$$

5. Observando os dois gráficos, temos que:

- o gráfico A não representa a função f porque de acordo com o gráfico a distância percorrida no início da visita ($d = 0$) é maior que zero, o que não é compatível com a informação de que a função f relaciona o tempo decorrido desde o início da visita com a distância percorrida pelos visitantes;
- o gráfico B também não representa a função f porque a distância total percorrida indicada no gráfico ao fim das 2,5 horas (ou 2h 30 min) é inferior a 12 km, o que não corresponde à totalidade da distância indicada na descrição ($6 + 2{,}2 + 6 = 14{,}2$ km).

6.

6.1. Como o diâmetro da base do cone tem 5 metros de diâmetro, a medida do raio é $\frac{5}{2} = 2{,}5$ metros. Como o cone é reto, o raio da base, a altura e a geratriz formam um triângulo retângulo, pelo que, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de g, temos:

$$g^2 = \text{raio}^2 + \text{altura}^2 \Leftrightarrow g^2 = 2{,}5^2 + 2^2 \Leftrightarrow g^2 = 10{,}25 \underset{g>0}{\Rightarrow} g = \sqrt{10{,}25} \text{ m}$$

Assim, como $\sqrt{10{,}25} \approx 3{,}202$, o valor de g em metros, arredondado às décimas é 3,2 m.

6.2. Como o raio de cada uma das bases é 2,5 m, então a área é:

$$A_\circ = \pi \times 2{,}5^2 = \pi \times 6{,}25$$

Assim, o volume do cilindro, é:

$$V_{\text{cilindro}} = A_\circ \times 4 = 4 \times \pi \times 6{,}2 = 25\pi$$

Como as bases do cone e do cilindro são iguais, temos que:

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times A_\circ \times 2 = \frac{12{,}5\pi}{3}$$

E desta forma, calculando a soma dos volumes do cilindro e do cone, e arredondando o resultado às unidades, temos a volume do sólido:

$$V_{\text{cilindro}} + V_{\text{cone}} = 25\pi + \frac{12{,}5\pi}{3} \approx 92 \text{ m}^3$$

7. Como $[ABCD]$ é um quadrado com 1,7 m de lado, temos que:

$$\overline{AD} = \overline{DC} = 1{,}7 \text{ m}$$

Como $[DCE]$ é um triângulo retângulo em D, relativamente ao ângulo DCE, o lado $[DC]$ é o cateto adjacente e o lado $[DE]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } D\hat{C}E = \frac{\overline{DE}}{\overline{DC}} \Leftrightarrow \text{tg } 77^\circ = \frac{\overline{DE}}{1{,}7} \Leftrightarrow \overline{DE} = 1{,}7 \times \text{tg } 77^\circ \text{ m}$$

Assim, a altura do monumento, arredondada às unidades, é:

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 1{,}7 + 1{,}7 \times \text{tg } 77^\circ \approx 9 \text{ m}$$

8. Observando que no termo de ordem n, temos:

- n^2 quadrados cinzentos;
- n quadrados brancos;

então o número de quadrados brancos no termo de ordem n é $n^2 + n$.

Assim a ordem do termo da sequência que tem um total de 306 quadrados é a solução da equação $n^2 + n = 306$.

Resolvendo a equação temos:

$$n^2 + n = 306 \Leftrightarrow n^2 + n - 306 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-306)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1224}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1225}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm 35}{2} \Leftrightarrow n = -\frac{36}{2} \vee n = \frac{34}{2} \Leftrightarrow n = -18 \vee n = 17$$

Logo, como a ordem de um termo é um número natural, temos que a ordem do termo é 17, a que correspondem $17^2 = 289$ quadrados cinzentos.

9. Como uma equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ é impossível se $b^2 - 4ac < 0$, no caso da equação apresentada, temos que $a = 1$ e $b = -4$, pelo que:

$$(-4)^2 - 4(1)c < 0 \Leftrightarrow 16 - 4c < 0 \Leftrightarrow -4c < -16 \Leftrightarrow 4c > 16 \Leftrightarrow c > \frac{16}{4} \Leftrightarrow c > 4$$

Desta forma, de entre os valores apresentados, o único que gera uma equação impossível é o 5.

Resposta: **Opção D**

10. Temos que:

- a área do triângulo $[AED]$ é: $A_{[AED]} = \frac{\overline{AE} \times \overline{ED}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$;
- a área do triângulo $[ABC]$ é: $A_{[ABC]} = A_{[BCDE]} + A_{[AED]} = 48 + 6 = 54$

Como os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes pelo critério AA (os ângulos BAC e EAD coincidem e ambos os triângulos têm um ânguo reto) e a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, r, temos que:

$$r^2 = \frac{A_{[ABC]}}{A_{[AED]}} \Leftrightarrow r^2 = \frac{54}{6} \Leftrightarrow r^2 = 9 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{9} \Leftrightarrow r = 3$$

Assim, como $[BC]$ e $[ED]$ são lados correspondentes de triângulos semelhantes de razão 3, temos que:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{ED}} = r \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{3} = 3 \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \times 3 \Leftrightarrow \overline{BC} = 9$$

11. Como o triângulo $[OAC]$ é isósceles porque $\overline{OA} = \overline{OC}$, então os ângulos opostos a lados iguais têm a mesma amplitude, ou seja, $O\hat{C}A = O\hat{A}C = 28°$, e desta forma, temos que:

$$A\hat{O}C + O\hat{C}A + O\hat{A}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{O}C + 28 + 28 = 180 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 180 - 56 \Leftrightarrow A\hat{O}C = 124°$$

Como o arco AC é o arco relativo ao ângulo ao centro AOC, tem a mesma amplitude e como o arco AC é o arco relativo ao ângulo inscrito CBA, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$C\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{124}{2} = 62°$$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{1}{3}(x+2) > \frac{5x}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{3}_{(2)} > \frac{5x}{2}_{(3)} + \frac{1}{1}_{(6)} \Leftrightarrow \frac{2x+4}{6} > \frac{15x}{6} + \frac{6}{6} \Leftrightarrow 2x + 4 > 15x + 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 15x > 6 - 4 \Leftrightarrow -13x > 2 \Leftrightarrow 13x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{13}$$

C.S.$= \left]-\infty, -\frac{2}{13}\right[$

13. Como a abcissa do ponto B é 3, temos que a base do triângulo é $\overline{AB} = 2 \times 3 = 6$.

Podemos calcular a altura do triângulo, como a ordenada do ponto B, ou seja, $f(3)$:

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Logo a área do triângulo é:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times f(3)}{2} = \frac{6 \times 9}{2} = 3 \times 9 = 27$$

Resposta: **Opção C**

14. Como o ponto P tem abcissa 4 e pertence ao gráfico de g, a sua ordenada é:

$$g(4) = \frac{3}{4} \times 4 + 2 = 3 + 2 = 5$$

Como o ponto P também pertence ao gráfico de f, substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, podemos determinar o valor de a:

$$f(x) = \frac{a}{x} = \Leftrightarrow 5 = \frac{a}{4} \Leftrightarrow a = 5 \times 4 \Leftrightarrow a = 20$$

15. Como a média do número de exposições temporárias, realizadas em Portugal, nos 6 anos, é 6225, o número de exposições temporárias realizadas no ano de 2021, ou seja, o valor de k, é:

$$\frac{7730 + 7200 + 7140 + 6960 + 3740 + k}{6} = 6225 \Leftrightarrow \frac{32\,770 + k}{6} = 6225 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32\,770 + k = 6225 \times 6 \Leftrightarrow k = 37\,350 - 32\,770 \Leftrightarrow k = 4580$$

16. Pela observação do gráfico podemos verificar que:

(1) O ano de 2015 é o único em que barra correspondente aos museus de história é maior que a barra correspondente aos museus de arte, pelo que foi neste ano que o número de visitantes de museus de história foi maior do que o número de visitantes de museus de arte.

(2) O ano de 2019 é o que apresenta a maior barra correspondente aos museus de arte, pelo que foi neste ano que o número de visitantes de museus de arte atingiu o valor mais elevado.

(3) No ano 2020 a soma do número de visitantes dos museus de arte e de história é maior que 2 milhões e menor que 4 milhões (uma vez que cada um dos valores considerado isoladamente está entre 1 e 2 milhões), ou seja, uma diferença para 3 milhões inferior a 1 milhão. Em todos os restantes anos que figuram no gráfico a soma é sempre superior a 4 milhões (uma vez que cada um dos valores considerado isoladamente está sempre acima dos 2 milhões), ou seja, uma diferença para 3 milhões superior a 1 milhão; pelo que 2020 é o ano em que número de visitantes de museus de arte e de museus de história, em conjunto, foi o mais próximo de 3 milhões.

		2014	**2015**	**2018**	**2019**	**2020**
(1)	O número de visitantes de museus de história foi maior do que o número de visitantes de museus de arte.		**X**			
(2)	O número de visitantes de museus de arte atingiu o valor mais elevado.				**X**	
(3)	O número de visitantes de museus de arte e de museus de história, em conjunto, foi o mais próximo de 3 milhões.					**X**