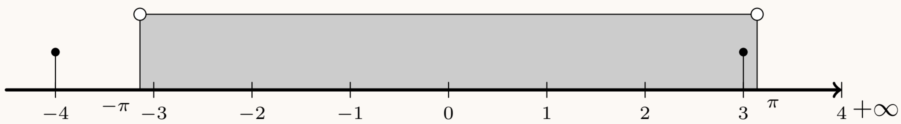
Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2023, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Como $\pi \approx 3{,}15159$, logo $-\pi \approx -3{,}15159$, pelo que, como o intervalo é aberto, os extremos não pertencem ao conjunto de números definido pelo intervalo, logo, de entre os apresentados, o único que pertence ao intervalo é o 3.



Resposta: **Opção C**

2. Calculando 25% de 428,4 milhões de euros, ou seja, o crescimento esperado em 2021, relativamente ao ano de 2020, temos:

$$428{,}4 \times \frac{25}{100} = 107{,}1 \text{ milhões de euros}$$

Assim, o valor, em euros, das exportações de bens desportivos em 2021, de acordo com a estimativa, é:

$$428{,}4 + 107{,}1 = 535{,}5 \text{ milhões}$$

Pelo que, escrevendo este valor em notação científica, vem:

$$535\,500\,000 = 5{,}355 \times 10^8$$

3. Como $\sqrt{121} = 11$ é um número inteiro e $\frac{17}{23}$, tal como $\frac{17}{23}$ são quocientes de números inteiros, e por isso são números racionais, são dízimas finitas ou infinitas periódicas.

Assim, de entre os números apresentado o único que pode ser representado por uma dízima infinita não periódica é $\sqrt{117}$.

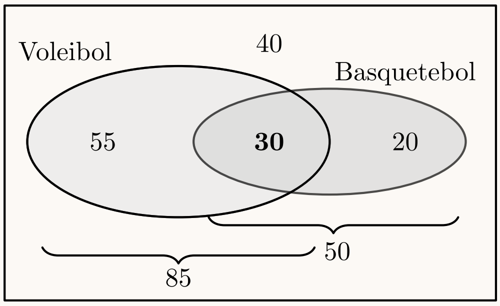
Resposta: **Opção D**

4. Como o agrupamento tem 1350 alunos e estão inscritos no Desporto Escolar 615, calculando a probabilidade, com recurso à Regra de Laplace, de selecionar ao acaso um aluno deste agrupamento e ele estar inscrito no desporto escolar, é:

$$p = \frac{615}{1350} = \frac{41}{90}$$

Resposta: **Opção B**

5. Organizando todas as atividades dos sócios num diagrama de Venn, temos:



Como o clube tem 145 sócios, temos que:

- $145 - 40 - 85 = 20$ praticam apenas basquetebol, ou seja são 20 os sócios que não praticam qualquer modalidade nem praticam voleibol;
- $145 - 40 - 50 = 55$ praticam apenas voleibol, ou seja são 55 os sócios que não praticam qualquer modalidade nem praticam basquetebol;

Logo o número de sócios que praticam basquetebol e voleibol, ou seja, todos os sócios que não praticam qualquer modalidade e que não praticam apenas uma, é:

$$145 - 40 - 55 - 20 = 30$$

Assim, para a probabilidade solicitada temos que existem 145 casos possíveis e equiprováveis e 30 casos favoráveis, pelo que, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{30}{145} = \frac{6}{29}$$

6. Temos que:

- as retas AB e CG são paralelas, tal como as retas BD e IE, logo $A\hat{B}C = G\hat{I}E$;
- as retas AB e CG são paralelas, tal como as retas AC e HE, logo $B\hat{C}A = I\hat{E}H$;

Logo, pelo critério AA, os triângulos $[ABC]$ e $[HIE]$ são semelhantes.

A área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

Como a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos que:

$$r^2 = \frac{A_{[ABC]}}{A_{[HIE]}} \Leftrightarrow r^2 = \frac{96}{24} \Leftrightarrow r^2 = 4 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{4} \Leftrightarrow r = 2$$

Assim, como $[BC]$ e $[IE]$ são lados correspondentes de triângulos semelhantes de razão 2, temos que:

$$r = \frac{\overline{BC}}{\overline{IE}} \Leftrightarrow 2 = \frac{16}{\overline{IE}} \Leftrightarrow \overline{IE} = \frac{16}{2} \Leftrightarrow \overline{IE} = 8$$

Logo, como $\overline{IE} = \overline{CD}$, temos que:

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 16 + 8 = 24$$

7. Como o arco DE é o arco relativo ao ângulo inscrito ECD, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\overset{\frown}{DE} = 2 \times E\hat{C}D = 2 \times 70 = 140^\circ$$

E assim:

$$E\overset{\frown}{C}D = 360 - \overset{\frown}{DE} = 360 - 140 = 220^\circ$$

Como $\overline{CD} = \overline{CE}$, então $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CE}$, pelo que:

$$\overset{\frown}{CD} = \frac{E\overset{\frown}{C}D}{2} = \frac{220}{2} = 110^\circ$$

Como $A\overset{\frown}{O}B$ é um ângulo ao centro relativo ao arco $\overset{\frown}{AB}$, e como $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CA}$, então:

$$\overset{\frown}{BC} = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{50}{2} = 25^\circ$$

E assim, temos que:

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{BC} = 110 - 25 = 85^\circ$$

8. Como a abcissa do ponto A é -4, temos que a base do triângulo é $\overline{AB} = 2 \times 4 = 8$.

Assim, podemos calcular a altura do triângulo, $f(-4)$:

$$A_{[AOB]} = \frac{\overline{AB} \times f(-4)}{2} \Leftrightarrow 96 = \frac{8 \times f(-4)}{2} \Leftrightarrow \frac{96 \times 2}{8} = f(-4) \Leftrightarrow f(-4) = 24$$

Como a função f é definida por $f(x) = ax^2$, então calculando o valor de a, temos:

$$f(-4) = a \times (-4)^2 \Leftrightarrow 24 = a \times 16 \Leftrightarrow \frac{24}{16} = a \Leftrightarrow \frac{3}{2} = a$$

Resposta: **Opção B**

9. Como $[ABCD]$ é um retângulo, o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, pelo que, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{AC}$, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 7{,}5^2 + 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 92{,}25 \underset{\overline{AC}>0}{\Rightarrow} \overline{AC} = \sqrt{92{,}25} \text{ cm}$$

Assim, como $\sqrt{92{,}25} \approx 9{,}604$, o valor de $\overline{AC}$ em centímetros, arredondado às décimas é 9,6 cm.

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável e escrevendo o resultado na forma $x^2 - mx + n$, vem:

$$(x-4)^2 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8x + 16 = x^2 + (-8)x + 16$$

Desta forma temos $m = -8$ e $n = 16$

Resposta: **Opção B**

11. Como, relativamente ao ângulo BAC, o lado $[BC]$ é o cateto oposto e o lado $[AB]$ é o cateto adjacente, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que

$$\operatorname{tg}(A\hat{B}C) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(A\hat{B}C) = \frac{432}{565}$$

Assim, recorrendo à calculadora (ou verificando que $\frac{432}{565} \approx 0{,}7646$ e procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas), e arredondando a amplitude do ângulo BAC às unidades, temos:

$$B\hat{A}C = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{432}{565}\right) \approx 37^\circ$$

12. De acordo com os dados o volume de água presente no recipiente é igual ao volume de um cilindro cuja altura é 3 dm e o raio da base é $\frac{2{,}5}{2} = 1{,}25$ dm, ou seja:

$$V = \pi \times 1{,}25^2 \times 3 \approx 14{,}726 \text{ dm}^3$$

Assim, dividindo este volume de água pela capacidade de cada copo, temos:

$$\frac{14{,}726}{0{,}2} = 73{,}63$$

Logo, a água do recipiente é suficiente para encher, no máximo, 73 copos de 0,2 litros.

13. Observando que no termo de ordem n, temos:

- n quadrados cinzentos;
- n^2 quadrados no total;

então o número de quadrados brancos no termo de ordem n é $n^2 - n$.

Assim a ordem do termo da sequência que tem exatamente 552 quadrados brancos é a solução da equação $n^2 - n = 552$.

Resolvendo a equação temos:

$$n^2 - n = 552 \Leftrightarrow n^2 - n - 552 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-552)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2208}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{2209}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm 47}{2} \Leftrightarrow n = \frac{48}{2} \vee n = -\frac{46}{2} \Leftrightarrow n = 24 \vee n = -23$$

Logo, como a ordem de um termo é um número natural, temos que a ordem do termo é 24, a que correspondem 24 quadrados cinzentos.

14. Resolvendo a inequação, temos:

$$2(3 - x) < \frac{3x + 4}{3} \Leftrightarrow 6 - 2x < \frac{3x + 4}{3} \Leftrightarrow \frac{6}{1}_{(3)} - \frac{2x}{1}_{(3)} < \frac{3x + 4}{3} \Leftrightarrow \frac{18}{3} - \frac{6x}{3} < \frac{3x + 4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 - 6x < 3x + 4 \Leftrightarrow -6x - 3x < 4 - 18 \Leftrightarrow -9x < -14 \Leftrightarrow 9x > 14 \Leftrightarrow x > \frac{14}{9}$$

C.S.$= \left]\frac{14}{9}, +\infty\right[$

15. Resolvendo as três equações, temos:

- $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$
- $x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4}$ (equação impossível)
- $(x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 4 = \pm\sqrt{0} \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$

E assim vem:

		(A)	**(B)**	**(C)**	**(D)**	**(E)**
		$\{\}$	$\{2\}$	$\{-2{,}2\}$	$\{-4\}$	$\{-4{,}4\}$
(1)	$x^2 - 4 = 0$			**X**		
(2)	$9x^2 - 6x + 1$	**X**				
(3)	$x^2 - 3x$				**X**	

16. Como o ponto A tem abcissa 4 e pertence ao gráfico de g, a sua ordenada é:

$$g(4) = \frac{16}{4} = 4$$

Como o ponto de coordenadas $(-2{,}0)$ também pertence à reta que é o gráfico de f, o respetivo declive é:

$$a = \frac{4-0}{4-(-2)} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Logo a expressão algébrica da função f é da forma $f(x) = \frac{2}{3}x + b$, pelo que substituindo as coordenadas de um dos pontos nesta expressão, por exemplo $(-2{,}0)$, podemos determinar o valor de b:

$$0 = \frac{2}{3}(-2) + b \Leftrightarrow 0 = -\frac{4}{3} + b \Leftrightarrow \frac{4}{3} = b$$

Desta forma, temos que uma expressão algébrica que define a função f, é $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

17. Ordenando os dados do gráfico, temos:

$$\underbrace{21\,000 \quad 21\,400 \quad a \quad a}_{50\%} \; \underbrace{22\,200 \quad 22\,400 \quad 22\,600 \quad 22\,600}_{50\%}$$

Desta forma, como o número de dados é par, a mediana é o valor médio dos dois valores centrais da lista ordenada, e assim podemos calcular o valor de a:

$$\frac{a + 22\,200}{2} = 22\,000 \Leftrightarrow a + 22\,200 = 44\,000 \Leftrightarrow a = 44\,000 - 22\,200 = \Leftrightarrow a = 21\,800$$

18. Observando os dois gráficos, temos que:

- o gráfico A não representa os dados da tabela porque neste gráfico o setor circular relativo ao Vestuário de desporto tem maior área do que o setor circular relativo ao Calçado de desporto, o que representa valor das exportações maior para o Vestuário de deporto, ao contrário do que é apresentado na tabela em que este bem, é o que tem o menor valor;
- o gráfico B também não representa os dados da tabela porque o valor das exportações relativo a Bicicletas é maior que a soma de todos os restantes, representando mais do 50% do valor total das exportações, ao contrário do que está representado no gráfico B, em que a barra relativa ao valor das exportações de Bicicletas representa uma percentagem compreendida entre 40% e 50%.