Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 8º ano
30 de abril de 2009

Proposta de resolução

1.

1.1. Como no campeonato cada equipa conquista 3 pontos por cada vitória, então, consultando a tabela, podemos observar que ”Os Vencedores”ganharam 15 jogos.

Assim, o total de pontos obtidos por esta equipa foi

$$15 \times 3 = 45 \text{ pontos}$$

1.2. Como nos 30 jogos da equipa, em 15 ganharam 3 pontos, em 9 ganharam 1 ponto e nos restantes 6 não ganharam qualquer ponto, temos que a média de pontos, por jogo, é

$$\overline{x} = \frac{15 \times 3 + 9 \times 1 + 6 \times 0}{30} = \frac{45+9}{30} = \frac{54}{30} = 1{,}8 \text{ golos}$$

2. Como o primeiro termo é 244, seguindo a lei de formação, temos que os termos seguintes são:

- 2º termo: $\dfrac{244+2}{3} = \dfrac{246}{3} = 82$
- 3º termo: $\dfrac{82+2}{3} = \dfrac{84}{3} = 28$

Resposta: **Opção B**

3. Escrevendo o número de glóbulos vermelhos existentes num litro de sangue do João em notação científica, antes do estágio, temos

$$5\,100\,000\,000\,000 = 5{,}1 \times 10^{12}$$

Assim, como 5% de $5{,}1\times 10^{12}$ é $5{,}1\times 10^{12}\times 0{,}05$, temos que, após o estágio, o número de glóbulos vermelhos existentes num litro de sangue do João, em notação científica, era de

$$5{,}1\times 10^{12} + 5{,}1\times 10^{12}\times 0{,}05 = 5{,}1\times 10^{12}\times(1+0{,}05) = 5{,}1\times 10^{12}\times 1{,}05 = 5{,}1\times 1{,}05\times 10^{12} = 5{,}355\times 10^{12}$$

4.

4.1. Como o Miguel demorou 6 minutos e 30 segundos no duche, durante os quais esteve 3 minutos e 5 segundos a ensaboar-se com a torneira fechada, então o tempo em que a torneira esteve aberta foi de $6-3=3$ minutos e $30-5=25$ seguntos, ou seja, um tempo total, em segundos, de

$$3 \times 60 + 25 = 180 + 25 = 205 \text{ segundos}$$

Como em cada 2 segundos a torneira gasta 0,6 litros de água, a cada segundo gasta 0,3 litros, pelo que o consumo de água do Miguel, em litros, foi de

$$205 \times 0{,}3 = 61{,}5 \text{ litros}$$

4.2. Como a quantidade de água gasta nunca pode diminuir, os gráficos das opções (A) e (D) não estão corretos porque mostram uma redução da quantidade de água gasta, depois do período de tempo em que não houve gasto - correspondente ao período em que o Miguel se ensaboou.

Como quando a torneira está aberta o consumo de água é sempre de 0,6 litros por cada 2 segundos, então o gasto de água não pode ser mais acentuado antes do Miguel se ensaboar do que depois, como mostra o gráfico da opção (B).

O gráfico da opção (C) mostra um gasto de água inicial, depois um período em que o gasto não aumentou, correspondente ao período de tempo em que o Miguel se ensaboou, e um período de tempo final em que o gasto de água ocorreu com a mesma cadência que no período inicial, o que pode ser observado, verificando que os segmentos de reta correspondentes aos períodos inicial e final têm a mesma inclinação.

Resposta: **Opção C**

5. Como o Miguel demora 30 segundos a dar uma volta ao campo, o tempo de passagem no ponto de partida em todos, em segundos, serão múltiplos de 30.
Como o Miguel demora 40 segundos a dar uma volta ao campo, o tempo de passagem no ponto de partida em todos, em segundos, serão múltiplos de 40.
Logo, os dois irmãos voltam a passar juntos no ponto de partida, pela primeira vez no tempo, em segundos, correspondente ao mínimo múltiplo comum entre 30 e 40

Assim, para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c. (30,40)), começamos por decompor cada um dos números em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5 \qquad 40 = 2^3 \times 5$$

Como o mínimo múltiplo comum é o produto dos fatores primos comuns e não comuns (cada um elevado ao maior expoente), temos que

$$\text{m.m.c. } (30{,}40) = 2^3 \times 3 \times 5 = 8 \times 15 = 120$$

Ou seja, os dois irmãos voltam a passar juntos no ponto de partida, pela primeira vez 120 segundos depois do início da corrida.

6. Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{8x-2}{3} = x-1 \Leftrightarrow \frac{8x-2}{3} = \frac{x-1}{1}_{(3)} \Leftrightarrow \frac{8x-2}{3} = \frac{3x-3}{3} \Leftrightarrow 8x-2 = 3x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x - 3x = -3 + 2 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

$C.S. = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

7.

7.1. Podemos determinar a amplitude do ângulo BAC. Assim, como, $B\hat{A}C + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180°$, temos que

$$B\hat{A}C + 110 + 20 = 180 \Leftrightarrow B\hat{A}C = 180 - 110 - 20 \Leftrightarrow B\hat{A}C = 50°$$

Logo vem que $B\hat{A}C = E\hat{D}F$ e $A\hat{B}C = D\hat{E}F$, pelo que, como os dois triângulos têm dois pares de ângulos iguais, são semelhantes (critério AA).

7.2. Se os triângulos $[DEF]$ e $[ABC]$ são semelhantes, então podemos afirmar que a razão entre os perímetros é igual à razão de semelhança (neste caso a razão entre o perímetro maior e o menor para que a razão de semelhança seja inferior a 1, porque se trata de uma redução). Assim, vem que

$$\frac{P_{[DEF]}}{P_{[ABC]}} = 0{,}8$$

Substituindo o perímetro do triângulo $[DEF]$, vem:

$$\frac{40}{P_{[ABC]}} = 0{,}8 \Leftrightarrow \frac{40}{0{,}8} = P_{[ABC]} \Leftrightarrow 50 = P_{[ABC]}$$

Resposta: **Opção A**

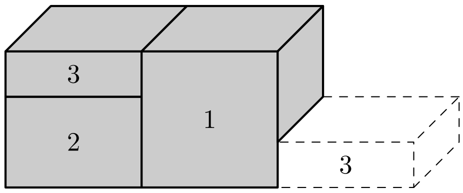
8. Escrevendo uma expressão do perímetro do trapézio, P_T, e simplificando, vem

$$P_T = x + x + 4 + x + 2x + 6 = 5x + 10$$

9.

9.1. Como todos os prismas têm a base quadrangular cuja área é 2, considerando o prisma referente ao primeiro lugar em conjunto com o prisma referente ao segundo lugar, a altura dos dois prisma, relativamente à altura do prisma referente ao primeiro lugar, será

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$



Ou seja, o volume dos dois prismas menores (considerados em conjunto) é igual ao volume do prisma maior.

Como o volume total do pódio é 15, então o volume do prisma maior (V_1) é

$$V_1 = \frac{15}{2}$$

E o volume do prisma referente ao 2.º lugar (V_2) é $\frac{2}{3}$ do volume do prisma maior, porque a área das bases é igual, ou seja

$$V_2 = \frac{2}{3} \times V_1 = \frac{2}{3} \times \frac{15}{2} = \frac{15}{3} = 5$$

9.2. Como o volume (V) de um prisma pode ser calculado como o produto da área da base (A_b) pela altura (h), temos

$$V = A_b \times h$$

Como, todos os prismas têm área da base igual a 2, ou seja $A_b = 2$, temos que

$$V = A_b \times h \Leftrightarrow V = 2 \times h \Leftrightarrow \frac{V}{h} = 2$$

Resposta: **Opção A**

10. Seja x o número de rosas vermelhas.

- $x + 6$ é o número de rosas amarelas (porque ramo tem mais 6 rosas amarelas do que vermelhas)
- $x + (x + 6)$ é o número de rosas do ramo
- $x + x + 6 = 24$ é a equação que traduz o problema

Resolvendo a equação temos:

$$x + x + 6 = 24 \;\Leftrightarrow\; 2x + 6 = 24 \;\Leftrightarrow\; 2x = 24 - 6 \;\Leftrightarrow\; 2x = 18 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{18}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 9$$

Resposta: O ramo tem 9 rosas vermelhas.

11.

11.1. Como $[ACDF]$ é um quadrado de lado 4, temos que $\overline{AF} = 4$ e que o triângulo $[AFE]$ é retângulo. Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os valores dados, calculando a medida do comprimento de $[AE]$ e escrevendo o resultado arredondado às décimas, vem

$$\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{EF}^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 4^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 16 + 1 \Leftrightarrow \overline{AE}^2 = 17 \underset{\overline{AE}>0}{\Rightarrow} \overline{AE} = \sqrt{17} \Rightarrow \overline{AE} \approx 4{,}1$$

11.2. A área da região sombreada pode ser calculada como a diferença das áreas do quadrado $[ACDF]$ e do triângulo $[ABE]$

Como a medida do lado do quadrado $[ACDF]$ é 4, a área do quadrado é

$$A_{[ACDF]} = 4^2 = 16$$

Como B é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$, e $\overline{AC} = 4$, então $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4}{2} = 2$,e a altura do triângulo $[ABE]$ é igual a $\overline{AF} = 2$, pelo que a área do triângulo é

$$A_{[ABE]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AF}}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

E assim, a área sombreada (A_S) é

$$A_S = A_{[ACDF]} - A_{[ABE]} = 16 - 4 = 12$$

12.