Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 8º ano
11 de maio de 2011

Proposta de resolução

1. Analisando exclusivamente os votos, da população de negros, nos três candidatos, podemos verificar que o candidato Q foi mais votado que o candidato R (11% dos votos para o candidato Q e 7% para o candidato R), pelo que podemos excluir os gráficos das opções (B) e (D) onde o setor referente ao candidato Q tem maior área do que o setor referente ao candidato R.
   Relativamente ao gráfico da opção (A) podemos verificar que a área do setor referente ao candidato Q tem mais do dobro da área do setor referente ao candidato R, o que não corresponde às percentagens identificadas (11% não é mais que o dobro de 7%), pelo que o gráfico da opção (A) também não representa a distribuição das percentagens de votos, pelos candidatos P, Q e R, da população de negros.
   Assim, o gráfico da opção (C) é o único que apresenta setores circulares compatíveis com os dados.

   Resposta: **Opção C**

2. No conjunto dos três melhores tempos, para além do recorde mundial (obtido em 6 de agosto) incluem-se ainda as marcas 47,40 (de 19 de agosto) e 47,42 (de 16 de agosto).
   Assim, como se sabe que 47,20 é o valor da média destes três tempos, calculando o tempo recorde, r, em segundos, vem:

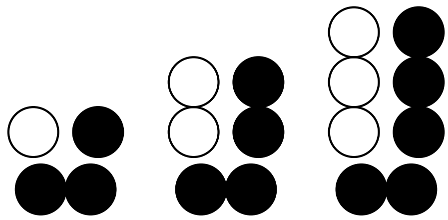
$$\frac{47{,}40+47{,}42+r}{3}=47{,}20 \Leftrightarrow \frac{94{,}82+r}{3}=47{,}20 \Leftrightarrow 94{,}82+r=47{,}20\times 3 \Leftrightarrow r=141{,}6-94{,}82 \Leftrightarrow r=46{,}78 \text{ s}$$

3.

   3.1. Considerando separadamente as duas bolas pretas da linha inferior, e as restantes separadamente, podemos ver que no termo de ordem n, existem n bolas brancas, n bolas pretas e ainda as duas bolas pretas da linha inferior.

   Assim, para construir o 7.º termo da sequência, são necessárias 7 bolas brancas, mais 7 bolas pretas (dispostas ao lado das brancas) e mais duas bolas pretas (colocadas em baixo), ou seja, um total de

$$7+7+2=16 \text{ bolas}$$



   3.2. Considerando a separação das bolas em 3 grupos no termo com da sequência que tem um total de 108 bolas, podemos constatar que se retirarmos as 2 bolas pretas da linha inferior, restam $108-2=106$ bolas.
   As 106 bolas devem ser divididas em dois grupos com o mesmo número de bolas, ou seja, descontando as bolas pretas da linha inferior, existem $\frac{106}{2}=53$ bolas pretas e 53 bolas brancas.
   Desta forma o número total de bolas pretas do termo da sequência que tem 108 bolas é

$$2+\frac{108-2}{2}=2+53=55$$

4. Escrevendo 125 na forma de uma potência de base 5 e usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$$

Resposta: **Opção B**

5. O sinal A irá piscar em todos os múltiplos de 105 segundos, e o sinal B irá piscar em todos os múltiplos de 195 segundos, pelo que piscam ao mesmo tempo, nos múltiplos comuns dos dois núemros, e voltam a piscar ao mesmo tempo no mínimo múltiplo comum.

Assim, para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c. (105,195)), começamos por decompor cada um dos números em fatores primos:

$$\begin{array}{c|c} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$105 = 3 \times 5 \times 7$ $\qquad$ $195 = 3 \times 5 \times 13$

Como o mínimo múltiplo comum é o produto dos fatores primos comuns e não comuns (cada um elevado ao maior expoente), temos que

$$\text{m.m.c. } (105,195) = 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 1365$$

Ou seja, os sinais A e B, no laboratório voltaram a piscar simultaneamente 1365 segundos depois da experiência se ter iniciado.

6. Usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$100^{50} \times 100^2 = 100^{50+2} = 100^{52}$$

Resposta: **Opção B**

7. Como a distância percorrida nunca diminui, o gráfico da função que relaciona a distância percorrida com o tempo, não ser nenhum dos gráficos das opções (C) e (D).
Como o Pedro se deslocou mais rapidamente no percurso de volta, ou seja, nos valores do tempo mais próximos de zero, o gráfico deve ter uma variação menos acentuada (correspondente à primeira parte do passeio), ou seja, um segmento de reta com menor inclinação. A segunda parte do passeio é representada por um segmento de reta com maior inclinação, ou seja, uma variação mais acentuada, que corresponde a uma velocidade maior, no percurso de volta; o que só é observado no gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

8. Como a função f é uma função de proporcionalidade directa, é definida por $f(x) = k.x$, pelo que podemos rejeitar as igualdades das opções (C) e (D).
Como sabemos que $f(2) = 6$, calculando a imagem do objeto 2, recorrendo a cada uma das expressões das opções (A) e (B), vem:

- (A): $f(2) = \frac{2}{3}$
- (B): $f(2) = 3(2) = 6$

E assim, podemos concluir que a expressão da opção (B) é a única que satisfaz cumulativamente as duas condições - a imagem de 2 é 6 e a expressão é do tipo $f(x) = k.x$

Resposta: **Opção** B

9. Resolvendo a equação, temos que:

$$\frac{x}{2} - 2 = \frac{3(2-x)}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} - 2 = \frac{6-3x}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2}_{(2)} - \frac{2}{1}_{(4)} = \frac{6-3x}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{4} - \frac{8}{4} = \frac{6-3x}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - 8 = 6 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3x = 6 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{14}{5}$$

Resposta: $C.S. = \left\{ \frac{14}{5} \right\}$

10. Seja x o número de túlipas brancas.

- $x + 4$ é o número de túlipas vermelhas (porque ramo tinha mais 4 túlipas vermelhas do que brancas)
- $x + (x + 4)$ é o número de túlipas do ramo
- $x + x + 4 = 18$ é a equação que traduz o problema

Resolvendo a equação temos:

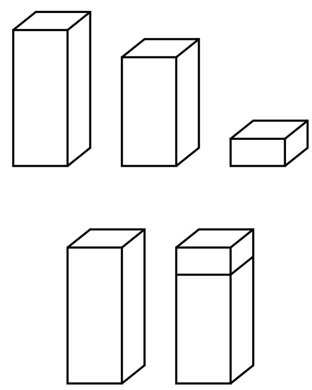
$$x + x + 4 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 4 = 18 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 18 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{14}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = 7$$

Resposta: O ramo tem 7 túlipas brancas.

11.

11.1. Como as bases dos três modelos é igual e como o volume do modelo maior é igual à soma dos volumes dos dois modelos menores, então a soma das alturas dos dois modelos menores é igual à altura do modelo maior.

Assim, o gasto adicional de 50 cm^2 para forrar os dois modelos menores é justificado pela área adicional de duas bases quadradas (uma base da do sólido menor e outra do sólido intermédio).



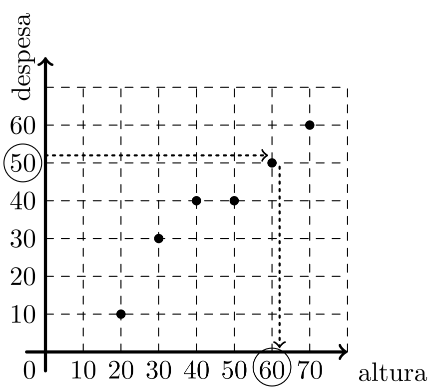
Assim, podemos calcular a área das bases dos sólidos, A_B, dividindo a área em excesso por 2:

$$A_B = \frac{50}{2} = 25 \text{ cm}^2$$

E como as bases são quadrados a medida da aresta da base dos modelos, a, em centímetros é

$$a = \sqrt{A_B} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

11.2. Por observação do gráfico (ver a figura ao lado), identificando a despesa de 50 cêntimos, podemos verificar que a altura associada a essa despesa é de 60 milímetros.



12.

12.1. Como $[ABCD]$ é um retângulo, o ângulo ABC é reto, e como o segmento $[EG]$ é paralelo ao segmento $[AB]$, o ângulo BGF também é reto, e como os ângulos DFE e BFG são verticalmente opostos, então também são iguais, pelo que $B\hat{F}G = D\hat{F}E = 35°$
Assim, como, $F\hat{B}G + B\hat{G}F + G\hat{F}B = 180°$, temos que

$$F\hat{B}G + 90 + 35 = 180 \Leftrightarrow F\hat{B}G = 180 - 90 - 35 \Leftrightarrow F\hat{B}G = 55°$$

12.2. Como os triângulos $[EFD]$ e $[GFB]$ são semelhantes, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{EF}}$$

(Os lados $[BG]$ e $[FD]$ são os lados menores de cada triângulo e os lados $[FG]$ e $[ED]$ são os lados de comprimento intermédio de cada triângulo).
Logo, temos que

$$\frac{\overline{BG}}{3{,}5} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \overline{BG} = \frac{3 \times 3{,}5}{5} \Leftrightarrow \overline{BG} = 2{,}1$$

13. Como num triângulo escaleno a medida do lado maior é inferior à soma das medidas dos dois lados menores,

- considerando $[PQ]$ e $[QR]$ como os lados menores, temos que

$$\overline{PR} < \overline{PQ} + \overline{QR} \Leftrightarrow \overline{PR} < 5 + 11 \Leftrightarrow \overline{PR} < 16$$

- considerando $[PQ]$ e $[PR]$ como os lados menores, temos que

$$\overline{QR} < \overline{PQ} + \overline{PR} \Leftrightarrow 11 < 5 + \overline{PR} \Leftrightarrow 11 - 5 < \overline{PR} \Leftrightarrow 6 < \overline{PR} \Leftrightarrow \overline{PR} > 6$$

Ou seja, o lado o comprimento do lado $[PR]$ está compreendido entre 6 e 16.

Resposta: **Opção B**

14A. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo e o lado $[AC]$ é a hipotenusa, sabemos que

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

Podemos assim, verificar qual das opções apresenta valores que verificam o Teorema de Pitágoras, ou seja, que são medidas dos comprimentos de um triângulo retângulo:

- Opção (A): $12^2 = 4^2 + 11^2 \Leftrightarrow 144 = 4 + 121 \Leftrightarrow 144 = 125$ é uma proposição falsa
- Opção (B): $13^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow 169 = 25 + 144 \Leftrightarrow 169 = 169$ é uma **proposição verdadeira**
- Opção (C): $14^2 = 6^2 + 13^2 \Leftrightarrow 196 = 36 + 169 \Leftrightarrow 196 = 205$ é uma proposição falsa
- Opção (D): $15^2 = 7^2 + 14^2 \Leftrightarrow 225 = 49 + 196 \Leftrightarrow 225 = 245$ é uma proposição falsa

Resposta: **Opção B**

14B.
Como o polígono 3 pode ser obtido como imagem do polígono 1 por meio da translação associada ao vetor $\overrightarrow{AC}$, e temos que

- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Temos que é o translação associada ao vetor $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ que transforma o polígono 1 no polígono 3

Resposta: **Opção D**