Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
7 de maio de 2008

Proposta de resolução

1.

1.1. Como no saco estavam 28 peças, o número de casos possíveis, quando se retira uma peça do saco é 28.
Como o número de peças com vogais é $2+3+2+4+1 = 12$ então 12 é o número de casos favoráveis para que a peça tenha uma vogal.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace e simplificando a fração obtida, temos que a probabilidade de sair uma vogal, quando se retira,ao acaso, uma peça do saco é:

$$p = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

Resposta: **Opção B**

1.2. Como existiam 28 peças no saco e o Martim retirou 4, existem agora $28 - 4 = 24$ peças no saco, ou seja, o número de casos possíveis é 24.
Como inicialmente existiam no saco 3 peças com a letra T, e o Martim, já tinha retirado uma quando retirou as peças que formavam a palavra $GATO$, então esxistem agora $3 - 1 = 2$ peças com a letra T no saco. Assim, o número de casos favoráveis é 2 e a probabilidade de retirar uma peça do saco e ela ter a letra T é:

$$p = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

2. Como a estadia implicou o pagamento do dia 2 até ao dia 11, incluindo o dia 2 e o dia 11, tiveram que pagar $11 - 2 + 1 = 10$ dias de estadia.
Analisando cada uma das parcelas separadamente, vem que:

- Como a família do Martim usou uma tenda para toda a família, ou seja, uma tenda familiar, o custo com a tenda, de acordo com a tabela, é de 6,50 euros por dia, ou seja $6{,}50 \times 10 = 65$ euros.
- Como a irmã do Martim tem uma idade entre 3 e 12 anos, então o pagamento devido pela sua estadia é de $3{,}20 \times 10 = 32$ euros.
- Como o Martim, o pai e a mãe têm todos mais de 12 anos, então cada um deles deve pagar 5,50 euros por dia, ou seja, $3 \times 5{,}50 \times 10 = 165$ euros.
- Por guardarem o automóvel dentro do parque, o custo é de 5,80 euros por dia, ou seja, $5{,}80 \times 10 = 58$ euros.

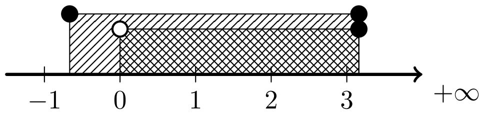
Logo, o total a pagar, antes da aplicação do desconto era de:

$$65 + 32 + 165 + 58 = 320 \text{ euros}$$

Como a estadia foi superior a uma semana e ocorreu no mês de setembro, a família do Martim teve direito a um desconto de 35%, ou seja pagou apenas $100 - 35 = 65\%$ do valor anteriormente calculado, ou seja:

$$320 \times \frac{65}{100} = 208 \text{ euros}$$

3. Como $-\frac{2}{3} \approx -0{,}666$ e $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, representando o conjunto interseção e o conjunto $\left[-\frac{2}{3},\sqrt{10}\right]$ na reta real, temos:



Assim temos que o conjunto I é um intervalo aberto no extremo inferior, localizado no número real zero, e cujo extremo superior deve ser superior ou igual a $\sqrt{10}$

Ou seja, verificando cada uma das hipóteses apresentadas, temos que

- $[0,+\infty[\, \cap \left[-\frac{2}{3},\sqrt{10}\right] = [0,\sqrt{10}]$
- $\left[-\frac{2}{3},0\right[\,\cap \left[-\frac{2}{3},\sqrt{10}\right] = \left[-\frac{2}{3},0\right[$
- $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right[\,\cap \left[-\frac{2}{3},\sqrt{10}\right] = \left[-\frac{2}{3},\sqrt{10}\right]$

E também, que $]0,+\infty[\, \cap \left[-\frac{2}{3},\sqrt{10}\right] = \,]0,\sqrt{10}]$

Resposta: **Opção A**

4. Podemos substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente, ou então, resolver o sistema para encontrar a solução:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 2 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ x + 3\left(2 - \frac{x}{2}\right) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ x + 6 - \frac{3x}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ \frac{x}{1}_{(2)} + \frac{6}{1}_{(2)} - \frac{3x}{2} = \frac{5}{1}_{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ \frac{2x}{2} + \frac{12}{2} - \frac{3x}{2} = \frac{10}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ 2x + 12 - 3x = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ 2x - 3x = 10 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{x}{2} \\ -x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{2}{2} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

C.S. $= \{(2,1)\}$

Resposta: **Opção D**

5. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$2(x^2-5) = 8x \Leftrightarrow 2x^2 - 10 = 8x \Leftrightarrow 2x^2 - 10 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 1,\ b = -4 \text{ e } c = -5)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4+6}{2} \vee x = \frac{4-6}{2} \Leftrightarrow x = \frac{10}{2} \vee x = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

C.S.$=\{-1,5\}$

6.

6.1. Como a pressão exercida pelo tijolo (P) é inversamente proporcional à área da face que está assente na areia (A), sabemos que $P \times A$ é o valor constante de proporcionalidade (k).
Assim, temos que:

$$k = 0{,}005 \times 4000 = 0{,}01 \times 2000 = 0{,}02 \times 1000 = 20$$

6.2. Como a pressão que o tijolo exerce sobre a areia é 4000 N/m^2, consultando a tabela podemos verificar que a área da base da base (assente sobre a areia) é de 0,005 m^2

Por outro lado, como a área da base, é dada em função da largura l, por $2l \times l$, podemos equacionar o problema e resolver a equação para determinar o valor de l :

$$2l \times l = 0{,}005 \Leftrightarrow 2l^2 = 0{,}005 \Leftrightarrow l^2 = \frac{0{,}005}{2} \Leftrightarrow l^2 = 0{,}0025 \Leftrightarrow l = \pm\sqrt{0{,}0025} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l = 0{,}05 \vee l = -0{,}05$$

Como a medida do lado não pode ser expressa por um valor negativo, temos que $l = 0{,}05$ m

7. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{x-3}{2} + 5 \geq 2x \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} + \frac{5}{1}_{(2)} \geq \frac{2x}{1}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} + \frac{10}{2} \geq \frac{4x}{2} \Leftrightarrow x - 3 + 10 \geq 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 4x \geq 3 - 10 \Leftrightarrow -3x \geq -7 \Leftrightarrow 3x \leq 7 \Leftrightarrow x \leq \frac{7}{3}$$

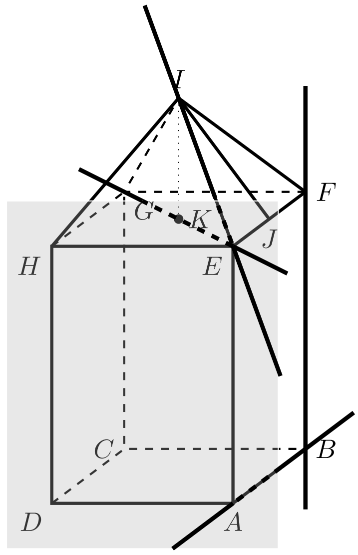
C.S.$=\left]-\infty, \frac{7}{3}\right]$

8. O Gráfico B não pode representar a situação descrita, porque enquanto o cão correu à volta do poste, com a trela completamente esticada, a distância ao poste foi sempre constante - não se alterou porque o cão correu sobre uma circunferência centrada no poste. Como o Gráfico B não apresenta nenhum período de tempo em que a distância se tenha mantido constante, este gráfico não pode representar a situação descrita.

O Gráfico C também não pode representar a situação descrita, porque, como numa fase inicial o cão se afastou rapidamente (do poste), e na fase final se aproximou lentamente, a variação da distância deve ser mais acentuada na fase inicial do que na fase final. No Gráfico C, a variação na fase inicial é mais lenta e mais rápida na fase final, pelo que este gráfico também não pode representar a situação descrita.

Assim, o único gráfico que pode representar a situação descrita, é o gráfico A.

9.



9.1. Comparando cada uma das retas com o plano ADH, temos que:

- A reta AB não é paralela ao plano ADH, porque se intersetam no ponto A
- A reta IE não é paralela ao plano ADH, porque se intersetam no ponto E
- Como a face $[ABFE]$ é um retângulo, então a reta BF é paralela à reta AE, e como a reta AE pertence ao plano ADH, então a reta BF é paralela ao plano ADH
- A reta EG não é paralela ao plano ADH, porque se intersetam no ponto E

Resposta: **Opção C**

9.2. Começamos por determinar a altura da pirâmide $[EFGHI]$, verificando que o triângulo $[JKI]$ é retângulo em K, pelo que, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos afirmar que:

$$\overline{IK}^2 + \overline{KJ}^2 = \overline{IJ}^2$$

$$\overline{IK}^2 + \overline{KJ}^2 = \overline{IJ}^2$$

Como $\overline{KJ} = \dfrac{\overline{AD}}{2} = \dfrac{1{,}2}{2} = 0{,}6$ m, substituindo os valores conhecidos na equação anterior, vem que:

$$\overline{IK}^2 + 0{,}6^2 = 1^2 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 + 0{,}36 = 1 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 1 - 0{,}36 \Leftrightarrow \overline{IK}^2 = 0{,}64 \underset{\overline{IK}>0}{\Rightarrow} \overline{IK} = \sqrt{0{,}64}$$

Assim temos que $\overline{IK} = 0{,}8$

Podemos agora determinar o volume da pirâmide:

$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times \overline{IK} = \frac{1}{3} \times 1{,}2^2 \times 0{,}8 = 0{,}384 \text{ m}^3$$

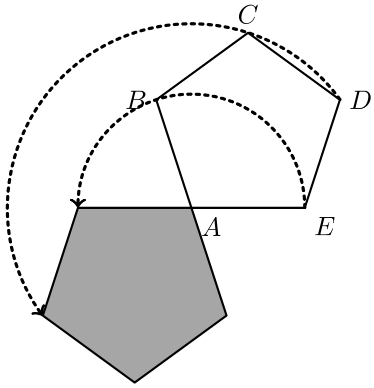
Determinando o volume do prisma, vem que:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{DA} \times \overline{AB} \times \overline{DH} = 1{,}2 \times 1{,}2 \times 1{,}7 = 2{,}448 \text{ m}^3$$

Logo, podemos determinar o volume total do sólido, V_T, como a soma dos volumes do pirâmide e do prisma:

$$V_T = V_{[EFGHI]} + V_{[ABCDEFGH]} = 0{,}384 + 2{,}448 = 2{,}832 \text{ m}^3$$

10. Como se pretende que o pentágono sombreado seja a imagem do pentágono $[ABCDE]$ obtida por meio de uma rotação de centro no ponto A, o ponto A permanece inalterado, pelo que as opções (A) e (D) não estão corretas.



Traçando semicircunferências de centro no ponto A (como na figura ao lado) podemos verificar que na opção (C) o pentágono sombreado é a imagem do pentágono $[ABCDE]$ obtida por meio de uma rotação de centro no ponto A e amplitude 180°

Resposta: **Opção C**

11.

11.1. Como $[PQRST]$ é um pentágono regular, os vértices dividem a circunferência em 5 arcos com a mesma amplitude, pelo que a amplitude do arco TQ pode ser calculada como:

$$\overset{\frown}{TQ} = 3 \times \frac{360}{5} = 216^\circ$$

Como o ângulo TPQ é o ângulo inscrito relativo ao arco TP, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$T\hat{P}Q = \frac{\overset{\frown}{TQ}}{2} = \frac{216}{2} = 108^\circ$$

11.2. Como a circunferência tem raio 5, a área do círculo pode ser calculada por:

$$A_\circ = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$$

Como o triângulo $[SOR]$ tem área 12, a área do pentágono é

$$A_{[PQRST]} = 5 \times A_{[SOR]} = 5 \times 12 = 60$$

Assim, calculando a área sombreada, A_S, como a diferença da área do círculo e do pentágono e arredondando o resultado às décimas, temos que:

$$A_S = A_\circ - A_{[PQRST]} = 25\pi - 60 \approx 18{,}5$$