Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
11 de maio de 2009

Proposta de resolução

1.

1.1. Como na gaveta 1 existem três *maillots* (1 preto, 1 cor-de-rosa e 1 lilás), são 3 os casos possíveis, dos quais 2 são favoráveis (os *maillots* cor-se-rosa e lilás, não são pretos).
Assim, recorrendo à Lei de Laplace, a probabilidade de a Marta não tirar o *maillot* preto é

$$p = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção C**

1.2. Como a Marta pode escolher um de entre 3 *maillots*, um de entre 2 pares de sapatilhas e uma de entre 2 fitas para o cabelo, o número de formas diferentes que a Marta pode se pode apresentar agora numa aula de ballet é

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

Ou, fazendo uma lista de contagem, temos

maillots	sapatilhas	fitas
preto	preto	preta
preto	preto	cor-de-rosa
preto	cor-de-rosa	preto
preto	cor-de-rosa	cor-de-rosa
cor-de-rosa	preto	preta
cor-de-rosa	preto	cor-de-rosa
cor-de-rosa	cor-de-rosa	preto
cor-de-rosa	cor-de-rosa	cor-de-rosa
lilás	preto	preta
lilás	preto	cor-de-rosa
lilás	cor-de-rosa	preto
lilás	cor-de-rosa	cor-de-rosa

2. Como as temperaturas em Faro e Moscovo são, respetivamente 11 e -6, a diferença de temperaturas nas duas cidades é

$$11 - (-6) = 11 + 6 = 17°$$

3. Como x é o número de moedas de 20 cêntimos e y é o número de moedas de 50 cêntimos que a Rita tem no mealheiro, e no total tem 17 moedas dos dois tipos, temos que

$$x + y = 17$$

Por outro lado $x \times 0{,}2$, ou $0{,}2x$, é a quantia, em euros, que a Rita tem considerando apenas as x moedas de 20 cêntimos (ou 0,2 euros). E da mesma forma $0{,}5y$ é a quantia, em euros, que a Rita tem considerando apenas as y moedas de 50 cêntimos (ou 0,5 euros), pelo que, como a quantia total é de 5,5 euros, temos que

$$0{,}2x + 0{,}5y = 5{,}5$$

Assim, um sistema que permite determinar quantas moedas de 20 cêntimos e quantas moedas de 50 cêntimos tem a Rita no mealheiro, é

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ \\ 0{,}2x + 0{,}5y = 5{,}5 \end{cases}$$

Resposta: **Opção B**

4. Como

- $-3{,}5 \in \mathbb{Q}$
- $\dfrac{1}{7} \in \mathbb{Q}$
- $2{,}(45) \in \mathbb{Q}$

e $\sqrt{109}$ é um número irracional, ou seja é este o elemento do conjunto S que corresponde a uma dízima infinita não periódica.

5. Como a função f é definida por $f(x) = 2x + 2$, o seu gráfico é uma reta de declive 2. Como os gráficos das opções (C) e (D) são retas de declive negativo, não podem ser o gráfico da função f.

Como a função f é definida por $h(x) = 2x + 2$, temos que $f(0) = 2 \times 0 + 2 = 2$, ou seja, o ponto de coordenadas $(0{,}2)$ pertence ao gráfico de f, logo o gráfico da opção (A) não pode ser o gráfico de f, porque é uma reta em que o ponto que tem abcissa zero, tem ordenada negativa.

O gráfico da opção (B) é o único que representa uma reta de declive positivo e ordenada na origem igual a 2, ou seja, é o gráfico da função f

Resposta: **Opção B**

6. O gráfico não corresponde à situação descrita porque:

- Como a cadeira parte do nível do chão, no início da contagem do tempo, ou seja quando o valor do tempo é zero, o valor da distância ao solo também é zero, e no gráfico podemos observar que ao valor zero da variável "Tempo"corresponde um valor maior que zero da variável"Distância ao solo".
- Como a cadeira permanece no cimo da torre durante algum tempo, no gráfico deveriam existir alguns valores do tempo, consecutivos, correspondentes ao mesmo valor da "Distância ao Solo", ou seja uma parte do gráfico deveria ser um segmento de reta paralelo ao eixo do Tempo, o que não se verifica.

7.

7.1. Como cada uma das 4 amigas pagará 400 euros pelo apartamento, o custo total do apartamento é

$$4 \times 400 = 1600 \text{ euros}$$

Assim, se o custo total for dividido por mais uma rapariga, ou seja em 5 partes iguais, cada uma irá pagar

$$\frac{1600}{5} = 320 \text{ euros}$$

7.2. Como o custo total do apartamento é $4 \times 400 = 1600$ euros, se este valorfor dividido por n raparigas, ou seja, em n partes iguais, o valor a pagar, p, em euros, por cada uma delas é

$$p = \frac{1600}{n}$$

Resposta: **Opção A**

8. Resolvendo a inequação, temos

$$\frac{2(1-x)}{3} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2-2x}{3} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{3}_{(4)} - \frac{2x}{3}_{(4)} \geq \frac{1}{4}_{(3)} \Leftrightarrow \frac{8}{12} - \frac{8x}{12} \geq \frac{3}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 - 8x \geq 3 \Leftrightarrow -8x \geq 3 - 8 \Leftrightarrow -8x \geq -5 \Leftrightarrow 8x \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{8}$$

C.S.$=\left]-\infty, \frac{5}{8}\right]$

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\frac{16x+20}{2} = 2x^2 \Leftrightarrow \frac{16x}{2} + \frac{20}{2} = 2x^2 \Leftrightarrow 8x + 10 = 2x^2 \Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = -1,\ b = 4 \text{ e } c = 5)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-1)(5)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4+6}{-2} \vee x = \frac{-4-6}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{-2} \vee x = \frac{-10}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 5$$

C.S.$=\{-1,5\}$

10.

10.1. Como $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, o arco AC tem amplitude 180°

Como o ângulo ABC é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{180}{2} = 90°$$

Pelo que o ângulo ABC é reto, e assim, o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B

10.2. Como o lado $[AC]$ do triângulo é um diâmetro da circunferência e o vértice B pertence à mesma circunferência, então o triângulo $[ABC]$ é retângulo e o lado $[AC]$ é a hipotenusa.
Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os valores dados, vem que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 15^2 = 12^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 225 = 144 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow 225 - 144 = \overline{BC}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 81 = \overline{BC}^2 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \sqrt{81} = \overline{BC} \Leftrightarrow 9 = \overline{BC}$$

Como os lados $[AB]$ e $[BC]$ do triângulo são perpendiculares, se considerarmos um deles como a base, o outro será a altura, e assim temos que a área do triângulo é

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = \frac{108}{2} = 54$$

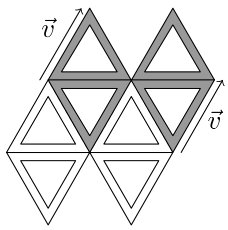
Como $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, então o raio é $r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$, e a área do círculo é

$$A_\circ = \pi \times r^2 = \pi \times 7{,}5^2 = 56{,}25\pi$$

A área da região sombreada, A_S, pode sr calculada como a diferença da área do círculo e da área do triângulo, pelo que calculando a área da região sombreada e escrevendo o resultado arredondado às unidades, temos

$$A_S = A_\circ - A_{[ABC]} = 56{,}25\pi - 54 \approx 123$$

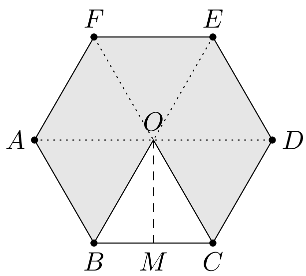
11. Considerando a figura e a translação da mesma associada, ao vetor $\vec{v}$ (representada na figura ao lado a sombreado) podemos observar a representação conjunta das duas, ou seja, a figura da primeira opção.



Resposta: **Opção A**

12.

12.1. Como o hexágono $[ABCDEF]$ é a base de um prisma regular, é um héxagono regular, pelo que pode ser dividido em 6 triângulos congruentes, e assim, a sua área pode ser calculada como 6 vezes a área do triângulo $[BCO]$, do qual são conhecidas as medidas da base e da altura



$$A_{[ABCDEF]} = 6 \times A_{[BCO]} = 6 \times \frac{\overline{BC} \times \overline{OM}}{2} = 6 \times \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\ \text{m}^2$$

E assim, podemos determinar a capacidade da piscina, em metros cúbicos, calculando o volume do prisma. Arredondando o resultado às décimas, vem

$$V_{[ABCDEFGHIJKL]} = A_{[ABCDEF]} \times \overline{BH} = 6\sqrt{3} \times 1{,}5 \approx 15{,}6\ \text{m}^3$$

12.2. Como, a altura é medida na perpendicular à base, α é um ângulo de um triângulo retângulo em que, relativamente ao ângulo α, o lado cujo comprimento é 1,8 m é o cateto oposto e o lado cujo comprimento é 2 m é o cateto adjacente.
Assim, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1{,}8}{2}$$

Como $\frac{1{,}8}{2} = 0{,}9$, procurando o valor mais próximo na coluna dos valores da tangente na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo α às unidades, temos que

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(0{,}9) \approx 42^\circ$$

13.