Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
7 de fevereiro de 2011

Proposta de resolução

1.

1.1. Ordenando os registos do Manuel, temos

$$\underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{50\%}\ \underbrace{2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3}_{50\%}$$

E assim a mediana deste conjunto de números é

$$\tilde{x} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

1.2. Como a retirada das duas bolas é feita sucessivamente, sem reposição do primeiro, cada bola não pode ser retirado por duas vezes, pelo que podemos organizar todas os produtos que é possível obter com recurso a uma tabela,

×	1	2	2
1	–	2	3
2	2	–	6
3	3	6	–

Assim, podemos observar que existem 6 produtos possíveis, dos quais 4 são pares, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração, temos que

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2.

2.1. Observando o gráfico, podemos verificar que existem 5 alunos com 13 anos, 40 alunos com 14 anos, 25 alunos com 15 anos e 10 alunos com 16 anos.
Assim, calculando a média de idades dos alunos de 9º ano da escola do João, temos

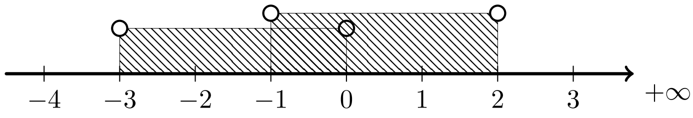
$$\overline{x} = \frac{13 \times 5 + 14 \times 40 + 15 \times 25 + 16 \times 10}{5 + 40 + 25 + 10} = \frac{1160}{80} = 14,5 \text{ anos}$$

2.2. Como o aluno escolhido tem menos de 15 anos, só pode ter 13 ou 14 anos, pelo que existem $5+40 = 45$ casos possíveis para a escolha.
Como existem apenas 5 alunos com 13 anos, o número de casos favoráveis é 5, pelo que, calculando a probabilidade com recurso à regra de Laplace, temos:

$$p = \frac{5}{45}$$

Resposta: **Opção C**

3. Representando o conjunto $A \cup B$ na reta real, temos:



Assim temos que $A \cup B =]-1,2[\cup]-3,0[=]-3,2[$
Ou seja, $A \cup B$ é o conjunto de todos os números reais maiores que -3 e menores que 2, o que pode ser representado por

$$\{x \in \mathbb{R} : x > -3 \wedge x < 2\}$$

Resposta: **Opção D**

4.

4.1. Verificando que o termo de ordem n existem 4 conjuntos de quadrados com n quadrados e ainda um quadrado no dentro da figura, podemos afirmar que para construir o termo de ordem 7 serão necessários 4 conjuntos de 7 quadrados mais 1 que irá ocupar a posição central, ou seja, são necessários

$$4 \times 7 + 1 = 28 + 1 = 29 \text{ quadrados}$$

4.2. Se existir um termo com 389 quadrados, então descontando o quadrado da posição central, os quadrados restantes devem ser agrupados em 4 conjuntos com o mesmo número de quadrados.
Como $389 - 1 = 388$ e $\frac{388}{4} = 97$, temos que o termo de ordem 97 tem 389 quadrados (1 quadrado central e 4 conjuntos com 97 quadrados), ou seja, existe um termo com 389 quadrados.

5. Como o perímetro do quadrado $[ABCD]$ é um número natural e a medida dos lados do quadrado também é um número natural, então o perímetro do quadrado $[ABCD]$ é um múltiplo de 4.
Como o perímetro do pentágono $[EFGHI]$ é um número natural, como o pentágono é regular e a medida dos seus lados também é um número natural, então o perímetro do pentágono $[EFGHI]$ é um múltiplo de 5.
Como o perímetro do quadrado é igual ao perímetro do pentágono, então o perímetro é múltiplo de 4 e de 5, ou seja, é múltiplo de 20.
Sabemos ainda que o resto da divisão deste número por 3 é 1, porque os lados do triângulo $[JKL]$ são números inteiros e $\overline{LM} = 1$
Como o número é menor que 45, sendo múltiplo de 20, só pode ser 20 ou 40; e como o resto da divisão de 3 é 1, só pode ser 40 porque $40 = 3 \times 13 + 1$ (e $20 = 3 \times 6 + 2$).

6. Como as grandezas x e y são inversamente proporcionais, sabemos que $x \times y$ é um valor constante.
Então, temos que,

$$100 \times 1,5 = 75 \times a \Leftrightarrow 150 = 75a \Leftrightarrow \frac{150}{75} = a \Leftrightarrow a = 2$$

7. Seja x o tempo, em horas, que demora a viagem do Jorge entre a sua aldeia e Lisboa, à velocidade média de 100 km/h.

   - $100 \times x$ é a distância, em quilómetros, que o Jorge percorre na viagem
   - $x+1$ é o tempo, em horas, que demora a viagem do Jorge entre a sua aldeia e Lisboa, à velocidade média de 80 km/h
   - $80 \times (x+1)$ é a distância, em quilómetros, que o Jorge percorre na viagem
   - $100x = 80(x+1)$ é a equação que traduz o problema

   Resolvendo a equação temos:

   $$100x = 80(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 100x = 80x + 80 \quad \Leftrightarrow \quad 100x - 80x = 80 \quad \Leftrightarrow \quad 20x = 80 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{80}{20} \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

   Resposta: Logo o Jorge demora 4 horas na viagem entre a sua aldeia e Lisboa, à velocidade média de 100 km/h, ou seja a distância percorrida é de 400 km.

8. Resolvendo a inequação, temos

   $$\frac{1}{2}(x-1) \geq 4(x+1) - 3x \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \geq 4x + 4 - 3x \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \geq \frac{x}{1}_{(2)} + \frac{4}{1}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \geq \frac{2x}{2} + \frac{8}{2} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow x - 1 \geq 2x + 8 \Leftrightarrow x - 2x \geq 8 + 1 \Leftrightarrow -x \geq 9 \Leftrightarrow x \leq -9$$

   C.S.$=]-\infty, -9]$

9. Resolvendo o sistema, vem

   $$\begin{cases} y - x = 5 \\ x = \frac{y}{2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = x \\ y - 5 = \frac{y}{2} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = x \\ y - \frac{y}{2} = -3 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = x \\ \frac{y}{1}_{(2)} - \frac{y}{2} = \frac{2}{1}_{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = x \\ \frac{2y}{2} - \frac{y}{2} = \frac{4}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 5 = x \\ 2y - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 5 = x \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = x \\ y = 4 \end{cases}$$

   C.S. $= \{(-1, 4)\}$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

    $$(x-2)^2 + 6x = x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 + 6x = x^2 - 4x + 4 + 6x = x^2 + 2x + 4$$

    Resposta: **Opção A**

11.

11.1. Temos que

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \Leftrightarrow x = \overline{AB} + 9 \Leftrightarrow x - 9 = \overline{AB}$$

Como

- $\overline{AF} = \overline{FE} = \overline{AC} = x$
- $\overline{BG} = \overline{GD} = \overline{BC} = 9$
- $\overline{AB} = \overline{DE} = x - 9$,

Vem que o perímetro da região sombreada, P_S, é

$$P_S = \overline{AB} + \overline{DE} + \overline{BG} + \overline{GD} + \overline{AF} + \overline{FE} = 2\overline{AB} + 2\overline{BG} + 2\overline{AF} =$$

$$= 2x + 2 \times 9 + 2(x-9) = 2x + 18 + 2x - 18 = 2x + 2x = 4x$$

11.2. Como, num quadrado todos os lados são iguais, e o quadrado $[BCDG]$ é uma redução do quadrado $[ACEF]$, os lados $[BC]$ e $[AC]$ podem ser considerados lados correspondentes, por isso a razão dos seus comprimentos é igual à razão de semelhança (r), que deve ser menor que 1, por se tratar de uma redução.
Assim, vem que:

$$r = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

12. Como $[ABCD]$ é um rectângulo $[ACD]$ é um triângulo rectângulo e o lado $[AC]$ é a hipotenusa.
Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os valores dados, vem que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4 + 16 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 20 \underset{\overline{AC}>0}{\Rightarrow} \overline{AC} = \sqrt{20}$$

Como $\overline{AE} = \overline{AC}$, temos que $\overline{AE} = \sqrt{20}$

Como ao ponto A corresponde o número $1 - \sqrt{20}$, ao ponto E corresponde o número

$$1 - \sqrt{20} + \sqrt{20} = 1$$

13. Os triângulos $[AED]$ e $[EBC]$ têm alturas iguais (como $\overline{EB} = \overline{DC}$ e $[ABCD]$ é um trapézio retângulo então $\overline{ED} = \overline{BC}$), e a base do triângulo $[EBC]$ é o dobro da base do triângulo $[AED]$, porque se $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ então $\overline{AB} = 3 \times \overline{AE} = \overline{AE} + 2 \times \overline{AE} = \overline{AE} + \overline{ED}$, logo $\overline{ED} = 2 \times \overline{AE}$

E assim, temos que a área do triângulo $[EBC]$ é o dobro da área do triângulo $[AED]$:

$$A_{[EBC]} = 2 \times A_{[AED]}$$

Como os triângulos $[EBC]$ e $[ECD]$ têm a mesma área, temos que a área do trapézio $[ABCD]$, $A_{[ABCD]}$, pode ser escrita como

$$A_{[ABCD]} = A_{[AED]} + A_{[EBC]} + A_{[ECD]} = A_{[AED]} + 2 \times A_{[AED]} + 2 \times A_{[AED]} = 5 \times A_{[AED]}$$

Como a área do trapézio $[ABCD]$ é 20 cm^2, vem que

$$A_{[ABCD]} = 20 \Leftrightarrow 5 \times A_{[AED]} = 20 \Leftrightarrow A_{[AED]} = \frac{20}{5} \Leftrightarrow A_{[AED]} = 4 \text{ cm}^2$$

E assim, a área sombreada A_S é

$$A_S = A_{[AED]} + A_{[EBC]} = A_{[AED]} + 2 \times A_{[EAD]} = 3 \times A_{[AED]} = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2$$

Resposta: **Opção B**