Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
17 de maio de 2011

Proposta de resolução

1.

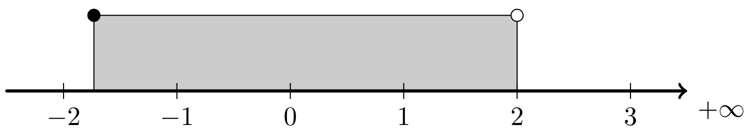
1.1. Como, na turma o número total de alunos é $5+3+3+2+8+4=25$ (número de casos possíveis); e o número de rapazes com mais de 14 anos anos é $8+4=12$ (número de casos favoráveis), temos que, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de de o aluno contemplado com o bilhete ser um rapaz com mais de 14 anos é

$$p=\frac{12}{25}=0{,}48$$

1.2. Como a inclusão da Rita nesta turma não alterou a média das idades, então a Rita tem uma idade exatamente igual à média de idades registada antes da sua inclusão na turma, ou seja a idade da Rita é a média das idades dos 25 alunos:

$$\overline{x}=\frac{(5+2)\times 14+(3+8)\times 15+(3+4)\times 16}{25}=\frac{7\times 14+11\times 15+7\times 16}{25}=\frac{375}{25}=15$$

2. Como $-\sqrt{3}\approx -1{,}73$, representando na reta real o intervalo $[-\sqrt{3},2[$, temos:



Assim, verificando que, como o intervalo é aberto no limite superior, $2\notin[-\sqrt{3},2[$, vem que o conjuntos dos números inteiros relativos que pertencem ao intervalo $[-\sqrt{3},2[$, é

$$\{-1{,}0{,}1\}$$

3. Identificando a regularidade dos termos da sequência, podemos observar que cada termo corresponde ao quadrado da sua ordem

1º termo	**2º termo**	**3º termo**	...	**10.º termo**	...
1	4	9	...	100	...
1^2	2^2	3^2	...	10^2	...

Assim, podemos determinar outros termos da sequência:

- 11º termo: $11^2=121$
- 12º termo: $12^2=144$
- 13º termo: $13^2=169$

Como $169-144=25$ podemos afirmar que os dois termos consecutivos da sequência cuja diferença é 25, são o 13º termo e o 12º termo, ou seja, os termos 169 e 144

4. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ \dfrac{1-x}{2}=\dfrac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ \dfrac{1-(1+2y)}{2}=\dfrac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ \dfrac{1-1-2y}{2}=\dfrac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ \dfrac{-2y}{2}=\dfrac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ -y=\dfrac{y}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ -\dfrac{y}{1}_{(3)}-\dfrac{y}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ -\dfrac{3y}{3}-\dfrac{y}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ -\dfrac{4y}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2y \\ y=\dfrac{0\times(-3)}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2(0) \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

C.S. $=\{(1{,}0)\}$

5. Fazendo o desenvolvimento do caso notável, e simplificando, vem

$$(x-3)^2+8x=x^2-2\times x\times 3+3^2+8x=x^2-6x+9+8x=x^2+2x+9$$

Resposta: **Opção C**

6.

6.1. Como a escola tem quatro turmas do 5º ano, cada uma delas com x alunos, $4x$ é o número de alunos do do 5º ano.
Da mesma forma, como existem cinco turmas do 6.º ano, cada uma com y alunos, $5y$ é o número de alunos do do 6º ano.
Assim, no contexto da situação descrita, $4x+5y$ representa o total dos alunos da escola, ou seja a soma dos alunos das 4 turmas do 5º ano com os alunos das 5 turmas do 6º ano.

6.2. Como uma turma do 5º ano tem x alunos e duas turmas do 6º ano têm $2y$ alunos, uma visita de estudo que inclua todos os alunos de uma turma do 5º ano e todos os alunos de duas turmas do 6º ano ter a participação de 67 alunos, significa que

$$x+2y=67$$

Da mesma forma, como duas turmas do 5º ano têm $2x$ alunos e uma turma do 6º ano tem y alunos, uma visita de estudo que inclua todos os alunos de duas turmas do 5º ano e todos os alunos de uma turma do 6º ano ter a participação de 71 alunos, significa que

$$2x+y=71$$

Assim, um sistema que permita determinar o número de alunos de cada turma do 5º ano (valor de x) e o número de alunos de cada turma do 6º ano (valor de y) é

$$\begin{cases} x+2y=67 \\ 2x+y=71 \end{cases}$$

7. Para que a equação $x^2 + bx + 9 = 0$ tenha apenas uma solução, o binómio discriminante deve ser igual a zero, ou seja, $b^2 - 4(1)(9) = 0$
Logo, resolvendo a equação, determinamos os valores de b:

$$b^2 - 4(1)(9) = 0 \Leftrightarrow b^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{36} \Leftrightarrow b = 6 \vee b = -6$$

8.

8.1. Como as grandezas C (caudal da torneira) e t (tempo que demora a encher um tanque) são inversamente proporcionais, sabemos que $C \times t$ é um valor constante.
Então, calculando o valor de a, temos que

$$5 \times 12 = a \times 8 \Leftrightarrow \frac{5 \times 12}{8} = a \Leftrightarrow \frac{60}{8} = a \Leftrightarrow 7{,}5 = a$$

8.2. Como as grandezas C (caudal da torneira) e t (tempo que demora a encher um tanque) são inversamente proporcionais, o gráfico que representa a relação entre as duas grandezas é parte de uma hipérbole e não uma reta, pelo que podemos excluir os gráficos das opções (C) e (D).
Como a capacidade do tanque é de 60 m^3, a um caudal de 60 m^3 por hora, corresponde um tempo de enchimento de 1 hora, pelo que o ponto de coordenadas (60,1) pertence ao gráfico da função, o que só é observado no gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

8.3. Substituindo h por 3,75 na expressão dada, podemos calcular t, ou seja, o número de horas que demorou para que altura da água no tanque atingisse os 3,75 dm:

$$3{,}75 = 1{,}5t \Leftrightarrow \frac{3{,}75}{1{,}5} = t \Leftrightarrow 2{,}5 = t$$

Ou seja, a altura da água no tanque atingiu os 3,75 dm, duas horas e meia, ou seja 2horas e 30 minutos, depois de ser ter iniciado o enchimento.
Como o enchimento se iniciou às 15 horas, a altura atingiu os 3,75 dm às 17 horas e 30 minutos.

9. Como o triângulo $[ABC]$ é uma ampliação do triângulo $[DEF]$, os triângulos são semelhantes.
Como os lados $[DE]$ e $[AB]$ se opõem a ângulos iguais, são correspondentes, por isso a razão dos seus comprimentos é igual à razão de semelhança (r), que deve ser maior que 1, por se tratar de uma ampliação.
Assim, vem que:

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{5}{2}$$

Resposta: **Opção B**

10.

10.1. Designado por D o ponto simétrico ao ponto B relativamente ao centro da circunferência, temos que como o ângulo ABD é o ângulo inscrito relativo ao arco AD, vem que $\overset{\frown}{AD} = 2 \times A\hat{B}D = 2 \times 36 = 72°$

Como $\overset{\frown}{BD} = 180°$, porque $[BD]$ é um diâmetro da circunferência, e $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$, vem que

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} + 72 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 180 - 72 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 108°$$

10.2. Como o triângulo $[OQB]$ é retângulo em O, então o lado $[BO]$ é o cateto adjacente ao ângulo OBQ e o lado $[OQ]$ é o cateto oposto ao mesmo ângulo, pelo que, usando a definição de tangente de um ângulo, e como $\overline{BO} = 8$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(O\hat{B}Q\right) = \frac{\overline{OQ}}{\overline{BO}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\overline{OQ}}{8} \Leftrightarrow 8 \operatorname{tg} 36^\circ = \overline{OQ}$$

Como $\operatorname{tg} 36^\circ \approx 0{,}73$, vem que: $\overline{DH} \approx 8 \times 0{,}73 \approx 5{,}84$

Definindo o lado $[OQ]$ como a base e o lado $[BO]$ como a altura (ou vice-versa), a área do triângulo $[BOQ]$ é

$$A_{[BOQ]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{BO}}{2} \approx \frac{5{,}84 \times 8}{2} \approx 23{,}36$$

E assim, a área do triângulo $[BSQ]$ é

$$A_{[BSQ]} = 2 \times A_{[BOQ]} \approx 2 \times 23{,}36 \approx 46{,}72$$

Determinando a área A do semicírculo, parcialmente sombreado, cujo raio (r) é 8, temos

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 8^2}{2} = \frac{64\pi}{2} = 32\pi$$

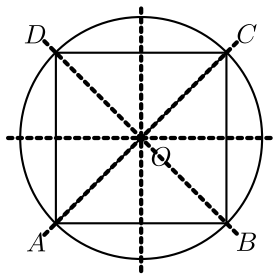
Finalmente podemos obter o valor da área sombreada (A_S), arredondada às unidades, como a diferença da área do semicírculo e a área do triângulo $[BSQ]$:

$$A_S = A - A_{[BSQ]} \approx 32\pi - 46{,}72 \approx 54$$

11.

11.1. Desenhando sobre o quadrado as duas diagonais e as duas perpendiculares aos lados pelos pontos médios podemos visualizar os 4 eixos de simetria do quadrado.

Resposta: **Opção C**



11.2. Como $[ABCD]$ é um quadrado, o triângulo $[ABC]$ é retângulo isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$ e o lado $[AC]$ é a hipotenusa.
Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo o valor conhecido, vem que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \underset{\overline{AB}=\overline{BC}}{\Leftrightarrow} \overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2 \times 6^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 2 \times 36 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 72 \underset{\overline{AC}>0}{\Rightarrow} \overline{AC} = \sqrt{72}$$

Assim, como o lado $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, temos que o raio é $r = \frac{\sqrt{72}}{2}$, pelo que o perímetro da circunferência, arredondado às décimas, é

$$P_\circ = 2\pi r = 2\pi \times \frac{\sqrt{72}}{2} = \pi \times \sqrt{72} \approx 26{,}7$$

