# Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
# 10 de maio de 2012

## Proposta de resolução

1.

1.1. Como, na turma A os alunos com 15 anos são 67% do total, a probabilidade de escolher ao acaso um aluno desta turma e ele ter 15 anos é $p = \frac{67}{100} = 0{,}67$

Como $0{,}5 < 0{,}67 < 0{,}75 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 0{,}67 < \frac{3}{4}$, logo $p \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$

Resposta: **Opção C**

1.2. Para calcular a média das idades das raparigas da turma B, multiplicamos cada idade pelo respetiva frequência absoluta e dividimos pelo número de raparigas da turma B, ou seja, temos que

$$n = 9 + 3 + 4 = 16$$

1.3. Como na turma B, existem 3 raparigas com 15 anos e um rapaz da mesma idade, construindo uma tabela para identificar todos os pares de alunos da turma B, com 15 anos, que se podem formar, temos

| | Rapariga 1 | Rapariga 2 | Rapariga 3 | Rapaz |
|---|---|---|---|---|
| Rapariga 1 | — | ♀♀ | ♀♀ | ♀♂ |
| Rapariga 2 | — | — | ♀♀ | ♀♂ |
| Rapariga 2 | — | — | — | ♀♂ |

Assim, recorrendo à Regra de Laplace, podemos concluir que escolhendo, ao acaso, dois alunos da turma B com 15 anos, a probabilidade de os dois alunos escolhidos serem do mesmo sexo é

$$p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

2. Podemos afirmar que

- $-3{,}15 \notin A$, porque $-3{,}15 < -\pi$ e todos os elementos do conjunto $A$ são maiores que $-\pi$
- $-\pi \notin A$, porque o conjunto $A$ é um intervalo aberto em $-\pi$, ou seja $-\pi$ não é um elemento deste conjunto
- $\pi \notin A$, porque todos os elementos do conjunto $A$ são números negativos
- $-3{,}14 \in A$, porque $-\pi < -3{,}14 \leq -1$

Assim, de entre as opções apresentadas, $-3{,}14$ é o único elemento do conjunto $A$

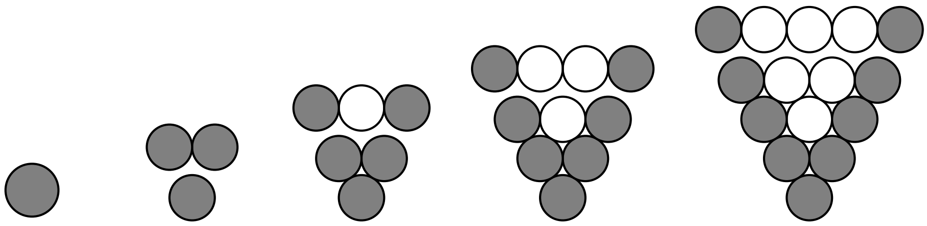
Resposta: **Opção D**

3. Escrevendo $\frac{1}{9}$ na forma de uma potência de base 3, e usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^4 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^4 = \left(3^{-2}\right)^4 = 3^{-2\times 4} = 3^{-8}$$

E assim temos que se $3^k = 3^{-8}$, então $k = -8$

4. Para obter o termo de ordem $n$ adicionam-se exatamente $n$ círculos ao termo anterior (como se pode ver na figura seguinte).




Assim, como o primeiro termo tem 1 círculo, então o termo de ordem 100 tem um número total de círculos igual à soma dos cem primeiros números naturais.

Como a linha superior do termo de ordem 100 tem 100 círculos, podemos verificar que a linha mais exterior do lado direito também terá 100 círculos (pretos), tal como a linha exterior da esquerda.
Lembrando que o círculo situado mais abaixo, pertence a ambas as linhas de círculos pretos, o número de círculos pretos do termo de ordem 100 é

$$100 + 100 - 1 = 199$$

5. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\frac{(x-1)^2}{6} - \frac{2x+1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2\times x\times 1 + 1^2}{6} - \frac{2x+1}{3}_{(2)} = \frac{1}{1}_{(6)} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{6} - \frac{4x+2}{6} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - (4x+2) = 6 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 4x - 2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 1,\ b = -6 \text{ e } c = -7)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6+8}{2} \vee x = \frac{6-8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{14}{2} \vee x = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow x = 7 \vee x = -1$$

C.S.=$\{-1{,}7\}$

6.

6.1. Como o ponto $B$ é o ponto de intersecção da reta $s$ com o eixo das ordenadas, e a reta $s$ é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$, então as coordenadas do ponto $B$ são $B(0; 4{,}5)$, pelo que a sua ordenada, $y_B$, é

$$y_B = 4{,}5$$

6.2. Como $O$ é a origem do referencial, e o ponto $A$ pertence ao eixo das abcissas, então a medida do comprimento do segmento de reta $[OA]$ é a abcissa do ponto $A$, $x_A$

$$\overline{OA} = x_A$$

Como o ponto $A$ pertence ao eixo das abcissas, tem ordenada nula, e como pertence à reta $s$, substituindo $y$ por zero na equação que define a reta $s$, podemos calcular o valor da abcissa de $A$:

$$0 = -1{,}2x_A + 4{,}5 \Leftrightarrow 1{,}2x_A = 4{,}5 \Leftrightarrow x_A = \frac{4{,}5}{1{,}2} \Leftrightarrow x_A = 3{,}75$$

Resposta: **Opção B**

6.3. Como o ponto $I$ pertence à reta $r$ e também à reta $s$, as suas coordenadas verificam as equações de ambas as retas, ou seja, as coordenadas do ponto $I$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} y = 0{,}6x \\ y = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} y = 0{,}6x \\ y = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6x \\ 0{,}6x = -1{,}2x + 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6x \\ 0{,}6x + 1{,}2x = 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6x \\ 1{,}8x = 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6x \\ x = \dfrac{4{,}5}{1{,}8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0{,}6 \times 2{,}5 \\ x = 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1{,}5 \\ x = 2{,}5 \end{cases}$$

Assim temos as coordenadas do ponto $I$: $I(2{,}5; 1{,}5)$

7.

7.1. Como a função $f$ é definida por $y = \dfrac{10}{x}, x > 0$, então o ponto $P$ que pertence ao gráfico de $f$ têm coordenadas $P\left(x_P, f(x_P)\right)$ ou seja $P\left(x_P, \dfrac{10}{x_P}\right)$

Temos ainda que as medidas dos lados do retângulo $[OAPC]$ coincidem com as coordenadas do ponto $P$ ($\overline{OA} = x_p$ e $\overline{AP} = y_P$), e que o ponto $P$ está sobre o gráfico de $f$, pelo que a área do retângulo $[OAPC]$ é

$$A_{[OAPC]} = \overline{OA} \times \overline{AP} = x_P \times y_P = x_P \times \frac{10}{x_P} = 10$$

Resposta: **Opção B**

7.2. Como $O$ é a origem do referencial, e o ponto $B$ pertence ao eixo das abcissas, e $\overline{OB} = 4$ então a abcissa do ponto $B$ é 4, e como o ponto $Q$ tem a mesma abcissa do ponto $B$ e pertence ao gráfico da função $f$, temos que as coordenadas do ponto $Q$ são $Q(4,f(4))$

Como $f(4) = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$, vem que $\overline{BQ} = 2{,}5$

Como o triângulo $[OBQ]$ é retângulo em $B$, temos que o lado $[OQ]$ é a hipotenusa, e assim podemos determinar $\overline{OA}$ recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OQ}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2 \Leftrightarrow \overline{OQ}^2 = 4^2 + 2{,}5^2 \Leftrightarrow \overline{OQ}^2 = 16 + 6{,}25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OQ}^2 = 22{,}25 \underset{\overline{OQ}>0}{\Rightarrow} \overline{OQ} = \sqrt{22{,}25} \Rightarrow \overline{OQ} \approx 4{,}72$$

Assim, calculando o perímetro do triângulo $[OBQ]$,e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$P_{[OBQ]} = \overline{OB} + \overline{BQ} + \overline{OQ} \approx 4 + 2{,}5 + 4{,}72 \approx 11{,}2$$

8.

8.1. Designando por $r$ o raio da circunferência, como $[AD]$ é um diâmetro, vem que $\overline{BC} = \overline{AD} = 2r$, e $\overline{AB} = \overline{CD} = r$
Assim, temos que o perímetro do retângulo $[ABCD]$ é

$$P_{[ABCD]} = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB} = 2 \times 2r + 2 \times r = 4r + 2r = 6r$$

Como sabemos que o perímetro é igual a 30 cm, podemos determinar o valor do raio, em centímetros:

$$P_{[ABCD]} = 30 \Leftrightarrow 6r = 30 \Leftrightarrow r = \frac{30}{6} \Leftrightarrow r = 5$$

Pelo que calculando o comprimento da circunferência (ou o perímetro), em centímetros, arredondado às décimas, vem

$$P_\circ = 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31{,}4 \text{ cm}$$

8.2. Como o ângulo $DEF$ é o ângulo inscrito na circunferência correspondente ao arco $DE$ e $D\hat{E}F = 30°$, temos que

$$\overset{\frown}{DF} = 2 \times D\hat{E}F = 2 \times 10 = 20°$$

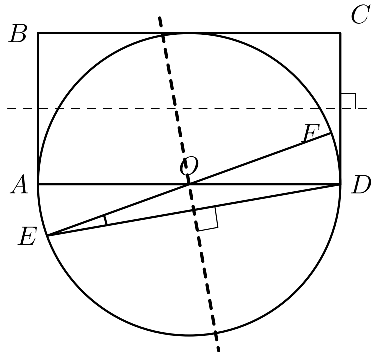
Como $[AD]$ é um diâmetro, temos que $\overset{\frown}{AD} = 180°$, pelo que podemos calcular a amplitude, em graus, do arco $FA$ :

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DF} + \overset{\frown}{FA} \Leftrightarrow 180 = 20 + \overset{\frown}{FA} \Leftrightarrow 180 - 20 = \overset{\frown}{FA} \Leftrightarrow 160 = \overset{\frown}{FA}$$

Assim a amplitude de uma rotação de centro em $O$ que transforme o ponto $F$ no ponto $A$ é a amplitude do ângulo ao centro $FOA$, cujo arco correspondente é o arco $FA$, pelo que

$$F\hat{O}A = \overset{\frown}{FA} = 160°$$

8.3. Traçando a mediatriz do segmento de reta $[CD]$ (como na figura ao lado podemos observar que nem o pornto $B$, nem o ponto $O$ pertencem a esta reta.




Por outro lado, sabemos que a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência contém o centro dessa circunferência, pelo que, como $[ED]$ é uma corda da circunferência, o ponto $O$ pertence à mediatriz do segmento de reta $[ED]$

Resposta: **Opção B**

9. Como o volume de uma pirâmide é um terço do volume do prisma com a mesma base e a mesma altura, temos que o volume da pirâmide a ser retirada é

$$V_{[ABCDI]} = \frac{V_{[ABCDEFGH]}}{3} = \frac{27}{3} = 9 \text{ cm}^3$$

Assim, o volume do sólido que resulta da retirada da pirâmide do prisma, $V_F$, pode ser calculado como a diferença dos volumes do prisma e da pirâmide:

$$V_F = V_{[ABCDEFGH]} - V_{[ABCDI]} = 27 - 9 = 18 \text{ cm}^3$$

10. Como os triângulos $[AED]$ e $[ACB]$ são semelhantes (porque têm um ângulo agudo em comum e os ambos têm um ângulo reto, logo têm dois pares de ângulos iguais dois a dois), podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{BC}}$$

(os lados $[ED]$ e $[BC]$ são os lados menores de cada um dos triângulos e os lados $[AE]$ e $[AC]$ são os lados de comprimento intermédio em cada um dos triângulos.) Como $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}$ e $\overline{ED} = 2$, substituindo na relação anterior, vem

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\overline{BC}} \Leftrightarrow 1 \times \overline{BC} = 2 \times 2 \Leftrightarrow \overline{BC} = 4$$

Como a área do triângulo $[ABC]$ é $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2}$, substituindo os valores conhecidos, temos:

$$20 = \frac{\overline{AC} \times 4}{2} \Leftrightarrow 20 = \overline{AC} \times 2 \Leftrightarrow \frac{20}{2} = \overline{AC} \Leftrightarrow 10 = \overline{AC}$$

Assim, temos que, $\overline{AC} = 10$ cm