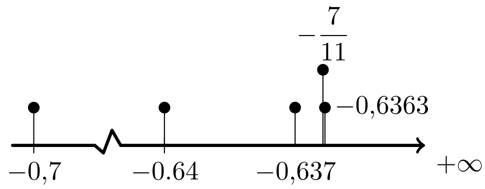
Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9º ano
12 de abril de 2013

Proposta de resolução

Parte 1

---

1. Como $-\frac{7}{11} \approx -0{,}63636$, representando os valores na reta real, temos



Logo, ordenando por ordem crescente os valores temos

$$-0{,}7 < -0{,}64 < -0{,}637 < -\frac{7}{11} < -0{,}6363$$

Resposta: **Opção A**

2. Calculando o número médio de horas semanais na disciplina de Matemática das turmas dos cursos do ensino profissional do agrupamento, temos

$$\overline{x} = \frac{1 \times 4 + 1{,}5 \times 10 + 2 \times 13 + 2{,}5 \times 8 + 3 \times 15}{4 + 10 + 13 + 8 + 15} = \frac{110}{50} = 2{,}2$$

Resposta: **Opção A**

3. Como os vértices dos dois pentágonos são vértices de um decágono regular, a região de interseção dos pentágonos também é um decágono regular, e assim o ângulo α é um ângulo interno de um decágono regular.
Como a soma dos ângulos internos de um polígono regular de n lados é $S_I = 180 \times (n-2)$, temos que a soma dos ângulos internos do decágono regular é

$$S_I = 180 \times (10 - 2) = 180 \times 8 = 1440°$$

Como os ângulos internos de um polígono regular têm a mesma amplitude, cada um dos 10 ângulos tem de amplitude

$$\alpha = \frac{1440}{10} = 144°$$

4.

4.1. Começamos por verificar que os triângulos $[AFD]$ e $[BFC]$ são semelhantes:

- os ângulos AFD e BFC são iguais porque são ângulos verticalmente opostos
- os ângulos CBF e FDA são iguais porque são ângulos alternos internos (as retas AD e BC são paralelas, visto que contêm as bases de um trapézio)

Assim, como os dois triângulos têm dois pares de ângulos iguais dois a dois (critério AA), são triângulos semelhantes.

Como os triângulos são semelhantes, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, e também é igual à razão das alturas, ou seja,

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}$$

Logo, temos que

$$\frac{\overline{AD}}{8} = \frac{3{,}75}{2{,}5} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{3{,}75 \times 8}{2{,}5} \Leftrightarrow \overline{AD} = 12$$

Temos ainda que $\overline{EG} = \overline{EF} + \overline{FG} = 3{,}75 + 2{,}5 = 6{,}25$

Assim, calculando a medida área do trapézio, $A_{[ABCD]}$, em cm^2, considerando $[AD]$ como a base maior, $[BC]$ como a base menor e $[EG]$ como a altura, vem

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{EG} = \frac{12+8}{2} \times 6{,}25 = \frac{20}{2} \times 6{,}25 = 10 \times 6{,}25 = 62{,}5 \text{ cm}^2$$

4.2. Como o arco HFI tem 128° de amplitude, o arco HI (assinalado a tracejado) tem $360 - 128 = 232°$ de amplitude.
Como o ângulo HFI é o ângulo inscrito relativo ao arco HI tem metade da amplitude do arco, ou seja

$$H\hat{F}I = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = \frac{232}{2} = 116°$$

Como o trapézio é isósceles, o triângulo $[AFD]$ também é isósceles, pelo que $D\hat{A}F = A\hat{D}F$, e também $H\hat{F}I = A\hat{F}D$
Logo, a amplitude, em graus, do ângulo ADF pode ser calculada como

$$A\hat{D}F + D\hat{A}F + A\hat{F}D = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}F + A\hat{D}F + 116 = 180 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \times A\hat{D}F = 180 - 116 \Leftrightarrow A\hat{D}F = \frac{64}{2} \Leftrightarrow A\hat{D}F = 32°$$

Parte 2

5. Simplificando a expressão, usando as regras operatórias de potencias de expoente racional, temos que:

$$\frac{(-a)^8}{a^3} = \frac{a^8}{a^3} = a^{8-3} = a^5$$

Resposta: **Opção C**

6.

6.1. Como sabemos que $\overline{JG} = 2$ cm, que $\overline{GK} = 3$ cm e que $\overline{FE} = 10$ cm, podemos calcular o volume do prisma $[JGKLIH]$:

$$V_{[JGKLIH]} = \frac{\overline{JG} \times \overline{GK}}{2} \times \overline{FE} = \frac{2 \times 3}{2} \times 10 = 3 \times 10 = 30 \text{ cm}^3$$

Como é conhecido o volume do sólido ($V_S = 390\,\text{cm}^3$), podemos determinar o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$:

$$V_{[ABCDEFGH]} = V_S - V_{[JGKLIH]} = 390 - 30 = 360 \text{ cm}^3$$

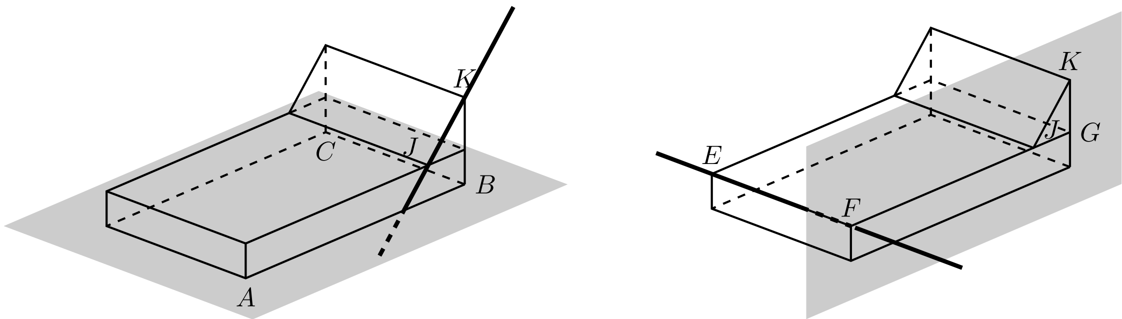
Como sabemos que $\overline{FA} = 2$ cm e que $\overline{FE} = 10$ cm, e ainda o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$, podemos calcular o comprimento do segmento $[FG]$:

$$V_{[ABCDEFGH]} = \overline{FA}\times\overline{FE}\times\overline{FG} \Leftrightarrow 360 = 2\times10\times\overline{FG} \Leftrightarrow 360 = 20\times\overline{FG} \Leftrightarrow \frac{360}{20} = \overline{FG} \Leftrightarrow \overline{FG} = 18 \text{ cm}$$

Como conhecemos o comprimento dos segmentos $[FG]$ e $[JG]$, podemos determinar o comprimento do segmento $[FJ]$

$$\overline{FJ} = \overline{FG} - \overline{JG} = 18 - 2 = 16 \text{ cm}$$

6.2. Observando a reta KJ e o plano ABC (na figura seguinte, à esquerda), podemos verificar que a reta não é perpendicular nem paralela ao plano.



Observando a reta EF e o plano GJK (na figura acima, à direita), podemos verificar que a reta não é paralela ao plano, mas é perpendicular.

Resposta: **Opção D**

7. Escrevendo os termos conhecidos em notação científica, temos

- **1º termo**: $0{,}2 = 2 \times 10^{-1}$
- **2º termo**: $0{,}02 = 2 \times 10^{-2}$
- **3º termo**: $0{,}002 = 2 \times 10^{-3}$

Como cada termo é obtido, a partir do anterior, dividindo por 10, o que é equivalente a multiplicar por 10^{-1}, podemos perceber que o **décimo termo** é

$$2 \times 10^{-10}$$

8.

8.1. Como o gráfico da função f é uma reta que passa na origem, sabemos que a sua expressão algébrica é da forma $f(x) = m.x$, com $m \in \mathbb{R}$
E como o ponto $A(8{,}6)$ pertence ao gráfico de f, podemos determinar o valor de m:

$$6 = m \times 8 \Leftrightarrow \frac{6}{8} = m \Leftrightarrow \frac{3}{4} = m$$

Assim, temos que a a expressão algébrica da função f é $f(x) = \frac{3}{4}x$ e calcular y_B, a ordenada do ponto B:

$$y_B = f(4) = \frac{3}{4} \times 4 = 3$$

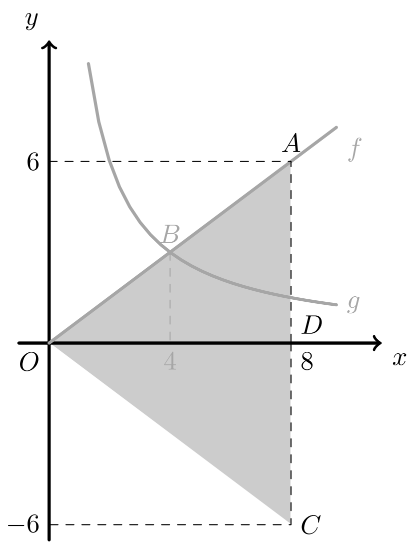
Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, sabemos que a sua expressão algébrica é da forma $g(x) = \frac{k}{x}$, com $k \in \mathbb{R}$
Como o ponto $B(4{,}3)$ pertence ao gráfico de g, podemos determinar o valor de k:

$$3 = \frac{k}{4} \Leftrightarrow 3 \times 4 = k \Leftrightarrow 12 = k$$

Pelo que a expressão algébrica da função g é $g(x) = \frac{12}{x}$

Resposta: **Opção D**

8.2. Como o ponto C é uma reflexão do ponto A relativamente ao eixo $Ox0$ tem a mesma abcissa e ordenada simétrica, ou seja, as coordenadas do ponto C são $C(8,-6)$



Relativamente ao triângulo $[OAC]$ temos que $\overline{AC} = 6 + 6 = 12$ e que $\overline{OA} = \overline{OC}$, e podemos determinar $\overline{OA}$ recorrendo ao Teorema de Pitágoras, considerando o triângulo retângulo $[OAD]$, em que D é a projecção ortogonal do ponto A no eixo Ox:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DA}^2 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 8^2 + 6^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 64 + 36 \Leftrightarrow \overline{OA}^2 = 100 \underset{\overline{OA}>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{100} \Leftrightarrow \overline{OA} = 10$$

E assim, temos que o perímetro do triângulo $[OAC]$ é:

$$P_{[OAC]} = \overline{AC} + 2\overline{OA} = 12 + 2 \times 10 = 12 + 20 = 32$$

9. Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} 3y-2(1-x)=5 \\ 4x+4=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2+2x=5 \\ 4x+4=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=5+2-2x \\ 4x+4=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=7-2x \\ 4x+4=7-2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y=7-2x \\ 4x+2x=7-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=7-2x \\ 6x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=7-2x \\ x=\frac{3}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=7-2\left(\frac{1}{2}\right) \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y=7-1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{6}{3} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$CS = \left\{ \left(\frac{1}{2},2\right) \right\}$

10. Simplificando o caso notável da multiplicação temos

$$(x-2)^2 = x^2 - 2\times x\times 2 + 2^2 = x^2 - 4x + 4$$

Podemos verificar que as opções (C) e (D) estão incorretas e que a opção (A) também não é correta porque na sua simplificação não existe qualquer subtração, e se simplificarmos a expressão da opção (B), vem:

$$(2-x)^2 = 2^2 - 2\times 2\times x + x^2 = 4 - 2x + x^2 = x^2 - 4x + 4$$

Resposta: **Opção B**

11.

11.1. Como o triângulo $[OAB]$ é retângulo em B, a sua área é igual a 32 e $\overline{BA} = 2$, podemos calcular $\overline{BO}$:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{BA}\times\overline{BO}}{2} \Leftrightarrow 32 = \frac{\overline{BO}\times 2}{2} \Leftrightarrow 32 = \overline{BO}$$

Como as ordenadas dos pontos A e B são iguais, temos que as coordenadas do ponto A são $A(2,32)$. Como o ponto A pertence ao gráfico de f e a função f é definida por $f(x) = ax^2$, substituindo as coordenadas do ponto A na expressão da função f, podemos determinar o valor de a:

$$32 = a\times(2)^2 \Leftrightarrow 32 = a\times 4 \Leftrightarrow \frac{32}{4} = a \Leftrightarrow 8 = a$$

11.2. Considerando $f(x) = 3x^2$, e substituindo a expressão algébrica de $f(x)$ na equação $f(x) = 5x - 2$, obtemos uma equação do segundo grau. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$f(x) = 5x-2 \Leftrightarrow 3x^2 = 5x-2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 3,\ b = -5 \text{ e } c = 2)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(2)}}{2(3)} \Leftrightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{25-24}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5\pm\sqrt{1}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5+1}{6} \vee x = \frac{5-1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{6}{6} \vee x = \frac{4}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \frac{2}{3}$$

C.S.$=\left\{\frac{2}{3},1\right\}$

12. Dos 60 turistas estrangeiros hospedados no hotel, 30% são franceses, o que corresponde a um número absoluto de turistas franceses de

$$60 \times \frac{30}{100} = 18$$

Assim, existem 18 turistas franceses (número de casos favoráveis) num total de 100 turistas (número de casos possíveis), recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade é $\frac{18}{100}$ a que corresponde uma percentagem de 18%

Resposta: **Opção B**

13. Ordenando as idades dos quatro filhos do casal Silva, temos

$$\begin{array}{cccc} 1^{\text{o}} & 2^{\text{o}} & 3^{\text{o}} & 4^{\text{o}} \\ 4 & \boxed{8 \quad 10} & & 18 \end{array}$$

E assim a mediana das idades dos quatro filhos do casal Silva é

$$\tilde{x} = \frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$$