Teste Intermédio de MATEMÁTICA - 9.º ano
3 de maio de 2014

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Como o total de alunos da turma do João, no início do ano era de 28 alunos, na lista ordenada dos valores, os valores centrais correspondem às 14ª e 15ª posições.

$$\begin{array}{cccccc} & 13^o & 14^o & 15^o & 16^o & \\ \ldots & 7 & \boxed{7 \quad 8} & & 8 & \ldots \end{array}$$

Como os primeiros 14 valores correspondem aos alunos com 7 anos, a 14ª observação é 7, e a 15ª é 8, pelo que a mediana das idades ($\tilde{x}$) é

$$\tilde{x} = \frac{7+8}{2} = 7{,}5$$

Resposta: **Opção B**

1.2. Designado por x a idade de cada um dos novos alunos, como a média das idades passou a ser de 7,7 anos, e o número total de alunos na turma passou a ser $28 + 2 = 30$, temos que:

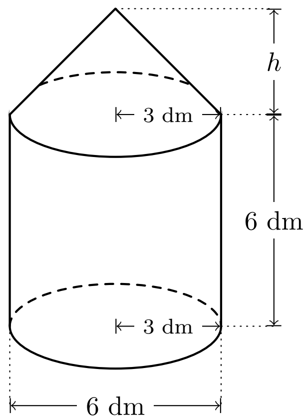
$$\frac{7 \times 14 + 8 \times 11 + 9 \times 3 + x + x}{30} = 7{,}7 \Leftrightarrow \frac{98 + 88 + 27 + 2x}{30} = 7{,}7 \Leftrightarrow \frac{213 + 2x}{30} = 7{,}7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 213 + 2x = 7{,}7 \times 30 \Leftrightarrow 213 + 2x = 231 \Leftrightarrow 2x = 231 - 213 \Leftrightarrow x = \frac{18}{2} \Leftrightarrow x = 9$$

Logo, a idade de cada um dos alunos que entraram na turma é de 9 anos.

2.

2.1. Calculando o volume do cilindro (V_{Ci}), em decímetros cúbicos, cujo raio é $\frac{6}{2} = 3$ dm (porque o diâmetro é 6), vem que:



$$V_{Ci} = A_{\text{Base}} \times \text{altura} = \pi \times 3^2 \times 6 = \pi \times 9 \times 6 = 54\pi$$

Logo temos que o volume do cone (V_{Co}), em decímetros cúbicos, é a diferença entre o volume total do sólido (V_T) e o volume do cilindro:

$$V_{Co} = V_T - V_{Ci} = 195 - 54\pi \approx 25{,}35$$

Como o volume do cone é dado por:

$$V_{Co} = \frac{1}{3} \times A_{\text{Base}} \times h$$

Substituindo os valores conhecidos na fórmula, determinamos o valor de h:

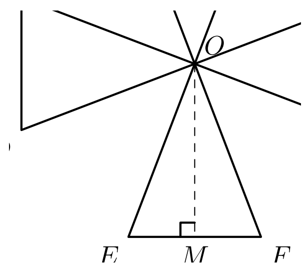
$$25{,}35 = \frac{1}{3} \times \pi \times 3^3 \times h \Leftrightarrow 3 \times 25{,}35 = 9\pi \times h \Leftrightarrow \frac{3 \times 25{,}35}{9\pi} = h \Leftrightarrow 2{,}69 \approx h$$

Assim, temos que o valor da altura do cone, arredondado às décimas é 2,7 dm.

2.2.

2.2.1. Designado por M o ponto médio do lado $[EF]$, temos que o triângulo $[OME]$ é retângulo em M, e que:

$$\overline{EM} = \frac{\overline{EF}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$



Como a altura do triângulo $[DEF]$ é $h = \overline{OM}$, usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{OE}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{EM}^2 \Leftrightarrow 7^2 = \overline{OM}^2 + 2{,}5^2 \Leftrightarrow$$

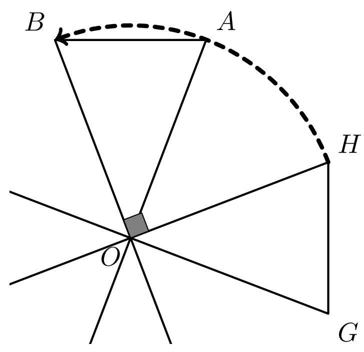
$$\Leftrightarrow 49 = \overline{OM}^2 + 6{,}25 \Leftrightarrow 49 - 6{,}25 = \overline{OM}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 42{,}75 = \overline{OM}^2 \underset{\overline{OM}>0}{\Rightarrow} \sqrt{42{,}75} = \overline{OM} \Rightarrow 6{,}54 \approx \overline{OM}$$

Assim, calculando a área do triângulo $[EFO]$, vem:

$$A_{[EFO]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{\overline{EF} \times \overline{OM}}{2} \approx \frac{5 \times 6{,}54}{2} \approx 16{,}35$$

Desta forma, o valor, arredondado às unidades, da área do triângulo $[EFO]$ é 16 m^2.



2.2.2. Uma rotação de 90° (no sentido positivo), de centro em O, transforma o ponto H no ponto B

Resposta: **Opção B**

Caderno 2

3. Usando as potências de 3 e a potência de expoente negativo, temos que:

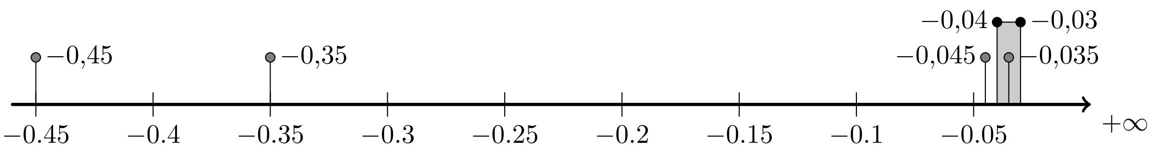
$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = 3^{-2}$$

4. Um número está escrito em notação científica se for um produto de a (em que $a \in [1,10[$) por uma potência de 10.
Assim, escrevendo 2014 em notação científica, temos:

$$2014 = 201{,}4 \times 10 = 20{,}14 \times 10^2 = 2{,}014 \times 10^3$$

Resposta: **Opção A**

5. Representando os valores na reta real, temos:



Assim, podemos verificar que $-0{,}04 < -0{,}035 < -0{,}03$

Resposta: **Opção C**

6. Como existem 3 filas horizontais e 3 filas verticais, são 6 as filas que se podem selecionar, ou seja, 6 casos possíveis.
Analisando o produto, para cada um dos 6 casos, temos

- $1 \times 2 \times 1 = 2$ (número primo)
- $3 \times 1 \times 5 = 15$ (número composto)
- $1 \times 7 \times 1 = 7$ (número primo)
- $1 \times 3 \times 1 = 3$ (número primo)
- $2 \times 1 \times 7 = 14$ (número composto)
- $1 \times 5 \times 1 = 5$ (número primo)

Assim, temos que, existem 4 produtos que são números primos, ou seja, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de obter um produto que seja um número primo é

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

7. A figura de ordem n desta sequência tem n círculos pretos e no topo um quadrado formado por n^2 círculos brancos.
Assim, a figura que tem 10 círculos pretos, tem, no topo, $10^2 = 100$ círculos brancos.
Logo, o número total de círculos da figura que tem 10 círculos pretos, é $10 + 100 = 110$

8.

8.1. Como o ponto $B(2{,}6)$ pertence ao gráfico da função, temos que

$$f(2) = 6 \Leftrightarrow a \times (2)^2 = 6 \Leftrightarrow a \times 4 = 6$$

Assim, temos que

$$f(-2) = a(-2)^2 = a \times 4 = 6$$

Resposta: **Opção B**

8.2. Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, a sua expressão algébrica é da forma $g(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como o ponto $B(2{,}6)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão anterior, para determinar o valor de k, vem:

$$6 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 6 \times 2 = k \Leftrightarrow 12 = k$$

Assim temos que $g(x) = \frac{12}{x}$ e podemos determinar c, sabendo que $g(c) = 1{,}2$:

$$1{,}2 = \frac{12}{c} \Leftrightarrow 1{,}2 \times c = 12 \Leftrightarrow c = \frac{12}{1{,}2} \Leftrightarrow c = \frac{12}{\frac{12}{10}} \Leftrightarrow c = \frac{12 \times 10}{12} \Leftrightarrow c = 10$$

9.

9.1. Como x é o preço do bilhete de adulto, então $8x$ é o preço a pagar pelos bilhetes dos 8 adultos do grupo.

9.2. Temos que $5y$ é o preço a pagar pelos bilhetes das 5 crianças do grupo, e como no total pagaram 224 euros, vem que $8x + 5y = 224$

Se adicionarmos um adulto ao grupo (o número de adultos será 9) e retirarmos uma criança (resultando num total de 4 crianças), o preço a pagar seria de $224 + 15$.

Assim, o sistema que permite determinar os valores de x e de y é

$$\begin{cases} 8x + 5y = 224 \\ \\ 9x + 4y = 224 + 15 \end{cases}$$

10. Simplificando a equação e aplicando a lei do anulamento do produto, vem:

$$(x+1)^2 = 1 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 = 1 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + 3x = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -5$$

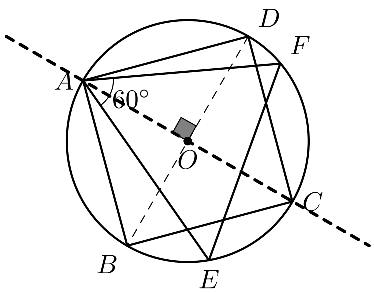
C.S.=$\{-5{,}0\}$

11.

11.1. A mediatriz do segmento de reta $[BD]$ é a reta perpendicular que contém o ponto médio do segmento de reta.

Assim, dois dos pontos assinalados na figura que pertencem à mediatriz de $[BD]$ são, por exemplo,

- o ponto A
- o ponto C
- o ponto O



11.2. Como o ângulo EAF é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja, $\overset{\frown}{EF} = 60 \times 2 = 120°$
Como $[BD]$ é um diâmetro, $\overset{\frown}{BD} = 180°$, e temos que

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FD} \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{EF} - \overset{\frown}{FD}$$

Assim, substituindo os valores conhecidos na igualdade anterior, temos:

$$\overset{\frown}{BE} = 180 - 120 - 20 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BE} = 40°$$

12.

12.1. Os ângulos ACB e DCE dos dois triângulos são congruentes, porque são coincidentes.
Como os dois triângulos têm um ângulo reto, podemos afirmar que os triângulos têm dois pares de ângulos congruentes, o que é suficiente para justificar que são semelhantes (critério AA).

12.2. Como os triângulos são semelhantes, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja,

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}$$

($[AC]$ e $[EC]$ são os lados que se opõem ao ângulo reto em cada um dos triângulos, e por isso, são correspondentes; $[BC]$ e $[DC]$ são os lados adjacentes ao ângulo reto e ao ângulo de ângulo agudo em C, e por isso também são lados correspondentes).

Como $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 11 + 4 = 15$, temos:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BC}}{4} = \frac{15}{5} \Leftrightarrow \overline{BC} = 3 \times 4 \Leftrightarrow \overline{BC} = 12$$