Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2006, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1.

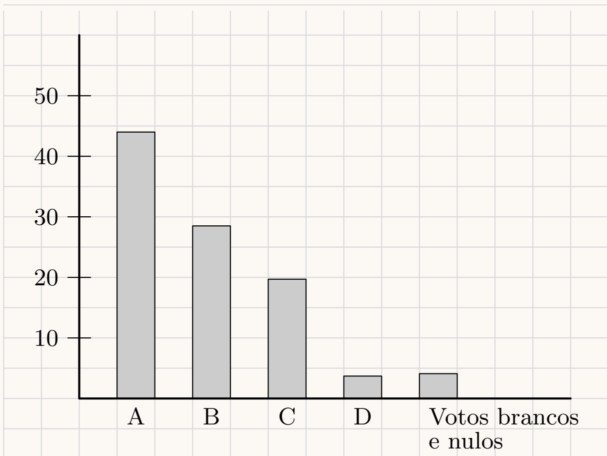
1.1.

1.1.1. Utilizando a informação da tabela dada e identificando o número de votos de cada partido com a frequência absoluta simples (apresentada na coluna a sombreado na tabela seguinte), podemos determinar o número total de votos expressos, somando as frequências absolutas simples.

Fazendo a divisão de cada frequência absoluta simples pelo total de alunos podemos obter as frequências relativas simples (com uma aproximação às décimas):

Partidos	A	B	C	D	Brancos e nulos	Total
Número de votos	13 442	8 723	6 033	1 120	1 258	30 576
Frequência relativa (%)	$\frac{8\,723 \times 100}{30\,576} \approx$ $\approx 44{,}0$	$\frac{13\,442 \times 100}{30\,576} \approx$ $\approx 28{,}5$	$\frac{6\,033 \times 100}{30\,576} \approx$ $\approx 19{,}7$	$\frac{1\,120 \times 100}{30\,576} \approx$ $\approx 3{,}7$	$\frac{1\,120 \times 100}{30\,576} \approx$ $\approx 4{,}1$	100

E assim, um gráfico de barras semelhante ao apresentado, mas relativo às eleições de 1997 para a mesma Câmara Municipal, é:



1.1.2. Pela observação do gráfico podemos verificar que o partido A obteve mais de 40% dos votos na eleição de 2001, sendo o partido mais votado. Assim, o Presidente da Câmara eleito em 1997 pelo partido A foi reeleito porque se recandidatou pelo partido A em 2001 e este foi o partido mais votado.

1.1.3. Podemos observar que o total de votos registados (incluindo votos branco e nulos) é:

$$13\,442 + 8\,723 + 6\,033 + 1\,120 + 1\,258 = 30\,576$$

Como a abstenção foi de 36%, o total de votos registados corresponde a $100 - 36 = 64\%$ dos eleitores inscritos nos cadernos eleitorais, pelo que o número total (t) de inscritos, é:

$$\frac{64}{100} = \frac{30\,576}{t} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 30\,576}{64} \Leftrightarrow t = 47\,775$$

Assim, a probabilidade de uma pessoa, ao acaso, de entre os cidadãos do concelho **que estavam inscritos nos cadernos eleitorais**, ter votado no partido A, é: $\frac{13\,442}{47\,775} \approx 0{,}281$

Logo, a probabilidade na forma de percentagem, arredondado às unidades, é 28%

1.1.4. Aplicando o método de Hondt na atribuição dos sete mandatos a cada partido, temos:

Partidos	A	B	C	D
Número de votos	13 442	8 723	6 033	1 120
Divisão por 1	13 442	8 723	6 033	1 120
Divisão por 2	$\frac{13\,442}{2} = 6721$	$\frac{8\,732}{2} = 4361{,}5$	$\frac{6\,033}{2} = 3016{,}5$	
Divisão por 3	$\frac{13\,442}{3} \approx 4480{,}7$	$\frac{8\,732}{3} \approx 2907{,}7$		
Divisão por 4	$\frac{13\,442}{4} = 3360{,}5$			
Divisão por 5	$\frac{13\,442}{5} = 2688{,}4$			

Aplicando o método de Hondt na distribuição dos sete mandatos, considerando a coligação dos partidos B e C, temos:

Força política	A	B+C	D
Número de votos	13 442	$8\,723 + 6033 =$ $= 14\,756$	1 120
Divisão por 1	13 442	14 756	1 120
Divisão por 2	$\frac{13\,442}{2} = 6721$	$\frac{14\,756}{2} = 7378$	
Divisão por 3	$\frac{13\,442}{3} \approx 4480{,}7$	$\frac{14\,756}{3} \approx 4918{,}7$	
Divisão por 4	$\frac{13\,442}{4} = 3360{,}5$	$\frac{14\,756}{4} = 3689$	
Divisão por 5		$\frac{14\,756}{5} = 2951{,}2$	

Assim, os sete mandatos atribuídos aos partidos, nos dois cenários (sem coligação e com a coligação B+C), estão descritos na tabela seguinte:

força política	**A**	**B** **B+C**	**C**	**D**
Número de mandatos sem coligação	4	2	1	0
Número de mandatos com a coligação B+C	3	4	—	0

Desta forma podemos verificar que o no caso da coligação, os partidos B e C obtêm mais mandatos em coligação (4) do que a soma dos mandatos obtidos por cada um isoladamente (3).

Verifica-se ainda que, em coligação obtêm a maioria dos mandatos o que implicaria que o Presidente da Câmara deixaria de ser um candidato do partido A, e seria um candidato da coligação dos partidos B e C.

Neste caso, podemos concluir que a afirmação da página do STAPE se revela verdadeira, havendo uma vantagem clara dos partidos B e C se tivessem concorrido em coligação, em relação à situação em que concorrem isoladamente.

1.2.

1.2.1. Como a diferença entre as estimativas pontuais para a votação dos dois partidos é $41 - 39 = 2\%$, e, por isso inferior à margem de erro (6%), podemos afirmar que, de acordo com a sondagem, os dois partidos estavam em ≪*empate técnico*≫.

1.2.2. Como a margem de erro da sondagem era de 6% e o nível de confiança de 95%, a sondagem previu que com 95% de probabilidade a votação no partido X estaria compreendida entre $39 - 6 = 33\%$ e $39 + 6 = 45\%$.
Da mesma forma a sondagem previu com a mesma probabilidade que a votação no partido Y estaria compreendida entre $41 - 6 = 35\%$ e $41 + 6 = 47\%$.
Assim, o facto do partido X ter saído vencedor é compatível com a previsão da sondagem, porque a previsão da votação nos dois partidos não implicam que o partido X tivesse obtido um valor inferior à votação do partido Y (por exemplo, de acordo com a sondagem, o partido X poderia ter obtido uma votação até 45% e o partido Y uma votação de 35%).
Desta forma não existem motivos para se concluir que a sondagem estava mal feita.

1.2.3. A margem de erro do intervalo, ou seja, metade da amplitude do intervalo de confiança, é dado por:

$$\frac{\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)}{2} = \frac{\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} - \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}{2} =$$

$$= \frac{2z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}{2} = z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Como a proporção da amostra, ou seja a estimativa pontual, no caso do partido X é $\hat{p} = 0{,}39$ e o valor de z para um nível de confiança de 95% é $z = 1{,}960$, temos que a margem de erro, em função da dimensão da amostra, será de 0,06 (6%), se:

$$1{,}960\sqrt{\frac{0{,}39(1-0{,}39)}{n}} = 0{,}06$$

Inserindo na calculadora gráfica a expressão $y = 1{,}960\sqrt{\frac{0{,}39(1-0{,}39)}{x}}$, e visualizando a tabela de valores da função, reproduzida na figura ao lado, podemos identificar o menor valor de x a que corresponde um valor aproximado de 0,03, ou seja, $x = 35$

X	Y1
252	0,06022
253	0,06010
254	0,05998
255	0,05987
256	0,05975
257	0,05963
258	0,05952

Logo, podemos concluir que a dimensão da amostra, para que a margem de erro seja aproximadamente 0,06 é um valor próximo de:

$$n = 254$$

Ainda recorrendo à tabela, podemos verificar que o valor da margem de erro que correspondente à duplicação da dimensão da amostra, ou seja, $n = 2 \times 254 = 508$, será aproximadamente 4%, pelo que não é verdade que a duplicação da dimensão da amostra implique a redução da margem de erro para metade, ou seja, a afirmação é falsa.

2.

2.1. Inserindo na calculadora gráfica os valores dos anos numa lista e os valores correspondentes da população (em milhares) noutra lista, e determinando os valores associados à correlação linear, temos que o valor do coeficiente de correlação, arredondado às milésimas é $r \approx 0{,}988$

Como se pode observar no diagrama de dispersão apresentado, a reta de regressão é um modelo bem ajustado ao conjunto dos pontos que representam os dados da tabela. Este grau de ajustamento é confirmado pelo valor do coeficiente de correlação, que é próximo do valor 1, o que traduziria um ajustamento perfeito.

2.2. Apesar do modelo linear apresentado (reta de regressão) se ajustar bem ao conjunto dos pontos que representam os dados da tabela, podemos verificar que não é um modelo ajustado para:

- estimar o número de habitantes, em Portugal, há alguns séculos (três ou mais), porque neste caso, o modelo iria prever valores negativos para a população, o que não faria sentido no contexto da situação em estudo.
  Por exemplo, para o valor de $a = 1700$, correspondente a, aproximadamente três séculos atrás, o valor da população correspondente, segundo o modelo apresentado, é:

$$p = 0{,}047 \times 1700 - 84{,}95 = -3{,}86 \text{ milhões}$$

- prever a evolução da população portuguesa, a muito longo prazo, porque neste caso, o modelo prevê um aumento ilimitado da população, o que não seria sustentável porque os recursos necessários para sustentar a população teriam que aumentar de forma também ilimitada, o que é impossível, porque estes recursos são, comprovadamente, finitos e limitados.
  Por exemplo, para o valor de $a = 2100$, correspondente a, aproximadamente um séculos no futuro, o valor da população correspondente, segundo o modelo apresentado, é:

$$p = 0{,}047 \times 2100 - 84{,}95 = 15{,}52 \text{ milhões}$$

  Neste caso significaria que a população teria um aumento de, aproximadamente 50% relativamente ao valor atual, sem que seja razoável assumir que os recursos disponíveis possam crescer na mesma proporção.

2.3. De acordo com o modelo linear apresentado, a população estimada em 2010 e 2050, é, respetivamente:

- 2010: $p = 0{,}0477 \times 2010 - 84{,}95 = 10{,}927$ milhões
- 2050: $p = 0{,}0477 \times 2050 - 84{,}95 = 12{,}835$ milhões

Na primeira década do séc. XXI, o modelo linear permite fazer previsões próximas das estimativas do INE (10,626 milhões de habitantes), pelo que se pode considerar adequado. Como o INE estima um decréscimo da população entre 2010 e 2050, o modelo de crescimento linear deixa de ser adequado porque continua a estimar um crescimento contínuo da população ao longo do tempo, nomeadamente entre 2010 e 2050.

A tendência de crescimento populacional populacional indicada com o modelo não é compatível com os indicadores de ordem social apresentados, como a taxa de fecundidade abaixo do limiar de substituição das gerações, bem como a improbabilidade de ocorrerem saldos migratórios que permitam inverter esta tendência.