

PROVA 835/13 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

**Duração da prova: 150 minutos
2007**

1.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que implicam a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (páginas 12 e 13).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação escrita em língua portuguesa.

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada (riscando a(s) que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Numa Assembleia-geral de uma federação desportiva, na qual estavam presentes representantes de várias regiões do país, foi decidida a forma de representação regional em futuras assembleias-gerais, de acordo com os seguintes princípios:

- o número de representantes de cada região na assembleia-geral deveria estar de acordo com o número de praticantes federados existentes nessa região;
- o número total de representantes na Assembleia seria 50;
- seria utilizado o método de Hamilton para distribuir os representantes pelas várias regiões.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição dos representantes pelas várias regiões faz-se da seguinte forma:

- calcula-se o «Divisor Padrão» (DP), dividindo o número total de praticantes federados (TP) pelo número total de representantes a atribuir (R). O divisor padrão é, portanto, o número de praticantes por cada representante;
- a seguir, calcula-se a «Quota Padrão» (QP) para cada uma das regiões, dividindo o número de praticantes federados dessa região pelo divisor padrão;
- a cada região é atribuído, inicialmente, um número de representantes igual à parte inteira da respectiva quota padrão. Cada uma dessas partes inteiras designa-se por «Quota Inferior» (QI) da região. Se o número de representantes distribuídos for igual ao número total de representantes a distribuir (R), o processo termina;
- caso ainda restem representantes por distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os representantes que restam (um para cada região) às regiões que tiverem partes decimais maiores;
- Na atribuição do último representante, se houver duas regiões com a mesma parte decimal, atribui-se o último representante à região com menor número de representantes.

Na tabela abaixo, estão indicados os números de praticantes das várias regiões representadas na Assembleia-geral.

REGIÕES	NÚMERO DE PRATICANTES
Minho	561
Beiras	345
Alentejo	120
Ribatejo	870
Algarve	310
TOTAL	2 206

1.1. Copie para a sua folha de prova a tabela a seguir apresentada e, depois, complete-a.

Calcule o divisor padrão com **três casas decimais** e utilize-o para calcular as quotas padrão com **três casas decimais**.

REGIÕES	NÚMERO DE PRATICANTES (<i>P</i>)	QUOTA PADRÃO (<i>P : DP</i>)	QUOTA INFERIOR (<i>QI</i>)	PARTE DECIMAL
Minho	561			
Beiras	345			
Alentejo	120			
Ribatejo	870			
Algarve	310			

2 206	NÚMERO TOTAL DE PRATICANTES (<i>TP</i>)
50	REPRESENTANTES A DISTRIBUIR (<i>R</i>)
	DIVISOR PADRÃO (<i>DP = TP : R</i>)

1.2. Determine o número de representantes de cada região nas assembleias-gerais, de acordo com a aplicação do método de Hamilton.

- 1.3.** Dirigentes desportivos da Região Autónoma da Madeira pretendem que a sua região, com 130 praticantes federados, tenha também representantes na Assembleia-geral. Face à situação, foi decidido alterar para 53 o número total de representantes, tendo em conta o aumento do número de regiões representadas.

- 1.3.1.** A tabela seguinte representa a situação da referida federação com as suas seis regiões.

REGIÕES	NÚMERO DE PRATICANTES (<i>P</i>)	QUOTA PADRÃO (<i>P : DP</i>)	QUOTA INFERIOR (<i>QI</i>)	PARTE DECIMAL
Minho	561			
Beiras	345			
Alentejo	120			
Ribatejo	870			
Algarve	310			
Madeira	130			

2 336	NÚMERO TOTAL DE PRATICANTES (<i>TP</i>)
53	REPRESENTANTES A DISTRIBUIR (<i>R</i>)
	DIVISOR PADRÃO ($DP = TP : R$)

Copie para a sua folha de prova a tabela acima apresentada e complete-a.

Calcule o divisor padrão com **três casas decimais** e utilize-o para calcular as quotas padrão com **três casas decimais**.

- 1.3.2.** Depois de completar a tabela anterior, elabore um texto sobre a distribuição dos representantes das seis regiões na Assembleia-geral.

O texto deve incluir:

- uma alusão à opção de o número de delegados passar de 50 para 53, relacionando-o com o novo divisor padrão;
- uma comparação, região a região, do número de representantes nos dois cenários (antes e após a entrada da Madeira) e um comentário sobre se alguma região terá razões para se sentir prejudicada pela entrada da região da Madeira na federação.

2. O imposto sobre os rendimentos de pessoas singulares (IRS) é definido de forma que sejam aplicadas taxas de imposto mais altas às famílias com rendimentos que se enquadram nos escalões mais elevados. Para calcular o imposto a pagar por uma determinada família, num certo ano, é necessário calcular o «rendimento colectável» e a «colecta» relativos a essa família.

O «rendimento colectável» é a parte do rendimento global auferido por um contribuinte, durante um ano, sujeita a imposto. No caso de um casal sem filhos, o rendimento colectável é calculado dividindo por dois a soma dos rendimentos do marido e da mulher, no ano considerado. Na tabela seguinte, são apresentados os escalões, os rendimentos colectáveis, as taxas correspondentes e, na última coluna, um montante em euros denominado «Parcela a abater».

A «colecta» é o imposto a pagar, caso não haja deduções a fazer.

Os escalões de rendimento colectável e as respectivas taxas, para os contribuintes residentes no Continente, em 2005, eram:

Escalões	Rendimento colectável (em euros)	Taxa (em %)	Parcela a abater (em euros)
1	Até 4 351	10,5	0,00
2	De 4 351,01 até 6 581	13,0	108,78
3	De 6 581,01 até 16 317	23,5	799,78
4	De 16 317,01 até 37 528	34,0	2 513,06
5	De 37 528,01 até 54 388	36,5	3 451,26
6	Mais de 54 388	40,0	5 354,82

A seguir apresenta-se o procedimento simplificado para o cálculo do imposto a pagar por casais sem filhos. Trata-se de um exemplo em que o rendimento global do casal é de € 80 000 (soma dos rendimentos do marido e da mulher), ao qual corresponde um rendimento colectável de € 40 000, e que se encontra, portanto, no quinto escalão.

Cálculo do rendimento global do casal:

- Contribuinte A (marido), com um rendimento total de € 45 000.
- Contribuinte B (mulher), com um rendimento total de € 35 000.
- O rendimento global deste casal é € 80 000 (€ 45 000 + € 35 000).

Cálculo do rendimento colectável:

- O rendimento colectável é € 40 000 (80 000 : 2).

Cálculo da colecta do casal:

- Consultar a tabela anterior e verificar em que escalão se encontra o rendimento colectável (taxa a aplicar: 36,5%; parcela a abater: € 3 451,26);
- Aplicar a taxa de imposto ao rendimento colectável do casal:
 $€ 40\ 000 \times 0,365 = € 14\ 600$;
- Subtrair, do valor anteriormente obtido, a parcela a abater:
 $€ 14\ 600 - € 3\ 451,26 = € 11\ 148,74$;
- A colecta do casal obtém-se multiplicando por 2 o valor anterior:
 $€ 11\ 148,74 \times 2 = € 22\ 297,48$.

Cálculo do IRS:

- IRS = colecta – deduções = € 22 297,48.

Neste caso simplificado, como não existem deduções a fazer, a colecta coincide com o valor do IRS.

Nos itens **2.1.** e **2.2.**, sempre que for necessário proceder a arredondamentos, utilize **duas casas decimais**.

- 2.1.** Em 2005, o rendimento global de dois contribuintes casados, o Rui e a Luísa, foi de € 20 950, dado que os rendimentos do Rui foram € 10 950 e os da Luísa € 10 000.

Determine o correspondente valor de IRS que este casal pagou, relativo ao ano de 2005, admitindo que não houve quaisquer deduções a fazer à colecta e utilizando o procedimento simplificado apresentado na página anterior.

- 2.2.** Em Dezembro de 2005, o Manuel e a Joana verificaram que o rendimento global do casal, nesse ano, era de € 13 000. Os rendimentos da Joana foram € 12 500 e os do Manuel € 500. Foi-lhes proposto prestarem um serviço, no Natal desse ano, pelo qual receberiam a quantia de € 1 000. O Manuel, após consultar a tabela das taxas de IRS, resolveu não aceitar o serviço, dizendo à Joana que «não queria perder dinheiro, dado que passariam do escalão de 13% para o de 23,5%».

Escreva um pequeno texto mostrando que o Manuel não tem razão. Apoie os seus argumentos em cálculos do IRS, com e sem a prestação do referido serviço. Suponha que o casal não estava sujeito, naquele ano, a quaisquer deduções à colecta. Utilize o procedimento simplificado anteriormente apresentado.

O texto deve incluir:

- o cálculo do IRS com a prestação do serviço, no Natal;
- o cálculo do IRS sem a prestação do serviço, no Natal;
- a comparação dos rendimentos e uma conclusão.

3. Num dos muitos *sites* em que se joga xadrez *online*, na *internet*, a entrada de um jogador é condicionada pelo gestor do *site*, com probabilidade fixa igual a 0,8, em cada tentativa de entrada na sala de jogo.

3.1. Com base neste número, calcule o valor exacto da probabilidade de um candidato conseguir entrar na sala de jogo **apenas** à terceira tentativa.

3.2. Para confirmar a probabilidade de um jogador entrar na sala à primeira tentativa, um utilizador do *site* fez um inquérito, por amostragem, onde perguntava aos frequentadores **presentes** na sala se tinham conseguido entrar à primeira tentativa. Um dos inquiridos, especialista em estatística, referiu que a concepção da amostragem estava errada.

Escreva uma pequena composição em que analise o parecer do especialista, esclarecendo de que forma esta restrição do universo dos inquiridos pode alterar o resultado do inquérito.

O texto deve incluir:

- uma alusão à restrição do universo dos inquiridos aos frequentadores que tenham conseguido aceder ao *site*;
- uma alusão à escolha de um outro universo, incidindo sobre todos os jogadores que tentassem aceder ao *site*, independentemente de terem conseguido entrar ou não;
- uma conjectura de como a escolha do primeiro universo pode afectar o valor estimado de 0,8 como probabilidade de entrar no *site* à primeira tentativa.

3.3. Com base no parecer do especialista de estatística utilizado na questão anterior, foi decidido estender o inquérito ao universo de todas as pessoas que tentaram aceder ao *site*. Em conformidade, numa amostra com 50 inquiridos, o número de respostas «Sim» à pergunta «Conseguiu entrar à primeira tentativa?» foi 39.

Com base nestes resultados, construa um intervalo com uma confiança de 95% para a proporção de pessoas que, efectivamente, conseguiram entrar à primeira tentativa.

Nos cálculos intermédios, utilize **quatro casas decimais**. Relativamente aos extremos do intervalo, apresente-os **arredondados às milésimas**.

- 3.4.** O gestor do *site* decidiu estudar a evolução do número de jogadores de xadrez, desde o lançamento do *site* até à sexagésima semana, para o que foi registando o número de jogadores, de cinco em cinco semanas, tendo obtido a tabela seguinte:

Tempo (em semanas) (x)	Número de jogadores (em milhares) (y)
5	20
10	46
15	58
20	82
25	110
30	128
35	136
40	163
45	170
50	194
55	210
60	245

Represente **na sua calculadora** o diagrama de dispersão dos dados e determine a equação da recta de regressão linear, $y = ax + b$, indicando os valores de a e b com uma **aproximação às centésimas**.

Transcreva para a sua folha de prova um esboço, no mesmo referencial, dos gráficos obtidos (diagrama de dispersão e recta de regressão linear).

FIM

COTAÇÕES

1.	60 pontos
1.1.	13 pontos
1.2.	13 pontos
1.3.	34 pontos
1.3.1.	15 pontos
1.3.2.	19 pontos
2.	50 pontos
2.1.	25 pontos
2.2.	25 pontos
3.	90 pontos
3.1.	25 pontos
3.2.	25 pontos
3.3.	15 pontos
3.4.	25 pontos
TOTAL	200 pontos

FORMULÁRIO

TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

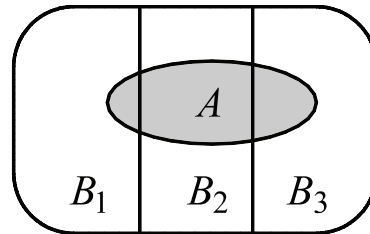
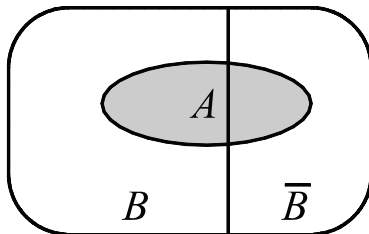
MODELOS DE GRAFOS

Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

PROBABILIDADES

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) + P(\bar{B}) \times P(A|\bar{B})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B_k|A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)} \end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$
<p>n - dimensão da amostra \bar{x} - média amostral σ - desvio padrão da variável z - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$
<p>n - dimensão da amostra \bar{x} - média amostral s - desvio padrão amostral z - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$
<p>n - dimensão da amostra \hat{p} - proporção amostral z - valor relacionado com o nível de confiança (*)</p>

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576