

---

## **Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais**

---

10.º/11.º anos ou 11.º/12.º anos de Escolaridade

---

**Prova 835/1.ª Fase**

12 Páginas

---

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

---

**2008**

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

---

---

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter quando estas não estão apresentadas no próprio enunciado.

---

As cotações dos itens encontram-se na página 10.

A prova inclui um Formulário nas páginas 11 e 12.

---

1. O senhor Silvino deixou uma herança, a ser distribuída, equitativamente, pelos seus únicos herdeiros: os filhos Pedro, Rita e Sofia. A herança é constituída por um apartamento e um terreno.

Pelo valor sentimental que nutrem pelos bens, os irmãos não os querem colocar à venda. Assim, decidem distribuir os bens, utilizando o seguinte método:

- cada herdeiro atribui, secretamente, um valor a cada um dos bens;
- seguidamente, são divulgados esses valores (que se apresentam na tabela abaixo).

| <b>Bens</b> \ <b>Herdeiros</b> | <b>Pedro</b> | <b>Rita</b> | <b>Sofia</b> |
|--------------------------------|--------------|-------------|--------------|
| <b>Apartamento</b>             | € 200 000    | € 210 000   | € 190 000    |
| <b>Terreno</b>                 | € 100 000    | € 90 000    | € 80 000     |

Tendo em conta os valores que cada herdeiro atribui a cada um dos bens, o método prossegue da seguinte forma:

- determina-se o valor global atribuído à herança por cada herdeiro e o valor da mesma que cada um considera justo receber ( $\frac{1}{n}$  do valor atribuído à herança pelo herdeiro, sendo  $n$  o número de herdeiros);
- cada bem é atribuído ao herdeiro que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui ao respectivo bem;
- caso, por aplicação do procedimento anterior, um herdeiro não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que «valor dos bens recebidos» por esse herdeiro é zero euros;
- seguidamente, caso o valor dos bens recebidos por um herdeiro:
  - ultrapasse o valor da parte que este considera justo receber, o herdeiro disponibiliza, em dinheiro, o respectivo excedente;
  - não atinja o valor da parte que este considera justo receber, o herdeiro recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta;
- após este procedimento, caso sobre dinheiro, este é distribuído em partes iguais por todos os herdeiros.

De acordo com o método acima descrito:

- 1.1. Indique quanto vale a herança para cada um dos herdeiros, bem como o valor que cada um deles considera justo receber.

**1.2.** Num pequeno texto, indique, justificando, se algum dos herdeiros pode ter razão para reclamar do resultado final da divisão, face ao que considerava justo receber.

O texto deve, obrigatoriamente, contemplar os pontos que a seguir se indicam:

- o valor da herança que cada herdeiro efectivamente recebeu;
- a comparação entre o valor da herança que cada um dos herdeiros considerava justo receber e o que efectivamente recebeu;
- a conclusão quanto à razão para algum herdeiro reclamar, ou não, do resultado final da divisão.

Comece por calcular como ficou distribuída a herança pelos três irmãos, determinando:

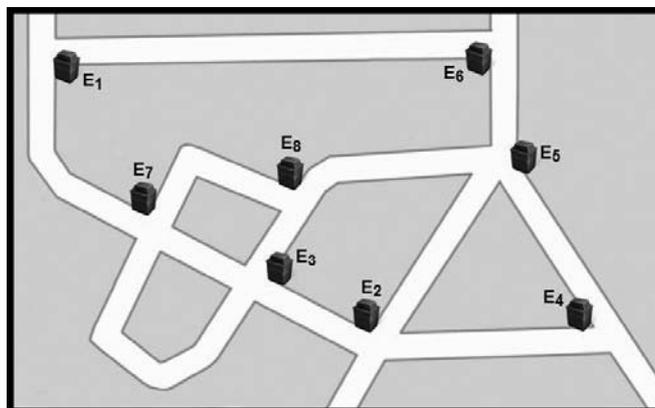
- a quem foi atribuído cada um dos bens;
- o valor, em dinheiro, que cada um dos herdeiros recebeu ou pagou, após a atribuição dos bens;
- o valor, em dinheiro, que cada um dos herdeiros efectivamente recebeu ou pagou, no final de todo o processo.

Na resposta a este item, quando for necessário proceder a arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Caso não tenha respondido à questão 1.1., e somente neste caso, considere que o valor da herança que o Pedro, a Rita e a Sofia consideram justo receber é de € 100 000, € 99 000 e € 91 000, respectivamente.

2. Uma Câmara Municipal elaborou um contrato com a empresa *FUTUROLIMPO*, empresa especializada na recolha selectiva de resíduos.

Na figura, apresenta-se um «mapa» de uma zona residencial desse município, que possui oito espaços de recolha selectiva de resíduos (ecopontos). Os oito ecopontos estão representados por  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ,  $E_5$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  e  $E_8$ .



Designa-se por «troço de rua» a ligação entre dois ecopontos adjacentes, isto é, o percurso que se efectua para ir de um desses ecopontos ao outro sem passar por mais nenhum.

- 2.1. Considere que o camião de recolha selectiva de resíduos que passa por essa zona residencial inicia o seu percurso no ecoponto  $E_4$  e que o termina no ecoponto  $E_2$ .

Admita que, em cada troço de rua, o camião pode estacionar junto de cada ecoponto, independentemente do sentido de circulação.

Indique um percurso, de  $E_4$  a  $E_2$ , para que o camião possa recolher os resíduos de todos os ecopontos, passando por cada um deles uma única vez.

Apresente o percurso na forma de uma sequência, utilizando as designações dos ecopontos.

- 2.2. Os moradores da mesma zona residencial reclamaram das condições de alguns troços de rua de acesso aos ecopontos. A Câmara Municipal decidiu enviar um funcionário especializado, para inspeccionar as condições dos mesmos.

Admita que o funcionário decidiu iniciar e terminar as suas inspecções junto do mesmo ecoponto. No entanto, ao analisar o «mapa» da zona em causa, concluiu que, para concretizar essa decisão, não tinha possibilidade de inspeccionar todos os troços de rua, passando por cada um deles uma única vez. Por isso, de forma a rendibilizar o tempo da inspecção, procurou encontrar um percurso cujo número de troços de rua a percorrer fosse o menor possível, garantindo o início e o fim da inspecção junto do mesmo ecoponto.

Num pequeno texto:

- indique, justificando, a razão que levou o funcionário a concluir da impossibilidade de inspeccionar todos os troços de rua, passando por cada um deles uma única vez, tendo em conta que ele pretende iniciar e terminar a inspecção junto do mesmo ecoponto;
- indique, ainda, um percurso que se inicie e termine no ecoponto  $E_2$  e que permita ao funcionário inspeccionar todos os troços de rua, sendo o número de troços de rua a percorrer o menor possível. Apresente o percurso na forma de uma sequência, utilizando as designações dos ecopontos.

Comece, obrigatoriamente, por modelar, através de um grafo, o «mapa» da zona residencial apresentado, considerando que os vértices representam os ecopontos e que as arestas representam os troços de rua.

3. A empresa *FUTUROLIMPO* quis saber o tempo necessário para a recolha selectiva dos resíduos na zona residencial referida no item anterior. Para tal, seleccionou, aleatoriamente, uma amostra de 22 registos dos tempos necessários a essa recolha.

O diagrama de caule-e-folhas seguinte apresenta os 22 registos dos tempos, em minutos, que foram necessários para a recolha selectiva dos resíduos. No caule, consta o valor das dezenas e, nas folhas, o algarismo das unidades de cada registo.

|    |  |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|--|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8  |  | 6 | 6 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 |   |
| 9  |  | 0 | 0 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 10 |  | 3 | 3 | 6 | 6 | 8 |   |   |   |
| 11 |  | 1 | 6 |   |   |   |   |   |   |

Tendo em conta os dados apresentados no diagrama de caule-e-folhas, relativos à amostra seleccionada, responda aos itens seguintes:

- 3.1. Recorrendo à calculadora, determine o valor da média ( $\bar{x}$ ) e o valor do desvio padrão ( $s$ ) do tempo necessário para a recolha selectiva dos resíduos.

Apresente o valor do desvio padrão arredondado às centésimas.

Apresente a(s) lista(s) que introduzir na calculadora, para obter as estatísticas solicitadas.

- 3.2. Determine a percentagem dos tempos necessários à recolha selectiva dos resíduos que pertencem ao intervalo  $]\bar{x} - s, \bar{x} + s[$ .

Apresente o resultado arredondado às unidades.

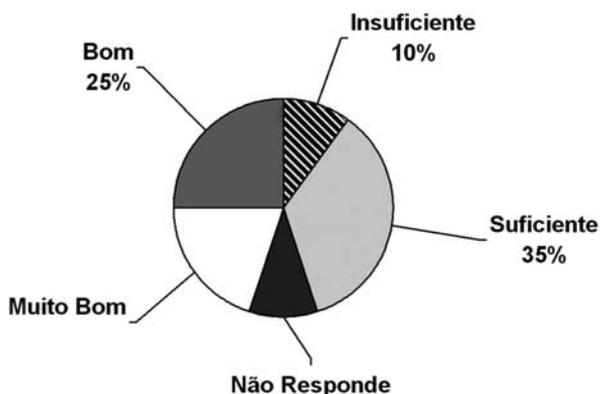
Caso não tenha respondido à questão 3.1., e somente neste caso, considere que  $\bar{x} \approx 96,2$  minutos e  $s \approx 8,99$  minutos.

4. No âmbito da disciplina de MACS, os alunos de uma turma da Escola Secundária *APRENDERMAIS* desenvolveram um trabalho de projecto que incluía um estudo sobre a intenção dos jovens da sua região, que frequentavam o ensino secundário, de prosseguirem os estudos, após terminarem esse nível de ensino.

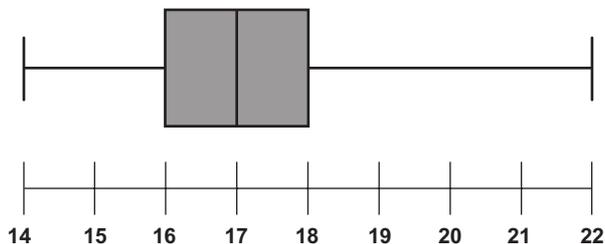
Para a recolha dos dados, elaboraram um inquérito e seleccionaram uma amostra aleatória, constituída por 300 jovens, representativa da população em estudo.

No trabalho, incluíram gráficos e tabelas, alguns dos quais se apresentam em seguida:

- o gráfico circular, que representa os dados recolhidos quanto à auto-avaliação do desempenho escolar dos alunos inquiridos



- o diagrama de extremos e quartis, que traduz os dados relativos à idade, em anos, dos alunos inquiridos



- a tabela, que apresenta os dados recolhidos quanto ao objectivo do estudo (conhecer a intenção dos jovens da região, que frequentavam o ensino secundário, de prosseguirem os estudos, após terminarem este nível de ensino).

| Sexo         | Intenção de prosseguimento de estudos |            |            |
|--------------|---------------------------------------|------------|------------|
|              | Deseja                                | Não deseja | Total      |
| Feminino     | 130                                   | 34         | 164        |
| Masculino    | 90                                    | 46         | 136        |
| <b>Total</b> | <b>220</b>                            | <b>80</b>  | <b>300</b> |

- 4.1. No gráfico circular, não constam as percentagens referentes a «*Muito Bom*» e «*Não Responde*», mas, no trabalho, refere-se que a percentagem de alunos que se auto-avaliaram com «*Muito Bom*» é o dobro da percentagem de alunos que responderam «*Insuficiente*».

Determine a percentagem de alunos inquiridos que não responderam à questão relativa à auto-avaliação do desempenho escolar.

- 4.2. Com base nos dados representados no diagrama de extremos e quartis, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: «50% dos alunos inquiridos têm 18 ou mais anos de idade».

- 4.3. Tendo em conta os dados apresentados na tabela, qual é a probabilidade de, escolhido um jovem ao acaso de entre os inquiridos, este ser uma rapariga e desejar prosseguir estudos?

Apresente o resultado na forma de fracção.

- 4.4. Com base nos dados apresentados na tabela, construa um intervalo com uma confiança de 99% para a proporção de jovens que, estando a frequentar o ensino secundário numa escola dessa região, desejam prosseguir estudos após terminarem este nível de ensino.

Nos cálculos intermédios, caso proceda a arredondamentos, utilize quatro casas decimais.

Relativamente aos valores dos extremos do intervalo, apresente-os arredondados às milésimas.

- 4.5. No estudo realizado pelos alunos observou-se, ainda, que as razões apresentadas pelos 220 jovens inquiridos – dos quais 130 são raparigas – que mostraram desejo de prosseguir os estudos, após terminarem o ensino secundário, foram:

**Razão A** – «A importância da obtenção da licenciatura para a concretização da sua vocação profissional».

**Razão B** – «A valorização monetária da futura profissão».

**Razão C** – «A satisfação da vontade dos pais».

No grupo dos jovens inquiridos que revelaram intenção de prosseguir os estudos, após terminarem o ensino secundário, verificou-se que cada um deles apresentou apenas uma das razões acima enunciadas e que:

- entre as raparigas, 70% apresentaram a razão A e 20% a razão B;
- entre os rapazes, 40% apresentaram a razão B e 10% a razão C.

Escolheu-se, ao acaso, um desses jovens que desejam prosseguir os estudos.

Qual é a probabilidade de o jovem ser rapaz, sabendo-se que apresentou a razão A?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize três casas decimais.

**FIM**

## COTAÇÕES

|                    |                   |
|--------------------|-------------------|
| 1. ....            | <b>43 pontos</b>  |
| 1.1. ....          | 9 pontos          |
| 1.2. ....          | 34 pontos         |
| 2. ....            | <b>50 pontos</b>  |
| 2.1. ....          | 15 pontos         |
| 2.2. ....          | 35 pontos         |
| 3. ....            | <b>25 pontos</b>  |
| 3.1. ....          | 15 pontos         |
| 3.2. ....          | 10 pontos         |
| 4. ....            | <b>82 pontos</b>  |
| 4.1. ....          | 10 pontos         |
| 4.2. ....          | 12 pontos         |
| 4.3. ....          | 10 pontos         |
| 4.4. ....          | 20 pontos         |
| 4.5. ....          | 30 pontos         |
| <hr/>              |                   |
| <b>TOTAL</b> ..... | <b>200 pontos</b> |

# Formulário

## Teoria Matemática das Eleições

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

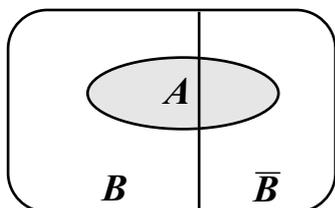
## Modelos de Grafos

### Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

## Probabilidades

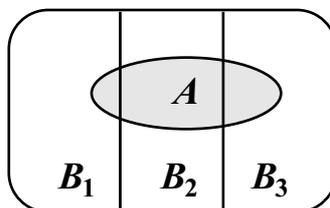
### Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ = P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo  $k$  tomar os valores 1, 2 ou 3.

## Formulário (cont.)

### Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável normal  $X$ , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  - dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  - média amostral  
 $\sigma$  - desvio padrão da variável  
 $z$  - valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para o valor médio  $\mu$  de uma variável  $X$ , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

$n$  - dimensão da amostra  
 $\bar{x}$  - média amostral  
 $s$  - desvio padrão amostral  
 $z$  - valor relacionado com o nível de confiança (\*)

Intervalo de confiança para uma proporção  $p$ , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

$n$  - dimensão da amostra  
 $\hat{p}$  - proporção amostral  
 $z$  - valor relacionado com o nível de confiança (\*)

(\*) Valores de  $z$  para os níveis de confiança mais usuais

| Nível de confiança | 90%   | 95%   | 99%   |
|--------------------|-------|-------|-------|
| $z$                | 1,645 | 1,960 | 2,576 |