Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2009, 1.ª fase)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método de Hondt na distribuição dos 7 mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	7744	4918	1666	1572	308
Divisão por 1	7744	4918	1666	1572	308
Divisão por 2	$\frac{7744}{2} = 3872$	$\frac{4918}{2} = 2459$	$\frac{1666}{2} = 833$		
Divisão por 3	$\frac{7744}{3} \approx 2581$	$\frac{4918}{3} \approx 1639$			
Divisão por 4	$\frac{7744}{4} = 1936$				
Divisão por 5	$\frac{7744}{5} \approx 1549$				

Assim, os sete mandatos atribuídos para a vereação da Câmara Municipal, estão assinalados na tabela seguinte, bem como a divisão dos 7 mandatos de forma diretamente proporcional:

Partido	A	B	C	D	E
Número de mandatos - Método de Hondt -	4	2	1	0	0
Total de elementos	$7744 + 4918 + 1666 + 1572 + 308 = 16\,208$				
Número de mandatos - Proporção direta -	$\frac{7744}{16\,208} \times 7 \approx 3$	$\frac{4918}{16\,208} \times 7 \approx 2$	$\frac{1666}{16\,208} \times 7 \approx 1$	$\frac{1572}{16\,208} \times 7 \approx 1$	$\frac{308}{16\,208} \times 7 \approx 0$

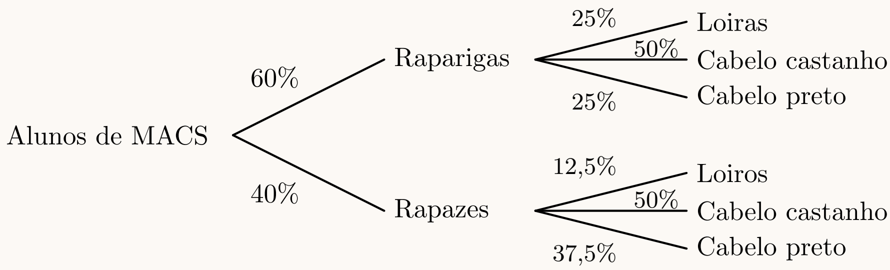
Assim, temos que, para a votação em apreciação, a alteração da atribuição de mandatos pelo método de Hondt para uma forma diretamente proporcional significaria a redução do número de mandatos do partido A (de 4 para 3) e o aumento do número de mandatos do partido D (de 0 para 1). Todos os restantes partidos teriam o mesmo número de mandatos.

2. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

- Pontuação do Nuno: $4 \times 25 + 2 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 10 + 3 \times 5 = 285$
- Pontuação da Ana: $3 \times 25 + 1 \times 40 + 2 \times 15 + 2 \times 10 + 1 \times 5 = 170$
- Pontuação da Inês: $2 \times 25 + 3 \times 40 + 3 \times 15 + 1 \times 10 + 2 \times 5 = 235$
- Pontuação do Pedro: $1 \times 25 + 4 \times 40 + 1 \times 15 + 4 \times 10 + 4 \times 5 = 260$

Assim, o candidato vencedor é o Nuno, porque tem o maior número de pontos.

3. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Consideramos a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma pessoa de entre os alunos de MACS da escola, e os acontecimentos:
L:≪A pessoa ter cabelo loiro≫
R:≪A pessoa ser rapariga≫
N::≪A pessoa ter cabelo preto≫

3.1. A probabilidade de a pessoa escolhida ter cabelo loiro, é:

$$P(L) = P\left(L \cap R\right) + P\left(L \cap \overline{R}\right) = 0{,}6 \times 0{,}25 + 0{,}4 \times 0{,}125 = 0{,}2$$

3.2. A probabilidade de a pessoa escolhida, na população indicada, ser rapariga, sabendo-se que tem cabelo preto, é:

$$P(R|N) = \frac{P(R \cap N)}{P(N)} = \frac{P(R \cap N)}{P(R \cap N) + P\left(\overline{R} \cap N\right)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}25}{0{,}6 \times 0{,}25 + 0{,}4 \times 0{,}375} = \frac{0{,}15}{0{,}3} = 0{,}5$$

4.

4.1. Inserindo na calculadora gráfica as listas com os dados relativos ao rendimento mensal (x) e às despesas com a alimentação (y), temos:

Rendimento mensal (€) x	**Despesas com a alimentação (€)** y
1250	425
2800	600
1900	550
1650	425
1300	400
1800	575
1200	375
2500	600
1350	375
2100	550
1200	350
1500	400

Determinando os valores associados à correlação linear, temos que:

- o valor do coeficiente de correlação, com arredondamento às décimas é $r \approx 0{,}9$
- o que significa que a associação linear que é possível identificar entre as duas variáveis é do positiva e forte;
- podemos identificar este tipo de associação linear entre as duas variáveis porque o valor do coeficiente de correlação é positivo ($r > 0$) e é um valor próximo de 1, relativamente distante de zero, o que justifica o facto de ser uma associação forte.

4.2.

4.2.1. Usando a correlação linear determinada no item anterior podemos observar ainda que os valores de a e b, arredondados com quatro casas decimais, são:

- $a \approx 0{,}1656$
- $b \approx 185{,}1833$

4.2.2. Usando os valores do item anterior, e a equação $y = ax + b$ da reta de regressão que se ajusta ao diagrama de dispersão, ou seja, $y = 0{,}1656x + 185{,}1833$, temos que a estimativa do valor do valor das despesas mensais com a alimentação de um agregado familiar cujo rendimento mensal é de €1750, é o valor de y correspondente ao valor $x = 1750$

Desta forma, substituindo o valor de x e calculando o valor de y, temos:

$$y = 0{,}1656 \times 1750 + 185{,}1833 \Leftrightarrow y = 474{,}9833$$

Assim, a estimativa, em euros, com arredondamento às unidades, do valor das despesas mensais com a alimentação para o agregado familiar nas condições do problema, é de €475.

4.3. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos rendimentos mensais dos doze agregados familiares, ou seja, os valores da tabela:

1250	2800	1900	1650	1300	1800	1200	2500	1350	2100	1200	1500

e calculando as medidas estatísticas referentes aos valores desta lista, obtemos os valores da média e o da mediana:

$$\overline{x} = 1712{,}5 \text{ e } \tilde{x} = 1575$$

Fazendo a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António, ou seja, substituindo na lista da calculadora o valor 2800 por 8000 e calculando novamente as medidas estatísticas referentes aos valores desta lista, obtemos os valores da média e o da mediana, após a alteração:

$$\overline{x} = 2145{,}83 \text{ e } \tilde{x} = 1575$$

Como podemos verificar comparando os dois pares de valores, a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António produziu alterações no valor da média, mas não no valor da mediana. Assim podemos identificar a média como uma medida de localização que tende a valorizar dados significativamente diferentes dos restantes e a mediana como uma medida de localização que tende a desvalorizar a importância de dados muito diferentes dos restantes.
Na situação concreta, a média não representa de forma adequada os dados, de uma perspetiva global, após a alteração, porque sobrevaloriza um dado em relação aos restantes. A mediana permite uma representação da maioria dos dados sem sobrevalorizar nenhum deles.

4.4. Como a dimensão da amostra dos agregados familiares de Monte daa Azinha tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 50$
- A média amostral: $\overline{x} = 270$ €
- O desvio padrão amostral: $s = 100$ €
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança para estimar o valor médio das despesas com a alimentação dos agregados familiares $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 270 - 1{,}960 \times \frac{100}{\sqrt{50}} \,;\, 270 + 1{,}960 \times \frac{100}{\sqrt{50}} \right[\approx \left]242{,}28; 297{,}72\right[$$

5.

5.1. Completando a tabela apresentada, relativamente à situação A e à situação B, temos:

	Vencimento na situação A (€)	**Vencimento na situação B (€)**
1.º mês	1280,00	450,00
2.º mês	1280,00	$450 \times 1{,}1 =$ $= 495$
3.º mês	1280,00	$495 \times 1{,}1 =$ $= 544{,}50$
4.º mês	1280,00	$544{,}50 \times 1{,}1 =$ $= 598{,}95$

5.2. O valor do vencimento nos primeiros 12 meses, para a situação C, e o montante total para o primeiro ano, é:

	Vencimento na situação C (€)
1.º mês	$V_1 = 800 \times 1{,}05^{1-1} = 800$
2.º mês	$V_2 = 800 \times 1{,}05^{2-1} = 840$
3.º mês	$V_3 = 800 \times 1{,}05^{3-1} = 882$
4.º mês	$V_4 = 800 \times 1{,}05^{4-1} = 962{,}1$
5.º mês	$V_5 = 800 \times 1{,}05^{5-1} \approx 972{,}41$
6.º mês	$V_6 = 800 \times 1{,}05^{6-1} \approx 1021{,}03$
7.º mês	$V_7 = 800 \times 1{,}05^{7-1} \approx 1072{,}08$
8.º mês	$V_8 = 800 \times 1{,}05^{8-1} \approx 1125{,}68$
9.º mês	$V_9 = 800 \times 1{,}05^{9-1} \approx 1181{,}96$
10.º mês	$V_{10} = 800 \times 1{,}05^{10-1} \approx 1241{,}06$
11.º mês	$V_{11} = 800 \times 1{,}05^{11-1} \approx 1303{,}12$
12.º mês	$V_{12} = 800 \times 1{,}05^{12-1} \approx 1368{,}27$
Total	12 733,70 €

Assim, temos que a situação relativa aos vencimentos nas duas situações seriam:

	Situação A	**Situação C**
Vencimento no 12.º mês	1280€	1368,27€
Soma dos vencimentos nos primeiros 12 meses	$1280 \times 12 =$ $= 15\,360$€	12 733,70€
Soma dos vencimentos nos 5 anos	$1280 \times 12 \times 5 =$ $= 76\,800$€	$12\,733{,}70 + 1368{,}27 \times 12 \times 4 =$ $= 78\,410{,}66$€

Pelo que se concluí que se o contrato tiver uma duração de cinco anos, a situação C é mais vantajosa que a A para o Manuel.

5.3. Calculando o valor do IRS relativo ao vencimento, temos:

$$1280 \times 0{,}17 = 217{,}60 \text{ €}$$

Pelo que o valor que o Manuel efetivamente recebeu, foi:

$$1280 - 217{,}60 = 1062{,}40 \text{ €}$$