

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2009, 2.ª fase)
Proposta de resolução



1.

1.1. Aplicando o método de Hondt na atribuição dos 12 lugares aos representantes de cada modalidade, antes de se agruparem Golfe e Ténis, temos:

Modalidade	Basquetebol	Futebol	Ténis	Golfe	Râguebi
N.º praticantes	186	218	91	45	191
Divisão por 1	186	218	91	45	191
Divisão por 2	$\frac{186}{2} = 93$	$\frac{218}{2} = 109$	$\frac{91}{2} = 45,5$		$\frac{191}{2} = 95,5$
Divisão por 3	$\frac{186}{3} = 62$	$\frac{218}{3} \approx 72,7$			$\frac{191}{3} \approx 63,7$
Divisão por 4	$\frac{186}{4} = 46,5$	$\frac{218}{4} = 54,5$			$\frac{191}{4} \approx 47,8$
Divisão por 5		$\frac{218}{5} = 43,6$			$\frac{191}{5} = 38,2$

Aplicando agora o método de Hondt na atribuição dos 12 lugares aos representantes de cada modalidade, depois de se agruparem Golfe e Ténis, temos:

Modalidade	Basquetebol	Futebol	Ténis + Golfe	Râguebi
N.º praticantes	186	218	136	191
Divisão por 1	186	218	136	191
Divisão por 2	$\frac{186}{2} = 93$	$\frac{218}{2} = 109$	$\frac{136}{2} = 68$	$\frac{191}{2} = 95,5$
Divisão por 3	$\frac{186}{3} = 62$	$\frac{218}{3} \approx 72,7$	$\frac{136}{3} \approx 45,3$	$\frac{191}{3} \approx 63,7$
Divisão por 4	$\frac{186}{4} = 46,5$	$\frac{218}{4} = 54,5$		$\frac{191}{4} \approx 47,8$
Divisão por 5		$\frac{218}{5} = 43,6$		

Desta forma podemos verificar que o agrupamento das duas modalidades permite eleger 2 representantes, ao contrário do que sucede se a distribuição for feita com as modalidades separadas. Assim, podemos concluir que o agrupamento é vantajoso no sentido em que permite assegurar a representatividade dos praticantes de Golfe.

1.2. Determinando o valor, em euros, recebido por cada uma das modalidades, temos:

	Modalidade desportiva					TOTAL
	Basquetebol	Futebol	Ténis	Golfe	Râguebi	
N.º praticantes	186	218	91	45	191	731
Fração destinada a cada modalidade	$\frac{186}{731}$	$\frac{218}{731}$	$\frac{91}{731}$	$\frac{45}{731}$	$\frac{191}{731}$	—

Assim, a quantia que foi atribuída a cada modalidade, é:

- Basquetebol: $\frac{186}{731} \times 10\,965 = 2790$ euros
- Futebol: $\frac{218}{731} \times 10\,965 = 3270$ euros
- Ténis: $\frac{91}{731} \times 10\,965 = 1365$ euros
- Golfe: $\frac{45}{731} \times 10\,965 = 675$ euros
- Râguebi: $\frac{191}{731} \times 10\,965 = 2865$ euros

1.3. Como existem 731 praticantes, dos quais 191 praticam Râguebi, a probabilidade de escolher dois praticantes, um a seguir ao outro, e ambos serem praticantes de Râguebi, é:

$$\underbrace{\frac{191}{731}}_{\substack{1.^\circ \text{ praticante} \\ \text{ser de Râguebi}}} \times \underbrace{\frac{190}{730}}_{\substack{2.^\circ \text{ praticante} \\ \text{ser de Râguebi} \\ \text{sabendo que o} \\ 1.^\circ \text{ também era}}} \approx 0,068$$

Assim, o valor da probabilidade, em percentagem, arredondado às décimas, é: 6,8%

2.

2.1. Não é possível organizar um circuito que permita que um camionista da GNC percorra uma e uma só vez cada trajeto assinalado no grafo porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices do grafo tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem vértices com grau ímpar: Faro (grau 1), Évora, Vila Real e Porto (todos com grau 3).

2.2. Identificando todos os trajetos entre estas cidades, partindo e regressando a Sines, temos:



Como os seis circuitos possíveis correspondem apenas a três pares, respetivamente percorridos pela ordem inversa, temos que o menor circuito tem a extensão de 1262 km.

Como o preço do transporte cobrado pela empresa GNC aos clientes é de € 2,00 por quilómetro e a empresa faz um desconto de 8%, o preço a pagar pelo menor circuito, é:

$$1262 \times 2 \times 0,92 = 2322,08 \text{ €}$$



3.

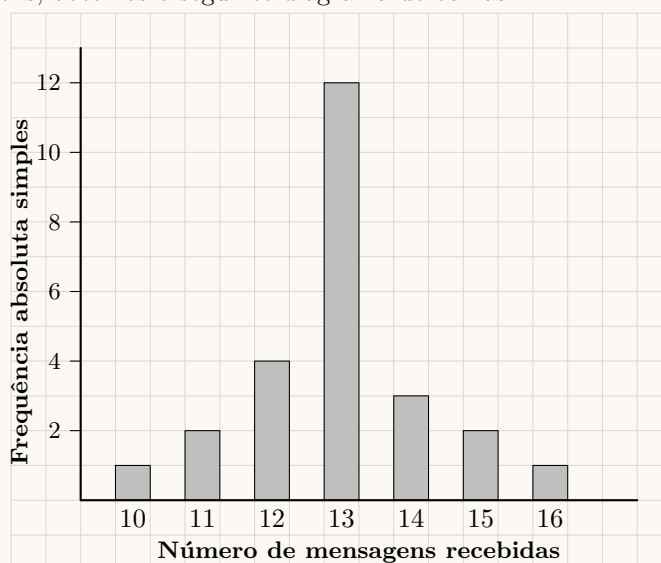
3.1.

3.1.1. Utilizando a informação da tabela dada na coluna (apresentada a sombreado na tabela seguinte), podemos determinar o número total de alunos da turma, somando as frequências absolutas simples.

Fazendo a divisão de cada frequência absoluta simples pelo total de alunos podemos obter as frequências relativas simples, e finalmente, por somas sucessivas, podemos obter as frequências absolutas acumuladas, ambas arredondadas com duas casas decimais:

Número de mensagens recebidas	Frequência absoluta simples	Frequência relativa simples	Frequência relativa acumulada
10	1	$\frac{1}{25} = 0,04$	0,04
11	2	$\frac{2}{25} = 0,08$	$0,04 + 0,08 = 0,12$
12	4	$\frac{4}{25} = 0,16$	$0,12 + 0,16 = 0,28$
13	12	$\frac{12}{25} = 0,48$	$0,28 + 0,48 = 0,76$
14	3	$\frac{3}{25} = 0,12$	$0,76 + 0,12 = 0,88$
15	2	$\frac{2}{25} = 0,08$	$0,88 + 0,08 = 0,96$
16	1	$\frac{1}{25} = 0,04$	$0,96 + 0,04 = 1$
Total	25	1	—

3.1.2. Identificando o número de alunos da turma como a frequência absoluta da cada valor relativo ao número de mensagens, obtemos o seguinte diagrama de barras:



3.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A, e noutra lista as frequências absolutas:

N.º de mensagens recebidas	Frequência absoluta
6	1
7	1
9	2
10	3
11	1
12	2
13	6
15	2
16	3
17	1
18	2
19	1

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas:

$$\bar{x} = 12,96 \text{ e } \sigma \approx 3,39$$

Procedendo da mesma forma para os dados relativos aos alunos da turma B, ou seja, inserindo os dados da tabela:

N.º de mensagens recebidas	Frequência absoluta (n.º de alunos)
10	1
11	2
12	4
13	12
14	3
15	2
16	1

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas:

$$\bar{x} = 12,96 \text{ e } \sigma = 1,28$$

Assim, podemos conjecturar que a constatação do António resultou da observação de que os dados relativos à turma B estão mais concentrados em torno dos valores centrais, sendo progressivamente menos abundantes, à medida que os dados se afastam da zona central, enquanto que nos dados da turma A, esta tendência é menos acentuada, havendo maior dispersão dos dados, o que justifica um valor maior do desvio padrão nos dados da turma A, e por isso valores diferentes para o desvio padrão.



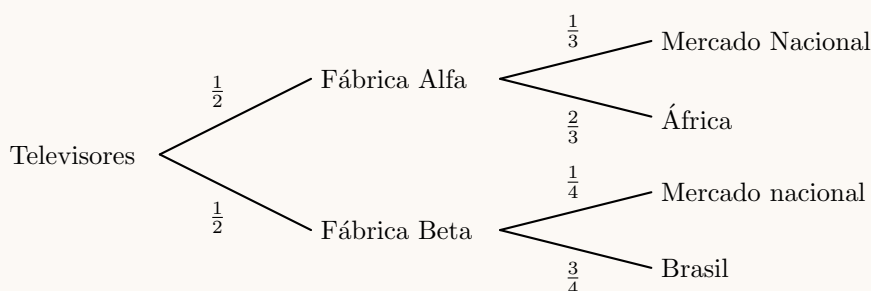
3.3. Como a amostra das mensagens tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 250$
- A proporção amostral das mensagens com 30 caracteres: $\hat{p} = \frac{125}{250} = 0,5$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1,960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left[\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$, para estimar a proporção de mensagens com a extensão de 30 caracteres recebidas no telemóvel pelos alunos da escola da Marta, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0,5 - 1,960\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{250}}; 0,5 + 1,960\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{250}} \right[\approx]0,44; 0,56[$$

4. Esquematizando as proporções conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um televisor, e os acontecimentos:

A : «O televisor foi produzido na fábrica Alfa 1»

N : «O televisor destina-se ao mercado nacional»

Temos que a probabilidade de o televisor escolhido ser produzido pela fábrica Alfa, sabendo que ele se destina ao mercado nacional, é:

$$P(A|N) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A \cap N)}{P(A \cap N) + P(\bar{A} \cap N)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

5. Como $t = 0$ corresponde ao final do ano 2000 e $t = 7$ corresponde ao final do ano 2007, temos que o aumento do número de residentes em Portugal, entre o final do ano 2000 e o final do ano 2007, segundo o modelo apresentado, em milhares de indivíduos, é:

$$P(7) - P(0) = \frac{10728,45}{1 + 0,05 \times e^{-0,12 \times 7}} - \frac{10728,45}{1 + 0,05 \times e^{-0,12 \times 0}} \approx 284$$

