Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais **(2010, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Aplicando o método de Hondt na distribuição dos 7 mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	7744	4918	1666	1572	308
Divisão por 1	7744	4918	1666	1572	308
Divisão por 2	$\frac{7744}{2} = 3872$	$\frac{4918}{2} = 2459$	$\frac{1666}{2} = 833$		
Divisão por 3	$\frac{7744}{3} \approx 2581$	$\frac{4918}{3} \approx 1639$			
Divisão por 4	$\frac{7744}{4} = 1936$				
Divisão por 5	$\frac{7744}{5} \approx 1549$				

Assim, os sete mandatos atribuídos para a vereação da Câmara Municipal, estão assinalados na tabela seguinte, bem como a divisão dos 7 mandatos de forma diretamente proporcional:

Partido	A	B	C	D	E
Número de mandatos - Método de Hondt -	4	2	1	0	0
Total de elementos	$7744 + 4918 + 1666 + 1572 + 308 = 16\,208$				
Número de mandatos - Proporção direta -	$\frac{7744}{16\,208} \times 7 \approx 3$	$\frac{4918}{16\,208} \times 7 \approx 2$	$\frac{1666}{16\,208} \times 7 \approx 1$	$\frac{1572}{16\,208} \times 7 \approx 1$	$\frac{308}{16\,208} \times 7 \approx 0$

Assim, temos que, para a votação em apreciação, a alteração da atribuição de mandatos pelo método de Hondt para uma forma diretamente proporcional significaria a redução do número de mandatos do partido A (de 4 para 3) e o aumento do número de mandatos do partido D (de 0 para 1). Todos os restantes partidos teriam o mesmo número de mandatos.

2. Determinando a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, temos:

	ANA	**BERTA**	**CARLA**	**DANIELA**
Automóvel	€15 000	€18 000	€15 600	€16 500
Terreno	€33 000	€20 000	€27 000	€30 000
Casa	€117 000	€150 000	€120 000	€180 000
Valor global (€)	165 000	188 000	162 600	226 500
Porção justa (€)	41 250	47 000	40 650	56 625
Atribuição de bens	Terreno	Automóvel	—	Casa
Valor bens recebidos (€)	33 000	18 000	0	180 000
Valor a pagar (€)	—	—	—	$180\,000 - 56\,625 =$ $= 123\,375$
Valor a receber (€)	$41\,250 - 33\,000 =$ $= 8250$	$47\,000 - 18\,000 =$ $= 29\,000$	40 650	—
Valor em excesso (€)	$123\,375 - 8250 - 29\,000 - 40\,650 = 45\,475$			
Distribuição do excesso (€)	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368{,}75$	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368{,}75$	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368{,}75$	$\frac{45\,475}{4} = 11\,368{,}75$

Assim, a partilha dos três bens, e o valor a receber ou a pagar por cada herdeira, é:

- Ana: Recebe o terreno e ainda $8250 + 11\,368{,}75 = 19\,618{,}75$ euros
- Berta: Recebe o automóvel e ainda $29\,000 + 11\,368{,}75 = 40\,368{,}75$ euros
- Carla: Recebe $40\,650 + 11\,368{,}75 = 52\,018{,}75$ euros
- Berta: Recebe a casa e paga $123\,375 - 11\,368{,}75 = 112\,006{,}75$ euros

3.

3.1. Como o dia 18 de Setembro, corresponde a $t = 18$, temos que o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1, no dia 18 de Setembro, é:

$$S(18) = 62{,}11 + \ln(1{,}5 + 18) \approx 65$$

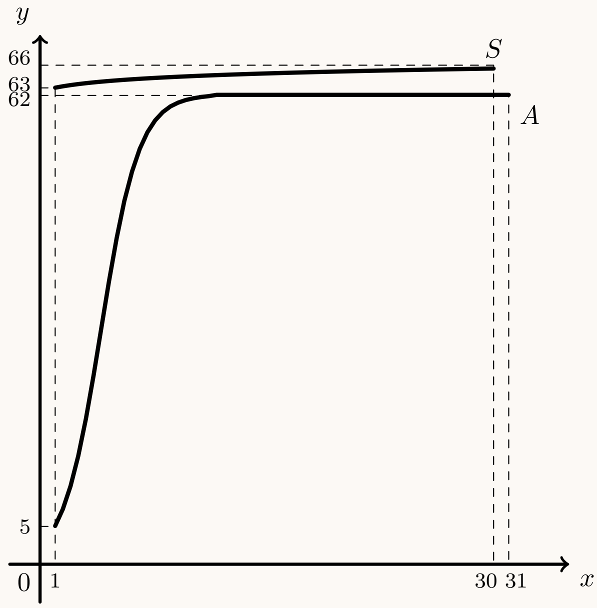
3.2. Inserimos na calculadora gráfica o modelo A $\left(y = \dfrac{62{,}10}{1 + 25e^{-0{,}797x}}\right)$, e visualizamos a tabela de valores da função, procurando os valores mais próximos de 51, como está reproduzida na figura ao lado.

Assim, podemos verificar que o valor de t, para o qual se obtém um valor arredondado às unidades de 51 é 6, ou seja, podemos concluir que o dia 6 de Agosto, foi o dia em que o número de casos confirmados de infeção pelo vírus H1N1 foi 51.

X	Y1
3	18,884
4	30,571
5	42,395
6	51,344
7	56,743
8	59,566
9	60,932

3.3. Usando a calculadora gráfica para representar os dois modelos, podemos observar as representações gráficas que estão reproduzidas na figura seguinte.

Podemos ainda verificar que no mês de agosto o modelo descreve um aumento acentuado de casos de infeção durante a primeira metade do mês, e depois uma fase de crescimento lento na segunda metade do mês, sendo a variação de 5 casos de infeção no início do mês até 62 casos no final do mês, ou seja, uma diferença de $62 - 5 = 57$ casos.



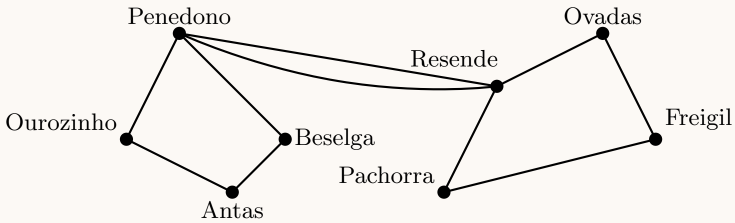
Relativamente ao mês de setembro, o aumento descrito pelo modelo é sempre relativamente pequeno, ainda assim, com tendência a abrandar ao longo mês, sendo a variação de 63 casos no início do mês até 66 casos no final do mês, ou seja, uma diferença de $66 - 63 = 3$ casos.

Desta forma, podemos verificar que o aumento do número de infeções foi significativamente superior no mês de agosto, e que o mês de setembro se caracterizou por um aumento ligeiro, que já vinha a ser observado na segunda metade do mês de agosto.

4.

4.1. Não é possível limpar todas as estradas representadas no grafo partindo e terminando de Beselga, percorrendo todas as estradas uma e uma só vez porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: Penedono e Resende (ambos com grau 3).

Assim, a é possível alterar a solução se acrescentar uma aresta que corresponde à duplicação da aresta Penedono-Resende, o que corresponde a passar nesta estrada, por duas vezes, como se apresenta na figura seguinte.



Logo, como estes dois vértices passem a ter grau 4, obtemos um grafo conexo com todos os vértices com grau par, onde podemos definir vários circuitos de Euler, em particular dois com início e fim em Beselga, como pretendido.

4.2. Como a dimensão da amostra das faturas recolhida pelo contabilista tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 500$
- A média amostral: $\overline{x} = 830$ €
- O desvio padrão amostral: $s = 220$ €
- O valor de z para um nível de confiança de 99%: $z = 2{,}576$

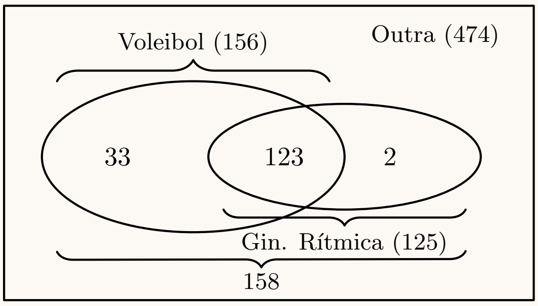
Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\,, \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left]830 - 2{,}576 \times \frac{220}{\sqrt{500}}\,;\, 830 + 2{,}576 \times \frac{220}{\sqrt{500}}\right[\approx \left]804{,}66; 855{,}34\right[$$

Assim, como existem razões para duvidar da afirmação do gerente, porque com probabilidade de 99%, o valor médio das faturas da empresa é superior a 804 €, ou seja, um valor acima do estimado pelo gerente (800 €).

5.

5.1. Como os alunos que escolheram a opção "Outra" só colocaram um "×" e alguns alunos colocaram dois "×", um na "Ginástica Rítmica" e outro no "Voleibol", podemos obter, de acordo com os valores indicados, o diagrama da figura ao lado.



Assim temos:

- Respostas só com um "×" em "Voleibol", ou "Ginástica Rítmica", ou ambas: $632 - 474 = 158$
- Respostas só com um "×" em "Ginástica Rítmica": $158 - 156 = 2$
- Respostas com dois "×": $125 - 2 = 123$
- Respostas só com um "×" em "Voleibol": $156 - 123 = 33$

Logo, o número de alunos alunos colocaram apenas um "×" na resposta ao questionário ("Outra", "Voleibol"ou "Ginástica Rítmica") é:

$$474 + 33 + 2 = 509$$

5.2. Escolhendo, ao acaso, um aluno da Escola Secundária de Mornas, temos 632 casos possíveis e para escolher um aluno que preferira, pelo menos, uma das modalidades desportivas apresentadas, «Voleibol» ou «Ginástica Rítmica», o número de casos favoráveis é $632 - 474 = 158$, pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, a probabilidade de escolher um aluno nestas condições, na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{158}{632} = \frac{1}{4}$$

5.3. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um indivíduo inquirido na sondagem, e os acontecimentos:
G:«O aluno preferir «Ginástica Rítmica»»
O:«O aluno escolheu «Outra» quando respondeu ao questionário»

Atendendo ao diagrama do item anterior, podemos observar que $P\left(\overline{O}\right) = 158$ e que $P\left(G \cap \overline{O}\right) = 125$ Desta forma, a probabilidade de o aluno escolhido preferir «Ginástica Rítmica», sabendo que não escolheu «Outra» quando respondeu ao questionário, é:

$$P\left(G|\overline{O}\right) = \frac{P\left(G \cap \overline{O}\right)}{P\left(\overline{O}\right)} = \frac{125}{158} \approx 0{,}79113$$

Logo a probabilidade em percentagem, arredondada às centésimas, é 79,11%

5.4. Para podermos proceder de acordo com a informação inicial, calculamos a média das quantias depositadas:

$$\overline{x} = \frac{720 + 800 + 910}{3} = \frac{2430}{3} = 810\,€$$

Assim, de acordo com a informação inicial, se adicionarmos k euros ao depósito de cada um dos jovens a média também aumenta k euros, pelo que o valor de k a oferecer a cada uma dos jovens para que a média das quantias depositadas se fixe em €1100 é:

$$k = 1100 - 810 = 290$$