

Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2011, 1.ª fase)
Proposta de resolução



1.

1.1. Aplicando o método de Hondt na distribuição dos nove mandatos, considerando a coligação do partido C com o partido D, temos:

Força partidária	A	B	C+D	E
Número de votos	80 676	74 745	$28\,867 + 13\,971 = 42\,838$	6148
Divisão por 1	80 676	74 745	42 838	6148
Divisão por 2	$\frac{80\,676}{2} = 40\,338$	$\frac{74\,745}{2} = 37\,372,5$	$\frac{42\,838}{2} = 21\,419$	
Divisão por 3	$\frac{80\,676}{3} = 26\,892$	$\frac{74\,745}{3} = 24\,915$	$\frac{42\,838}{3} \approx 14\,279,3$	
Divisão por 4	$\frac{80\,676}{4} = 20\,169$	$\frac{74\,745}{4} \approx 18\,686,3$		
Divisão por 5	$\frac{80\,676}{5} = 16\,135,2$			

Aplicando o método de Hondt na distribuição dos nove mandatos, considerando a coligação do partido C com o partido E, temos:

Força partidária	A	B	C+E	D
Número de votos	80 676	74 745	$28\,867 + 6148 = 35\,015$	13 971
Divisão por 1	80 676	74 745	35 015	13 971
Divisão por 2	$\frac{80\,676}{2} = 40\,338$	$\frac{74\,745}{2} = 37\,372,5$	$\frac{35\,015}{2} = 17\,507,5$	
Divisão por 3	$\frac{80\,676}{3} = 26\,892$	$\frac{74\,745}{3} = 24\,915$		
Divisão por 4	$\frac{80\,676}{4} = 20\,169$	$\frac{74\,745}{4} \approx 18\,686,3$		
Divisão por 5	$\frac{80\,676}{5} = 16\,135,2$	$\frac{74\,745}{5} = 14\,949$		

Assim, os nove mandatos atribuídos aos partidos, nos três cenários (sem coligação, com a coligação C+D e com a coligação C+E), estão assinalados na tabela seguinte:

Partido	A	B	C C+D C+E	D	E
Número de mandatos sem coligação	4	4	1	0	0
Número de mandatos com a coligação C+D	4	3	2	—	0
Número de mandatos com a coligação C+E	4	4	1	0	—

Desta forma podemos verificar que o presidente do Partido C tem razão, apenas em parte, ou seja, caso o seu partido tivesse concorrido em coligação como Partido D, a coligação teria mais um mandato, mas caso a coligação fosse com o Partido E, a distribuição dos nove mandatos não sofreria qualquer alteração.

1.2. Aplicando o método de Webster na distribuição dos nove mandatos, temos:

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	80 676	74 745	28 867	13 971	6148
Total de votos	$80\,676 + 74\,745 + 28\,867 + 13\,971 + 6148 = 204\,407$				
Divisor padrão	$\frac{204\,407}{9} = 22\,711,889$				
Quota padrão	$\frac{80\,676}{22\,711,889} \approx \approx 3,552$	$\frac{74\,745}{22\,711,889} \approx \approx 3,291$	$\frac{28\,867}{22\,711,889} \approx \approx 1,271$	$\frac{13\,971}{22\,711,889} \approx \approx 0,615$	$\frac{6148}{22\,711,889} \approx \approx 0,271$
Quota arredondada	$3 + 1 = 4$	3	1	$0 + 1 = 1$	0
Soma das quotas arredondadas	$4 + 3 + 1 + 1 + 0 = 9$				

Assim, os nove mandatos atribuídos aos partidos, ns três cenários (sem coligação, com a coligação C+D e com a coligação C+E), estão assinalados na tabela seguinte:

Partido	A	B	C	D	E
Número de mandatos - Método de Hondt -	4	4	1	0	0
Número de mandatos - Método de Webster -	4	3	1	1	0

Desta forma podemos verificar que o comentador tem razão, porque o partido D obteria um mandato com a aplicação do método de Webster (o que não acontece com a aplicação do método de Hondt) e a o partido B obteria menos um mandato pela aplicação do método de Webster do que pela aplicação do método de Hondt.



2.

- 2.1. Inserimos na calculadora gráfica o modelo $P (y = \frac{5000}{2 + 23e^{-0,8t}})$, e visualizamos a tabela de valores da função, procurando os valores mais próximos de 2453, como está reproduzida na figura ao lado.

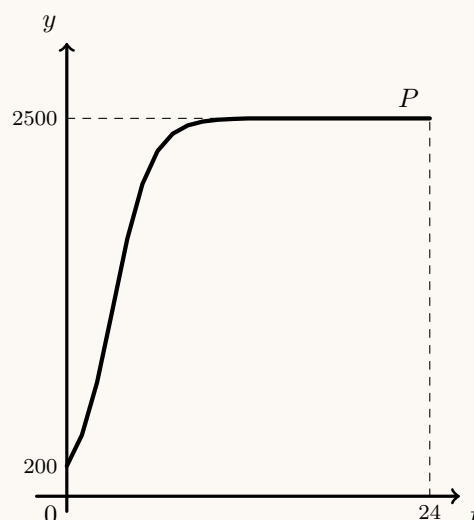
X	Y1
5	2065,04
6	2283,85
7	2398,02
8	2453,13
9	2478,72
10	2490,39
11	2495,67

Assim, podemos verificar que o valor de t , para o qual se obtém um valor arredondado às unidades de 2453 é 8, ou seja, podemos concluir que ao fim de 8 meses após o início do estudo o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP era 2453.

- 2.2. Usando a calculadora gráfica para representar o modelo (P), numa janela compatível com os valores definidos para t , ou seja, $0 \leq t \leq 24$, e também com os valores esperados para o número de inscritos na delegação do IEFP, isto é, $0 \leq y \leq 2500$ podemos observar a representação gráfica que está reproduzida na figura seguinte.

Podemos observar que durante o estudo o número de inscritos no IEFP aumentou sempre, embora esse aumento tenha sido mais acentuado nos primeiros meses do estudo e depois tenha havido uma fase de crescimento progressivamente mais lento na segunda metade do estudo, pelo que o número máximo de inscritos se verificou no final do estudo, ou seja ao fim de 24 meses e tenha atingido o valor de 2500 inscritos.

Logo, observando que no início do estudo estavam inscritos no centro 200 pessoas, temos que a diferença entre o número de inscritos no início e no final do estudo, foi de $2500 - 200 = 2300$ inscritos.



3.

- 3.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de livros lidos, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de alunos":

Número de livros lidos	Frequência absoluta (n.º de alunos)
1	10
2	8
3	6
7	4
8	3
10	1
11	3
12	5

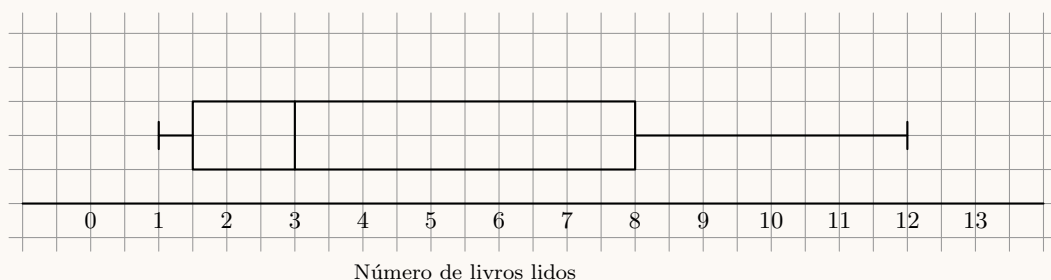
e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor da média para os 40 alunos da escola, arredondada às unidades: $\bar{x} \approx 5$

Assim podemos verificar que a média, nesta amostra, não é um bom indicador do *número de livros lidos por aluno*, nas férias de Verão, porque o valor da média não se encontra junto da maior concentração dos dados, o que acontece devido ao facto da maior parte dos dados não se localizar junto do centro da distribuição, onde se situa o valor da média.

- 3.2. Usando as listas do item anterior e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos ainda os valores do mínimo, do 1.º quartil, da mediana, do 3.º quartil e do máximo:

Mínimo	1
1.º quartil	1,5
Mediana	3
3.º quartil	8
Máximo	12

E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis:



Da observação do diagrama podemos verificar que os dados se encontram mais concentrados para os valores mais baixos, ou seja, os 50% dos dados com valores inferiores estão dispersos entre os valores 1 e 3, e os 50% dos dados com valores maiores estão dispersos entre os valores 3 e 12.

Podemos ainda observar que a distribuição é bastante assimétrica, porque a concentração de dados à esquerda da mediana é significativamente maior do que a concentração dos dados à direita da mediana.



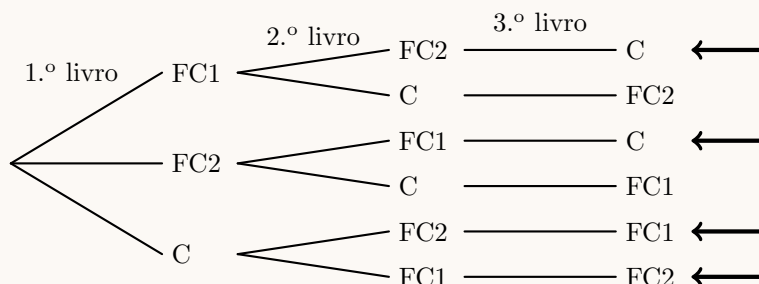
- 3.3. Se cada um dos alunos envolvidos aumentar em 1 o número de livros lidos, a repercussão desta alteração sobre os valores da média e da mediana é um aumento de 1 unidade em ambas as medidas. Esta alteração pode ser verificada alterando a lista do número de livros lidos, acrescentando um valor aos valores constantes no gráfico, e na outra lista mantendo as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de alunos":

Número de livros lidos	Frequência absoluta (n.º de alunos)
2	10
3	8
4	6
8	4
9	3
11	1
12	3
13	5

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos novos valores para a média e para a mediana, que se constatam ser superiores em uma unidade relativamente aos calculados nos itens anteriores:

$$\bar{x} \approx 6 \text{ e } \tilde{x} = 4$$

- 3.4. Organizando todas as sequências de leitura possíveis dos três livros (os dois de Ficção científica - FC1 e FC2 - e o de ciências - C), num diagrama em árvore, temos:



Assim, como existem 6 casos possíveis equiprováveis, dos quais 4 correspondem a sequências em que os dois livros de ficção científica são lidos um a seguir ao outro, a probabilidade de se verificar uma sequência deste tipo, na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 500$
- A proporção amostral dos livros produzidos com defeito: $\hat{p} = \frac{8}{500} = 0,016$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1,960$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança de 95% $\left(\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$, para a proporção de livros produzidos com defeito, diariamente, na gráfica SOS-Livros, e arredondando os valores com três casas decimais, temos:

$$\left] 0,016 - 1,960\sqrt{\frac{0,016(1-0,016)}{500}}; 0,016 + 1,960\sqrt{\frac{0,016(1-0,016)}{500}} \right[\approx]0,005; 0,027[$$



5.

5.1. Como o António pretende encontrar um percurso que começa e termina no mesmo vértice (posto A), e utiliza cada aresta (estrada) uma única vez, pretende definir um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: C (grau 3) e F (grau 3).

Assim, não é possível satisfazer, em simultâneo, as pretensões do António.

5.2. Determinando o comprimento total da proposta do João, somando os pesos das arestas, temos:

$$1253 + 832 + 938 + 712 + 941 + 911 = 5587 \text{ metros}$$

Aplicando o algoritmo sugerido pelo José, temos:

- Passo 1: Arestas (B,E) (712 m) e (F,G) (832 m)
- Passo 2: Aresta (C,D) (911 m)
- Passo 3: Aresta (B,F) (938 m)
- Passo 4: Aresta (C,E) (941 m)
(não se consideram as arestas (D,E) e (E,F) porque iriam fechar um circuito)
- Passo 5: Aresta (A,G) (1248 m)

E assim, o comprimento total da ligação definida pela proposta do José, somando os pesos das arestas, é:

$$712 + 832 + 911 + 938 + 941 + 1248 = 5582 \text{ metros}$$

Assim, de modo a usar a menor extensão de cabo de fibra ótica, a empresa deve escolher a proposta do José, porque é a que tem um comprimento total menor.

5.3. Organizando os dados numa tabela, e convertendo as percentagens apresentadas em valores absolutos, temos:

	Recolha seletiva	Limpeza de florestas	Lixo doméstico	Total
Eletrrodomésticos	$20\,000 \times 0,96 = 19\,200$	$80\,000 \times 0,24 = 19\,200$	$45\,000 \times 0,36 = 16\,200$	$19\,200 + 19\,200 + 16\,200 = 54\,600$
Total	20 000	80 000	45 000	145 000

Assim, a probabilidade de o objeto escolhido ser proveniente de recolha seletiva, sabendo que é um eletrodoméstico, na forma de fração irredutível, é:

$$\frac{19200}{54600} = \frac{32}{91}$$

