Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2011, 2.ª fase)

Proposta de resolução

1. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:
   - Pontuação da cidade de Braga: $3 \times 8 + 1 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 3 = 40$
   - Pontuação da cidade de Lamego: $2 \times 8 + 3 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 45$
   - Pontuação da cidade de Amarante: $1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 3 \times 3 = 41$

   Logo, pelo método de contagem de Borda a cidade escolhida é Lamego (porque tem o maior número de pontos). Assim, podemos verificar que esta eleição não respeita a primeira preferência mais votada, que é a cidade de Braga (com 8 votos, enquanto Amarante tem 7 votos e Lamego apenas 6 votos).

2. Determinando a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, temos:

	Manuel	**José**	**Paulo**
Máquina fotográfica	€140	€120	€180
Televisor	€800	€700	€600
Consola de jogos	€580	€700	€500
Valor global (€)	1520	1520	1280
Porção justa (€)	$1520 \times \frac{40}{100} = 608$	$1520 \times \frac{30}{100} = 456$	$1280 \times \frac{30}{100} = 384$
Atribuição de bens	Televisor	Consola de jogos	Máq. fotográfica
Valor dos bens recebidos (€)	800	700	180
Valor a pagar (€)	$800 - 608 = 192$	$700 - 456 = 244$	—
Valor a receber (€)	—	—	$384 - 180 = 204$
Valor em excesso (€)	$192 + 244 - 204 = 232$		
Distribuição do excesso (€)	$232 \times \frac{40}{100} = 92{,}8$	$232 \times \frac{30}{100} = 69{,}6$	$232 \times \frac{30}{100} = 69{,}6$

   Assim, a partilha dos três bens, e o valor a receber ou a pagar por cada jovem, é:
   - Manuel: Recebe o televisor e paga $192 - 92{,}8 = 99{,}2$ euros
   - José: Recebe a consola de jogos e paga $244 - 69{,}6 = 174{,}4$ euros
   - Paulo: Recebe a máquina fotográfica e ainda $204 + 69{,}6 = 273{,}6$ euros

3.

3.1. Averiguando a hipótese do depósito ter sido remunerado com uma taxa de juro fixa, calculamos a taxa de juro (j) correspondente ao acréscimo de capital do final de 2004 para o final de 2005:
Como $25\,625 - 25\,000 = 625$, temos que:

$$25\,000 \times j = 625 \Leftrightarrow j = \frac{625}{25\,000} \Leftrightarrow j = 0{,}025$$

Podemos agora verificar que a taxa de juro de 2,5% é compatível com a evolução do depósito do senhor Jerónimo, e calcular o capital acumulado nos três anos seguintes:

Evolução do depósito do senhor Jerónimo (instituição A)	A_n	Cálculo
A_0: Capital depositado no final de 2004	€25 000,00	—
A_1: Capital acumulado no final de 2005	€25 625,00	$25\,000{,}00 \times 1{,}025 = $ $= 25625{,}00$
A_2: Capital acumulado no final de 2006	€26 265,63	$25\,625{,}00 \times 1{,}025 \approx$ $\approx 26265{,}63$
A_3: Capital acumulado no final de 2007	€26 922,27	$26\,265{,}63 \times 1{,}025 \approx$ $\approx 26922{,}27$
A_4: Capital acumulado no final de 2008	€27 595,32	$26\,922{,}27 \times 1{,}025 \approx$ $\approx 27595{,}32$
A_5: Capital acumulado no final de 2009	€28 285,20	$27\,595{,}32 \times 1{,}025 \approx$ $\approx 28\,285{,}20$
A_6: Capital acumulado no final de 2010	€28 992,33	$28\,285{,}20 \times 1{,}025 \approx$ $\approx 28\,992{,}33$
A_7: Capital acumulado no final de 2011	€29 717,14	$28\,992{,}33 \times 1{,}025 \approx$ $\approx 29\,717{,}14$

Assim, o capital acumulado no final de 2011, no depósito bancário do senhor Jerónimo, arredondado às unidades, é 29 717 euros.

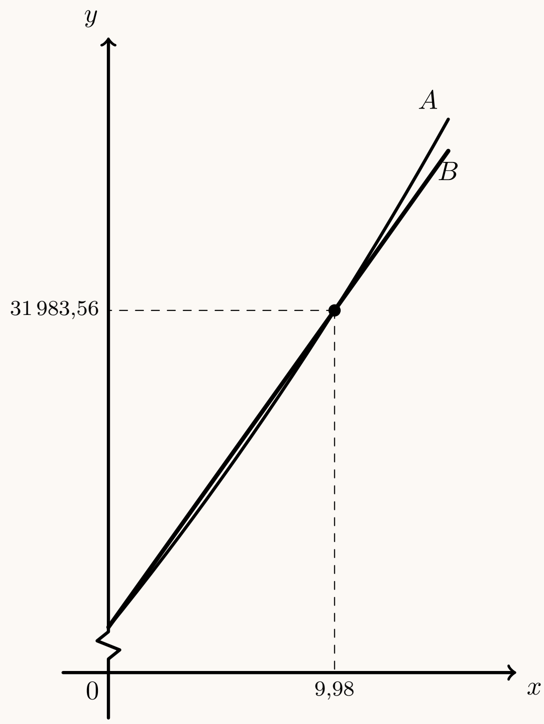
3.2. Observando a tabela podemos verificar que em cada ano o capital acumulado na instituição A, que o capital acumulado ao fim de n anos é sempre 1,025 vezes superior ao ano anterior. Isto é, corresponde a uma taxa de juro composto de $\frac{625}{25\,000} = 0{,}025$, ou seja 2,5% ao ano, pelo que o capital acumulado ao fim de n anos, é:

$$A_n = 25\,000 \times \underbrace{1{,}025 \times 1{,}025 \times \ldots \times 1{,}025}_{n \text{ vezes}} = 25\,000 \times 1{,}025^n$$

Da mesma forma podemos observar, relativamente à instituição A é sempre 700 €superior, em relação ao ano anterior. Isto é, corresponde a uma taxa de juro simples de $\frac{700}{25\,000} = 0{,}028$, ou seja 2,8% ao ano, pelo que o capital acumulado ao fim de n anos, é:

$$B_n = 25\,000 + \underbrace{700 + 700 + \ldots + 700}_{n \text{ vezes}} = 25\,000 + n \times 700$$

Assim, representando na calculadora gráfica os gráficos dos modelos da variação do capital em cada uma das contas, ambos em função da tempo, ($y = 25\,000 \times 1{,}025^x$, para a instituição A) e ($y = 25\,000 + 700x$, para a instituição B), numa janela compatível com horizonte temporal de 15 anos, ou seja, $0 \leq x \leq 15$ e também com os valores do capital correspondentes, ou seja, $25\,000 \leq y < 40\,000$, obtemos as representações gráficas que se encontram reproduzidas na figura ao lado.

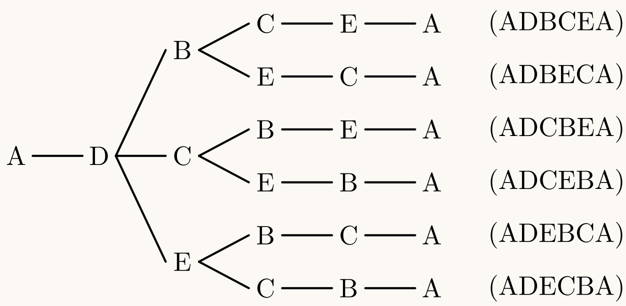


Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção dos dois modelos, obtemos os valores (arredondados às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção, ou seja, o valor dos anos que devem passar para que o capital acumulado nas duas instituições seja igual, obtemos o ponto de de coordenadas, $(9{,}98\,;\,31\,983{,}56)$

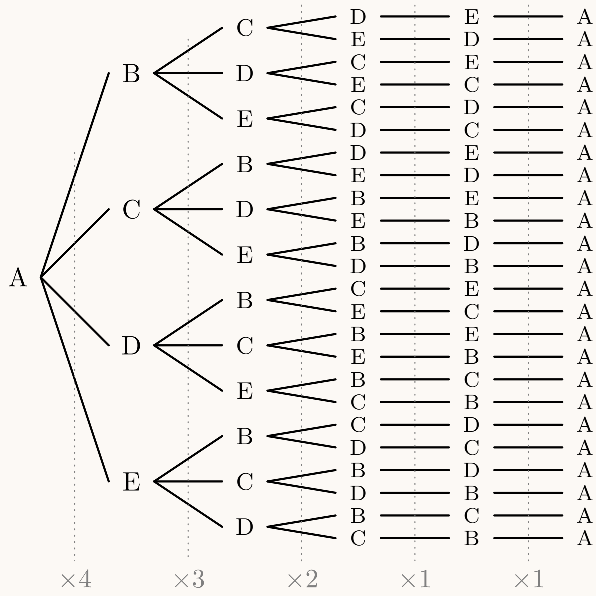
Assim, podemos verificar que, a partir do 10.º ano, o capital acumulado na instituição A é superior, pelo que ao fim de 10 anos é que a instituição A se torna vantajosa.

3.3.

3.3.1. As voltas que têm início na sede, visitam primeiro o supermercado D, depois os restantes, sem repetir nenhum deles e voltam à sede, ou seja, todas as voltas possíveis para aquele dia, são:



3.3.2. Identificando todas as voltas que podem fazer parte da lista do Miguel, temos:



Assim, podemos ver que existem $1\times 4\times 3\times 2\times 1\times 1 = 24$ percursos diferentes, mas como metade dos percursos corresponde à outra metade percorridos por ordem inversa, o número de voltas que podem fazer parte da lista do Miguel, é $\dfrac{24}{2} = 12$

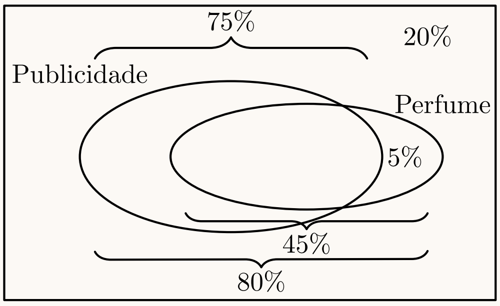
4.

4.1. Como 20% dos indivíduos inquiridos não viram a referida publicidade, nem compraram o novo perfume, a percentagem dos pedidos que viu a publicidade ou comprou o perfume (ou os dois) é:

$$100 - 20 = 80\%$$

Assim, temos que a percentagem inquiridos que comprou o perfume sem ter visto a publicidade é $80 - 75 = 5\%$.

Assim, a probabilidade do indivíduo escolhido ter comprado o novo perfume e não ter visto a publicidade, na forma de percentagem, é 5%.



4.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um indivíduo inquirido na sondagem, e os acontecimentos:
C:≪O inquirido comprou o perfume≫
V:≪O inquirido viu a publicidade≫

Atendendo ao diagrama do item anterior, podemos verificar que como 45% dos indivíduos inquiridos compraram o novo perfume, e 5% o fizeram sem ter visto a publicidade, então a percentagem dos que compraram o perfume e viram a publicidade, é:

$$P\left(C\cap V\right) = P(C) - P\left(C\cap \overline{V}\right) = 45 - 5 = 40\%$$

Desta forma, a probabilidade de o indivíduo escolhido ter comprado o novo perfume, sabendo que ele viu a publicidade, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left(C|V\right) = \frac{P\left(C\cap V\right)}{P\left(V\right)} = \frac{\frac{40}{100}}{\frac{75}{100}} = \frac{40}{75} = \frac{8}{15}$$

5.

5.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de leitores de DVD, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de habitações":

Número de leitores de DVD	**Frequência absoluta (n.º de habitações)**
0	330
1	450
2	47
3	173

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da mediana e dos quartis do número de leitores de DVD, por habitação:

$$\tilde{x} = 1;\ q_1 = 0 \text{ e } q_2 = 1$$

5.2. Usando as listas do item anterior e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos ainda os valores da média e dos desvio padrão do número de leitores de DVD, por habitação, na amostra:

$$\overline{x} \approx 1{,}06 \text{ e } s \approx 1{,}03$$

Inserindo agora numa lista da calculadora gráfica os valores do número de televisores, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de habitações":

Número de leitores de DVD	**Frequência absoluta (n.º de habitações)**
0	5
1	417
2	450
3	128

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos ainda os valores da média e dos desvio padrão do número de televisores, por habitação, na amostra:

$$\overline{x} \approx 1{,}70 \text{ e } s \approx 0{,}69$$

Assim, relacionando o valor do desvio padrão com cada um dos gráficos, podemos observar que como os dados estão concentrados nos valores intermédios da distribuição, ou seja, em torno da média, o desvio padrão tem um valor mais baixo; e relativamente ao número de leitores de DVD, como existe uma quantidade significativa de dados localizados em valores relativamente afastados da média, o valor do desvio padrão é, comparativamente ao anterior, mais elevado.

5.3. Como $P(X \geq 1) = 0{,}995$, temos que:

- $a = P(X = 0) = P(X < 1) = 1 - P(X \geq 1) = 1 - 0{,}995 = 0{,}005$
- $P(X \geq 1) = 0{,}995 \Leftrightarrow P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}995 \Leftrightarrow 0{,}425 + b + 0{,}120 = 0{,}995 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ b = 0{,}995 - 0{,}425 - 0{,}120\ \Leftrightarrow\ b = 0{,}45$$

5.4. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:

- A dimensão da amostra: $n = 1000$
- A proporção amostral de habitações com 2 televisores: $\hat{p} = \frac{450}{1000} = 0{,}45$
- O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às milésimas, temos:

$$\left]0{,}45 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{1000}}\ ;\ 0{,}45 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}45(1-0{,}45)}{1000}}\right[\approx \left]0{,}424; 0{,}476\right[$$

Assim, podemos concluir que, em 2009, o número de habitações em 2009 será superior a 42,4%, com probabilidade de 90%, ou seja, uma proporção maior que 12%, registada em 2001, pelo que não haverá razão para duvidar do aumento da percentagem de habitações portuguesas com 2 televisores, entre 2001 e 2009.