Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (2013, 1.ª fase)

Proposta de resolução

1.

1.1. Aplicando o método descrito, incluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bulling*: $3 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 2015$
- Pontuação do tema Solidariedade: $2 \times 415 + 3 \times 370 + 1 \times 200 = 2140$
- Pontuação do tema Festas: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 3 \times 200 = 1755$

Excluindo o tema Festas, a tabela reorganizada, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, é a seguinte:

	415 votos	**370 votos**	**200 votos**
1ª Preferência	*Bullying*	Solidariedade	*Bullying*
2ª Preferência	Solidariedade	*Bullying*	Solidariedade

E assim, aplicando o método descrito, excluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bulling*: $2 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 1600$
- Pontuação do tema Solidariedade: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 1 \times 200 = 1355$

Assim, temos que com a inclusão do tema Festas, o tema escolhido é Solidariedade, porque tem a maior pontuação (2140 pontos) e, se o tema Festas for excluído, o tema escolhido é *Bulling* porque tem maior número de pontos (1600), pelo que podemos concluir que a exclusão do tema Festas altera a escolha do tema.

1.2. Aplicando o método descrito na distribuição dos 20 lugares na comissão, e sabendo que na primeira aplicação deste método, a soma das quotas arredondadas foi diferente do número de lugares a distribuir, começamos por determinar o divisor padrão:

$$\text{Divisor padrão} = \frac{140+120+160}{20} = \frac{420}{20} = 21$$

Após algumas experiências podemos verificar que o divisor modificado 21,5 permite a atribuição dos 20 lugares na comissão:

Ano de escolaridade	10.º	11.º	12.º
Número de alunos	140	120	160
Divisor modificado	21,5		
Quota modificada	$\frac{140}{21,5} \approx 6{,}512$	$\frac{120}{21} \approx 5{,}581$	$\frac{160}{21} \approx 7{,}442$
Quota modificada arredondada	$6+1=7$	$5+1=6$	7
Soma das quotas arredondadas	$7+6+7=20$		

Assim, a distribuição dos 20 lugares da comissão, é:

- 10.º ano: 7 lugares
- 11.º ano: 6 lugares
- 12.º ano: 7 lugares

2.

2.1. De acordo com as garantias oferecidas pela instituição PIPA, temos que:

- Capital final: $C_n = 1680$€
- Capital inicial: $C_n = 1500$€
- Número de períodos de capitalização: $n = \frac{6}{3} = 2$, ou seja 2 trimestres relativos a 6 meses
- i - Taxa de juro referente ao período de capitalização

Desta forma, como o capital final é dado pela expressão $C_n = C + C \times n \times i$, temos que:

$$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i$$

E assim, resolvendo a equação, determinamos o valor da taxa de juro trimestral (i):

$$1680 = 1500 + 1500 \times 2 \times i \Leftrightarrow 1680 - 1500 = 3000 \times i \Leftrightarrow 180 = 3000 \times i \Leftrightarrow \frac{180}{3000} = i \Leftrightarrow 0{,}06 = i$$

Logo, a taxa de juro trimestral, na forma de percentagem, é 6%

2.2. Observando os dados da tabela, podemos verificar que a variação do capital na conta x é um aumento linear, ou seja, todos os meses ao capital existente é adicionada um valor fixo.
Da mesma forma podemos verificar que na conta Y, a variação do capital corresponde a um aumento exponencial, ou seja, todos os meses o capital é aumentado numa percentagem fixa, como se pode observar na tabela seguinte:

	Final do 1.º mês	**Final do 2.º mês**	**Final do 3.º mês**	**Final do 4.º mês**	**Final do 5.º mês**	**Final do 6.º mês**
X	$1500+20=$ 1520	$1520+20=$ 1540	$1540+20=$ 1560	$1560+20=$ 1580	$1580+20=$ 1600	$1600+20=$ 1620
Y	$1500\times1{,}01=$ 1515	$1515\times1{,}01=$ $1530{,}15$	$1530{,}15\times1{,}01=$ $1545{,}45$	$1545{,}45\times1{,}01=$ $1560{,}91$	$1560{,}91\times1{,}01=$ $1576{,}52$	$1576\times1{,}01=$ $1592{,}28$

Assim temos que, o capital, no final do n-ésimo mês é dado pelas expressões:

- Conta X: $1500+\underbrace{20+20+\ldots+20}_{n \text{ vezes}}=1500+n\times 20$

$$X(n)=1500+20n$$

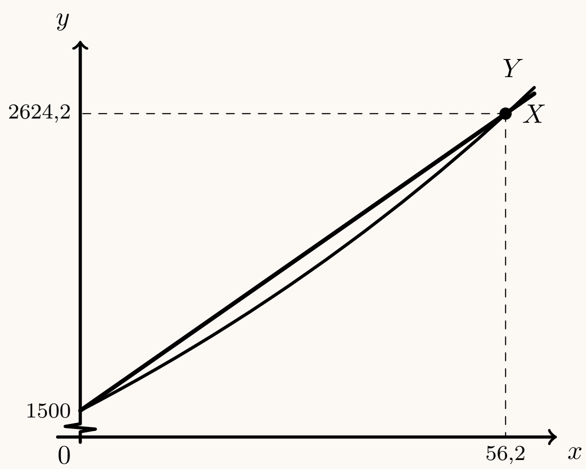
- Conta Y: $1500\times\underbrace{1{,}01\times1{,}01\times\ldots\times1{,}01}_{n \text{ vezes}}=1500\times1{,}01^n$

$$Y(n)=1500\times1{,}01^n$$

Representamos na calculadora gráfica os gráficos dos modelos da variação do capital em cada uma das contas, ambos em função da tempo, ($y=1500+20x$, para a conta X) e ($y=1500\times1{,}01^x$, para a conta Y), numa janela compatível com horizonte temporal indicado pela Carla, ou seja, $0\leq x\leq 60$ e também com os valores do capital correspondentes, ou seja, $1500\leq y<3000$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção dos dois modelos, obtemos os valores (arredondados às décimas) das coordenadas do ponto de interseção, ou seja, o valor dos meses que devem passar para que os dois modelos indiquem o mesmo capital, ou seja, $(56{,}2\,;\,2624{,}2)$

Assim, podemos verificar que de acordo com a variação dos dois modelos, o capital da conta Y é inferior ao da conta X até ao 56.º mês e superior a partir do 57.º mês, após os depósitos iniciais, pelo que se pode concluir que a Carla tem razão.



2.3.

2.3.1. De acordo com o modelo, um período de capitalização igual a 10 meses, corresponde a $x=10$, e assim, temos que, o número de aplicações feitas no fundo, com arredondamento às unidades, é:

$$N(10)=\frac{30}{1+16\times e^{-1{,}15\times 10}}\approx 30 \text{ aplicações}$$

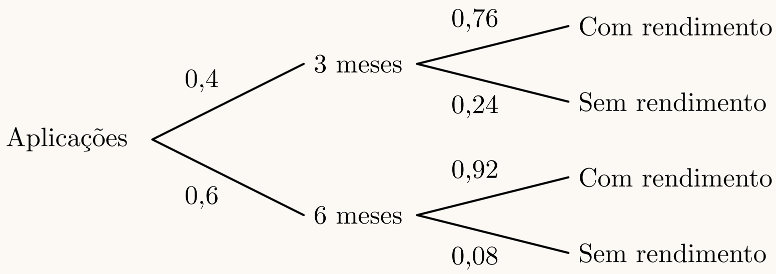
2.3.2. De acordo com o modelo apresentado, no dia 3 de setembro de 2012, o número de aplicações feitas a 3 meses e a 6 meses, são, respetivamente:

- $N(3) = \dfrac{30}{1+16\times e^{-1{,}15\times 3}} \approx 20$
- $N(6) = \dfrac{30}{1+16\times e^{-1{,}15\times 6}} \approx 30$

Como só existiam estas duas possibilidades de capitalização, foram estas as 50 aplicações feitas, sendo a probabilidade de cada uma, respetivamente:

- 3 meses: $\dfrac{20}{50} = 0{,}4$
- 6 meses: $\dfrac{30}{50} = 0{,}6$

Assim, esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, uma aplicação no fundo feita no dia 3 de setembro de 2012, e os acontecimentos:
M_3:≪A aplicação foi feita por um período de capitalização de 3 meses≫
L:≪A aplicação obteve rendimento≫

Temos que, a probabilidade de a aplicação escolhida ter um período de capitalização igual a 3 meses, sabendo que obteve rendimento, na forma de fração irredutível, é:

$$P(M_3|L) = \frac{P(M_3\cap L)}{P(L)} = \frac{P(M_3\cap L)}{P(M_3\cap L)+P\left(\overline{M_3}\cap L\right)} = \frac{0{,}4\times 0{,}76}{0{,}4\times 0{,}76+0{,}6\times 0{,}92} = \frac{0{,}304}{0{,}856} = \frac{38}{107}$$

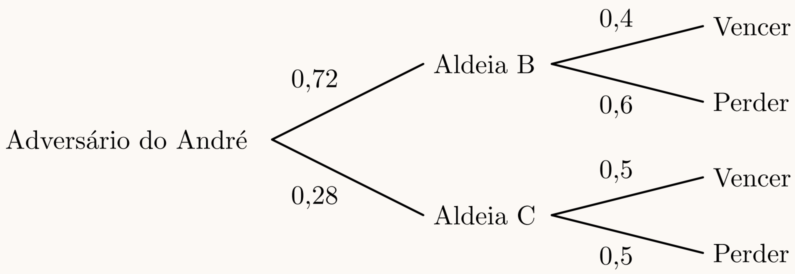
3.

3.1. De acordo com as probabilidades apresentadas, temos que:

- $P(V\cap A) = P(V|A)\times P(A) = 0{,}3\times 0{,}05 = 0{,}015$
- $P(V\cap B) = P(V|B)\times P(B) = 0{,}4\times 0{,}7 = 0{,}28$
- $P(V\cap C) = P(V|C)\times P(C) = 0{,}5\times 0{,}25 = 0{,}125$
- $P(V) = P(V\cap A)+P(V\cap B)+P(V\cap C) = 0{,}015+0{,}28+0{,}125 = 0{,}42$
- $P\left(\overline{V}\right) = 1-P(V) = 1-0{,}42 = 0{,}58$
- $P\left(\overline{V}\cap A\right) = P(A)-P(V\cap A) = 0{,}05-0{,}015 = 0{,}035$
- $P\left(\overline{V}\cap B\right) = P(B)-P(V\cap B) = 0{,}7-0{,}28 = 0{,}42$
- $P\left(\overline{V}\cap C\right) = P(C)-P(V\cap C) = 0{,}25-0{,}125 = 0{,}125$

Acontecimentos	**A**	**B**	**C**	**Total**
V	0,015	0,28	0,125	0,42
$\overline{V}$	0,035	0,42	0,125	0,58
Total	**0,05**	**0,70**	**0,25**	**1**

3.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, uma partida do torneio de xadrez, temos que, a probabilidade de o André vencer uma partida, é:

$$P\left(V\right) = P(V \cap B) + P(V \cap C) = 0{,}72 \times 0{,}4 + 0{,}28 \times 0{,}5 = 0{,}428$$

4.

4.1. Utilizando a informação da tabela dada na coluna (apresentada a sombreado na tabela seguinte), podemos determinar as frequências absolutas simples, recorrendo a subtrações sucessivas.

Fazendo a divisão de cada frequência absoluta simples pelo total de saquetas podemos obter as frequências relativas simples, e finalmente, por somas sucessivas, podemos obter as frequências absolutas acumuladas:

Número de filhos	**Frequência absoluta simples**	**Frequência absoluta acumulada**	**Frequência relativa simples**	**Frequência relativa acumulada**
1	78	78	$\frac{78}{200} = 0{,}39$	0,39
2	$166 - 78 = 88$	166	$\frac{88}{200} = 0{,}44$	$0{,}39 + 0{,}44 = 0{,}83$
3	$184 - 166 = 18$	184	$\frac{18}{200} = 0{,}09$	$0{,}83 + 0{,}09 = 0{,}92$
4	$196 - 184 = 12$	196	$\frac{12}{200} = 0{,}06$	$0{,}92 + 0{,}06 = 0{,}98$
5	$200 - 196 = 4$	200	$\frac{4}{200} = 0{,}02$	$0{,}98 + 0{,}02 = 1$
Total	200	—	1	—

4.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de filhos, e noutra lista as frequências absolutas simples:

Números de filhos	**Frequência absoluta simples**
1	66
2	46
3	38
4	38
5	12

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e do desvio padrão dos número de filhos da amostra:

$$\overline{x} = 2{,}42 \text{ e } s \approx 1{,}3$$

Procedendo da mesma forma com os dados corrigidos, ou seja substituindo os valores da primeira por 0, 1, 2, 3 e 4, e calculando novamente as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os novos valores da média e do desvio padrão dos número de filhos da amostra:

$$\overline{x} = 1{,}42 \text{ e } s \approx 1{,}3$$

Assim temos que:

- a média dos dados corrigidos é inferior à média inicial em 1 unidade, porque todos os valores são exatamente inferiores em 1 unidade para a mesma frequência absoluta;
- o desvio padrão é igual nas duas situações, porque mede os desvios dos dados em relação à média, e considerando a alteração da média, a posição relativa de cada dado em relação à média é igual nas duas situações.

4.3. Determinando a proporção amostral dos sócios que têm pelos 3 filhos, ou seja, a proporção de sócios que têm 3, 4 ou 5 filhos, temos:

$$\hat{p} = \frac{38+38+12}{200} = 0{,}44$$

Considerando o intervalo de confiança para a proporção $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, nomeadamente o limite superior (0,530426), temos que:

$$\hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}530426$$

Assim, substituindo os valores da proporção ($\hat{p}$) e de n ($n = 200$), e resolvendo a equação, temos que:

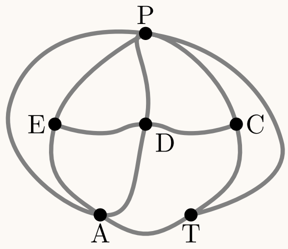
$$0{,}44 + z \times \sqrt{\frac{0{,}44(1-0{,}44)}{200}} = 0{,}530426 \Leftrightarrow z \times 0{,}035100 \approx 0{,}530426 - 0{,}44 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \approx \frac{0{,}090426}{0{,}035100} \Leftrightarrow z \approx 2{,}576239$$

Assim, temos que o nível de confiança associado ao valor $z \approx 2{,}576$, ou seja o nível de confiança do intervalo, é de 99%

5. De acordo com o esquema do espaço, considerando as salas e o pátio como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- P - Grau 5
- E - Grau 3
- D - Grau 4
- C - Grau 3
- A - Grau 4
- T - Grau 3

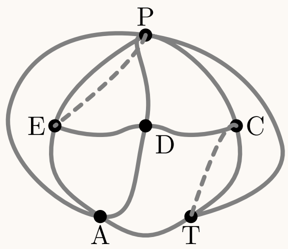


P - Pátio
E - Exposição
D - Espaço de dabate
C - Cantina
A - Auditório
T - Teatro

A funcionária não consegue efetuar uma ronda ao recinto começando e terminando essa ronda na cantina, percorrendo todas as portas e passando por cada porta uma única vez porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: E, C e T (todos com grau 3) e P (com grau 5).

Assim, a solução para o problema da funcionária, passa por duplicar arestas que permitam obter um grafo conexo com todos os vértices com grau par, por exemplo duplicando as arestas PE e CT (assinaladas a tracejado na figura seguinte), o que corresponde a passar nessas duas portas, por duas vezes, ficando desta forma todos os vértices com grau par, como se apresenta na figura seguinte:

- P - Grau 6
- E - Grau 4
- D - Grau 4
- C - Grau 4
- A - Grau 4
- T - Grau 4



Assim, uma possibilidade para organizar a ronda ao recinto começando e terminando na cantina, percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes possível por cada porta, é:

$$C \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow C$$

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).