Exame final de Matemática Aplicada às Ciências Sociais **(2014, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Aplicando o método referido temos:

		votos					
		50	205	145	100	Pontuação	Vencedor
Par L-R	1ª Pref.	L	R	L	L	L:$50+145+100=295$	L
	2ª Pref.	R	L	R	R	R: 205	
Par L-S	1ª Pref.	L	S	L	L	L:$50+145+100=295$	L
	2ª Pref.	S	L	S	S	S: 205	
Par L-V	1ª Pref.	V	L	V	L	L:$205+100=305$	L
	2ª Pref.	L	V	L	V	V:$50+145=195$	

Como o tema L (Liberdade) venceu a comparação com todos os restantes temas, é o tema vencedor.

Se o vencedor fosse apurado por maioria simples, tendo em conta apenas os votos na primeira preferência, a votação seria:

- Votação no tema V: $50+145=195$, a que corresponde a 39%; $\left(\frac{195}{500}=0{,}39\right)$
- Votação no tema S: 205, a que corresponde a 41%; $\left(\frac{205}{500}=0{,}41\right)$
- Votação no tema L: 100, a que corresponde a 20%; $\left(\frac{100}{500}=0{,}2\right)$

Pelo que o tema vencedor seria o tema S (sonhos), o que mostra que a afirmação da professora tem fundamento.

1.2. Incluindo os alunos do 9.º ano, considerando um total de 35 calculadoras requisitáveis, e aplicando o método apresentado, temos:

Ano de escolaridade	**10.º**	**9.º**	**11.º**	**12.º**
Número de alunos	120	210	170	162
Total de alunos	$120+210+170+162=662$			
Divisor padrão	$\frac{662}{35}\approx 18{,}914$			
Quota padrão	$\frac{120}{18{,}914}\approx 6{,}345$	$\frac{210}{18{,}914}\approx 11{,}103$	$\frac{170}{18{,}914}\approx 8{,}988$	$\frac{162}{18{,}914}\approx 8{,}565$
1.ª atribuição	6	11	8	8
Total provisório	$6+11+8+8=33$			
2.ª atribuição	0	0	1	1
Total	$6+0=6$	$11+0=11$	$8+1=9$	$8+1=9$

Assim, o novo número máximo de calculadoras gráficas que os alunos de cada ano de escolaridade podem requisitar, é:

- 9.º ano: 6 calculadoras
- 10.º ano: 11 calculadoras
- 11.º ano: 9 calculadoras
- 12.º ano: 9 calculadoras

2. Ordenando as distâncias entre os sete pavilhões registadas na tabela, temos:

$$\underset{A3-A5}{100} < \underset{A3-A4}{150} < \underset{A2-A3}{190} < \underset{A2-A5}{200} < \underset{A4-A5}{220} = \underset{A5-A6}{220} < \underset{A4-A6}{240} < \underset{A2-A6}{340} < \underset{A1-A7}{350} < \underset{A1-A2}{500} < \underset{A6-A7}{650} < \underset{A1-A6}{730}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta A3-A5 (100 m)

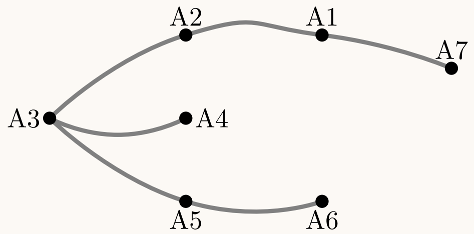
II- Aresta A3-A4 (150 m)

III- Aresta A2-A3 (190 m)
(não se consideram as aresta A2-A5 e A4-A5, porque levariam à formação de circuitos)

IV- Aresta A5-A6 (220 m)
(não se consideram as aresta A4-A6 e A2-A6, porque levariam à formação de circuitos)

V- Aresta A1-A7 (350 m)

VI- Aresta A1-A2 (500 m)



Como o número de arestas selecionadas é igual ao número de vértices menos um $(7-1=6)$, o algoritmo termina e o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários, é:

$$100+150+190+220+350+500=1510 \text{ metros}$$

Como a instalação de cabo de fibra ótica custa 3,40 euros por metro, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica, é:

$$1510\times 3{,}40=5134 \text{ euros}$$

3.

3.1.

3.1.1. Inserindo na calculadora gráfica, numa lista os tempos referidos e em outra lista os números de micro-organismos correspondentes, temos:

L1 t	L2 P
0	3
5	19,39

Calculando a regressão para um modelo exponencial ($y = a \times e^{bx}$), obtemos os valores:

- $a = 3$
- $b \approx 1{,}452$

Assim, temos que o modelo pretendido é:

$$P(t) = 3 \times e^{1{,}452t}, \ \ (\text{ com } t > 0)$$

3.1.2. Calculando o número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância ($t = 0$), temos:

$$M(0) = 19{,}39 \times e^{-0{,}08\times 0} = 19{,}39 \times 1 = 19{,}39 \text{ milhares de milhões por cm}^3$$

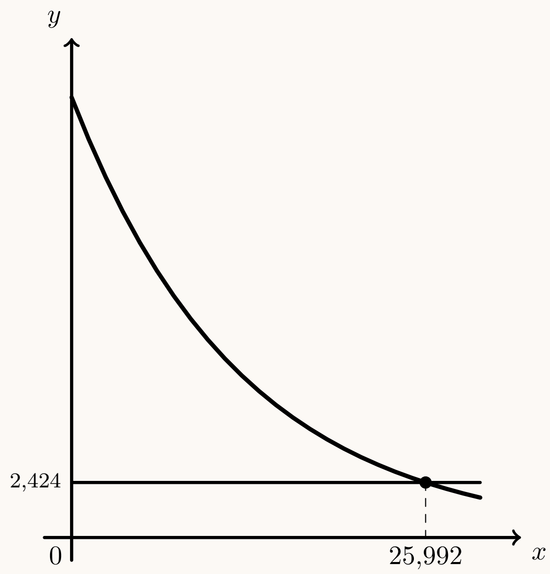
Assim, um oitavo do número anterior é:

$$\frac{M(0)}{8} = \frac{19{,}39}{8} \approx 2{,}424 \text{ milhares de milhões por cm}^3$$

Assim, representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo do número de micro-organismos, após ter sido adicionada a substância, em função do tempo ($y = 19{,}39 \times e^{-0{,}08x}$) e da reta correspondente ao valor de um oitavo do valor inicial ($y = 2{,}424$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução do número de micro-organismos, ou seja, $0 \leq y < 30$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (com três casas decimais) da abcissa dos ponto de interseção, ou seja, o número de dias necessários para que o número de micro-organismos presentes na água seja igual a um oitavo do número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância, isto é, o ponto de coordenadas (25,992 ; 2,424)

Assim o número mínimo de dias necessários para que o número de micro-organismos presentes na água seja inferior a um oitavo do número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância foi de 26 dias.



3.2. Calculando o valor patrimonial tributário do imóvel do Francisco, de acordo com a avaliação do perito, e fazendo o arredondamento para a dezena superior, temos:

$$\text{Vt} = \text{A} \times \text{Ca} \times \text{Cl} \times \text{Cq} \times \text{Cv} \times \text{Vc} = 312{,}32 \times 1 \times 1{,}4 \times 1{,}1 \times 0{,}85 \times 603 \approx 246\,530 \text{ €}$$

Assim, o valor do IMI que o Francisco deverá pagar em 2014, ou seja, 0,6% do valor patrimonial tributário arredondado, é:

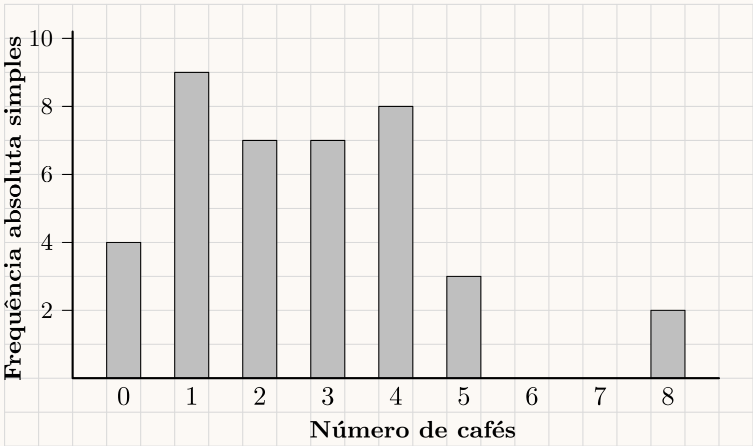
$$\text{IMI } = 246\,530 \times 0{,}006 = 1479{,}18 \text{ €}$$

4.

4.1. Começando por fazer as contagens e organizando os dados numa tabela de frequências absolutas simples, obtemos a tabela seguinte.

Traçando o diagrama de barras, fazendo corresponder a altura de cada barra à frequência absoluta de cada valor, obtemos o diagrama seguinte:

Número cafés bebidos em cada dia	Frequência absoluta simples
0	4
1	9
2	7
3	7
4	8
5	3
6	0
7	0
8	2



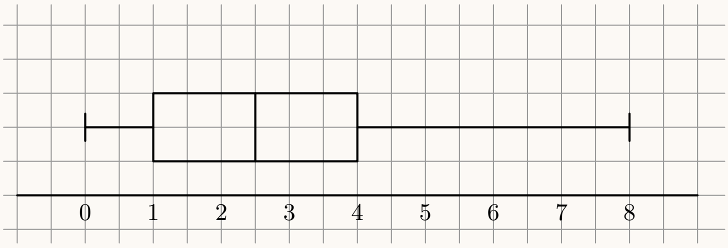
4.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à amostra de 40 dias, ou seja, os valores

0,1,2,2,2,1,3,2,1,1,3,4,1,3,3,0,1,5,4,2,0,4,1,3,4,4,2,4,5,3,3,1,2,4,8,5,0,1,8,4

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores do mínimo, do 1.º quartil, da mediana, do 3.º quartil e do máximo:

Mínimo	0
1.º quartil	1
Mediana	2,5
3.º quartil	4
Máximo	8

E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis que representa a amostra:



Número de cafés bebidos, em cada dia, pelo Manuel

Assim, comparando o diagrama obtido com o diagrama dado, podemos verificar que as diferenças são:

- O valor máximo (é 8 e no diagrama dado é 7,5)
- O valor do 3.º quartil (é 4 e no diagrama dado é 3)
- O valor da mediana (é 2,5 e no diagrama dado é 2)

4.3. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à amostra de 40 dias, ou seja, os valores

0,1,2,2,2,1,3,2,1,1,3,4,1,3,3,0,1,5,4,2,0,4,1,3,4,4,2,4,5,3,3,1,2,4,8,5,0,1,8,4

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores da média e do desvio padrão da amostra:

- $\overline{x} = 2{,}675$ cafés por dia
- $s \approx 1{,}9267$ cafés por dia

Como a dimensão da amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo ainda:

- A dimensão da amostra: $n = 40$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1{,}960$

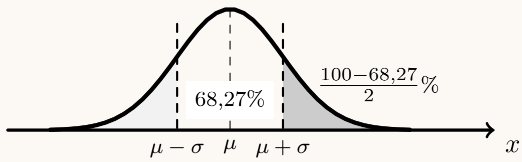
Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança o número médio de cafés bebidos, em cada dia,pelo Manuel $\left(\left] \overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}} \, , \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores dos extremos às milésimas, temos:

$$\left] 2{,}675 - 1{,}960 \times \frac{1{,}9267}{\sqrt{40}} \, ; \, 2{,}675 + 1{,}960 \times \frac{1{,}9267}{\sqrt{40}} \right[\approx]2{,}078; 3{,}272[$$

5.

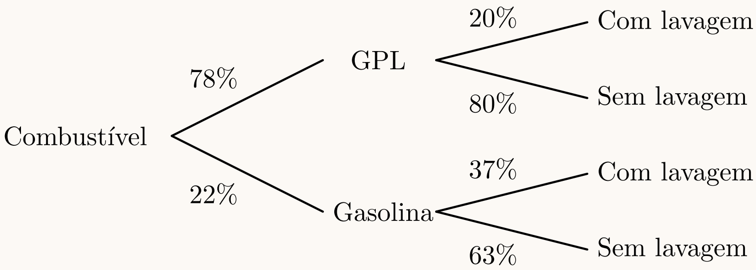
5.1. Como 42% da capacidade do depósito são $2000 \times 0{,}42 = 840$ litros, podemos verificar que o alarme dispara sempre que a quantidade de GPL no depósito é inferior a $800 + 40 = \mu + \sigma$

Assim, a probabilidade de o alarme, numa semana escolhida ao acaso, não ser acionado o alarme, corresponde à probabilidade da quantidade de combustível ser superior a 840 litros, ou seja, considerando a variável aleatória X: quantidade de GPL no depósito, temos:



$$P(X > 840) = P(X > \mu{+}\sigma) \approx \frac{100 - 68{,}27}{2} \approx 15{,}87\%$$

5.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um condutor que realizou abastecimento na ECOL, e os acontecimentos:
J:≪O condutor abasteceu o veiculo com gasolina ≫
L:≪O condutor fez um abastecimento com lavagem≫

Desta forma, a probabilidade de um condutor ter abastecido o seu veículo de gasolina, sabendo que utilizou a ECOL para fazer o abastecimento do seu veículo com lavagem, é:

$$P\left(G|L\right) = \frac{P\left(G \cap L\right)}{P\left(L\right)} = \frac{P\left(G \cap L\right)}{P\left(G \cap L\right) + P\left(\overline{G} \cap L\right)} = \frac{0{,}22 \times 0{,}37}{0{,}22 \times 0{,}37 + 0{,}78 \times 0{,}2} = \frac{0{,}0814}{0{,}2374} \approx 0{,}34288$$

A que corresponde a probabilidade na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas, de 34,29%

5.3. Como 15% dos funcionários têm veículo sem sensores de estacionamento e sem gancho de reboque, a percentagem dos funcionário que têm um veículo com sensores ou gancho (ou os dois) é:

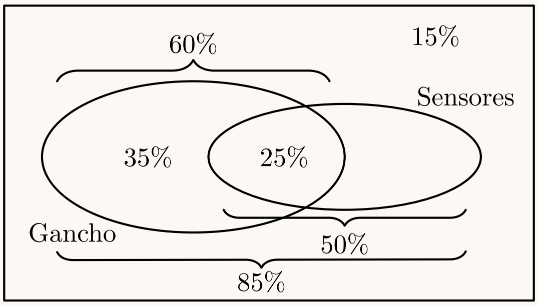
$$100 - 15 = 85\%$$

Assim, como a soma das percentagens dos veículos com sensores e com gancho é $60+50 = 110\%$, temos que a percentagem dos pedidos que incluem simultaneamente sensores e gancho é:

$$P(A) = 110 - 85 = 25\%$$

e a percentagem de funcionários com veículos apenas equipados com ganho é:

$$P(B) = 60 - 25 = 35\%$$



Desta forma, temos que o acontecimento B é mais provável.