

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

2014 - 1.ª Fase

Proposta de resolução

1.

1.1. Aplicando o método referido temos:

		votos				Pontuação	Vencedor
		50	205	145	100		
Par L-R	1ª Pref.	L	R	L	L	L:50 + 145 + 100 = 295	L
	2ª Pref.	R	L	R	R	R: 205	
Par L-S	1ª Pref.	L	S	L	L	L:50 + 145 + 100 = 295	L
	2ª Pref.	S	L	S	S	S: 205	
Par L-V	1ª Pref.	V	L	V	L	L:205 + 100 = 305	L
	2ª Pref.	L	V	L	V	V:50 + 145 = 195	

Como o tema L (Liberdade) venceu a comparação com todos os restantes temas, é o tema vencedor.

Se o vencedor fosse apurado por maioria simples, tendo em conta apenas os votos na primeira preferência, a votação seria:

- Votação no tema V: $50 + 145 = 195$, a que corresponde a 39%; $\left(\frac{195}{500} = 0,39\right)$
- Votação no tema S: 205, a que corresponde a 41%; $\left(\frac{205}{500} = 0,41\right)$
- Votação no tema L: 100, a que corresponde a 20%; $\left(\frac{100}{500} = 0,2\right)$

Pelo que o tema vencedor seria o tema S (sonhos), o que mostra que a afirmação da professora tem fundamento.



1.2. Incluindo os alunos do 9.º ano, considerando um total de 35 calculadoras requisitáveis, e aplicando o método apresentado, temos:

Ano de escolaridade	10.º	9.º	11.º	12.º
Número de alunos	120	210	170	162
Total de alunos	$120 + 210 + 170 + 162 = 662$			
Divisor padrão	$\frac{662}{35} \approx 18,914$			
Quota padrão	$\frac{120}{18,914} \approx 6,345$	$\frac{210}{18,914} \approx 11,103$	$\frac{170}{18,914} \approx 8,988$	$\frac{162}{18,914} \approx 8,565$
1.ª atribuição	6	11	8	8
Total provisório	$6 + 11 + 8 + 8 = 33$			
2.ª atribuição	0	0	1	1
Total	$6 + 0 = 6$	$11 + 0 = 11$	$8 + 1 = 9$	$8 + 1 = 9$

Assim, o novo número máximo de calculadoras gráficas que os alunos de cada ano de escolaridade podem requisitar, é:

- 9.º ano: 6 calculadoras
- 10.º ano: 11 calculadoras
- 11.º ano: 9 calculadoras
- 12.º ano: 9 calculadoras

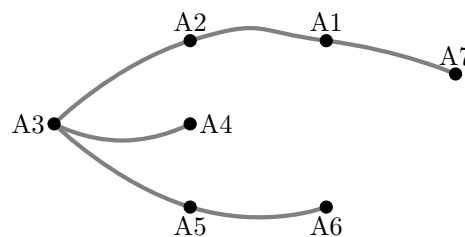
2. Ordenando as distâncias entre os sete pavilhões registadas na tabela, temos:

$$100 < 150 < 190 < 200 < 220 = 220 < 240 < 340 < 350 < 500 < 650 < 730$$

A_3-A_5 A_3-A_4 A_2-A_3 A_2-A_5 A_4-A_5 A_5-A_6 A_4-A_6 A_2-A_6 A_1-A_7 A_1-A_2 A_6-A_7 A_1-A_6

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

- I- Aresta A3-A5 (100 m)
- II- Aresta A3-A4 (150 m)
- III- Aresta A2-A3 (190 m)
(não se consideram as aresta A2-A5 e A4-A5, porque levariam à formação de circuitos)
- IV- Aresta A5-A6 (220 m)
(não se consideram as aresta A4-A6 e A2-A6, porque levariam à formação de circuitos)
- V- Aresta A1-A7 (350 m)
- VI- Aresta A1-A2 (500 m)



Como o número de arestas selecionadas é igual ao número de vértices menos um ($7 - 1 = 6$), o algoritmo termina e o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários, é:

$$100 + 150 + 190 + 220 + 350 + 500 = 1510 \text{ metros}$$

Como a instalação de cabo de fibra ótica custa 3,40 euros por metro, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica, é:

$$1510 \times 3,40 = 5134 \text{ euros}$$

3.

3.1.

3.1.1. Inserindo na calculadora gráfica, numa lista os tempos referidos e em outra lista os números de micro-organismos correspondentes, temos:

L1	L2
t	P
0	3
5	19,39

Calculando a regressão para um modelo exponencial ($y = a \times e^{bx}$), obtemos os valores:

- $a = 3$
- $b \approx 1,452$

Assim, temos que o modelo pretendido é:

$$P(t) = 3 \times e^{1,452t}, \quad (\text{com } t > 0)$$

3.1.2. Calculando o número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância ($t = 0$), temos:

$$M(0) = 19,39 \times e^{-0,08 \times 0} = 19,39 \times 1 = 19,39 \text{ milhares de milhões por cm}^3$$

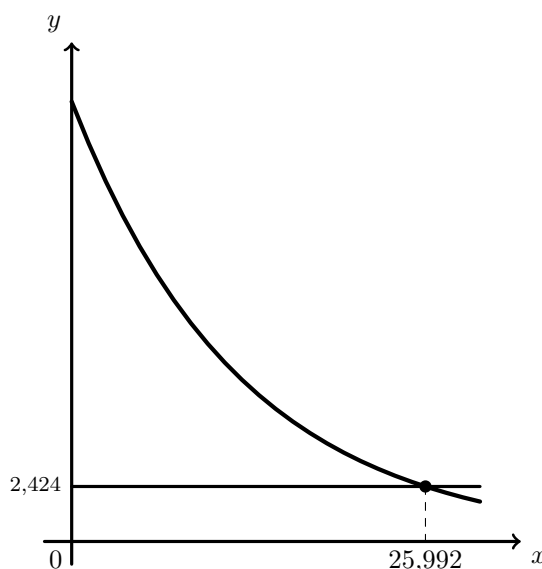
Assim, um oitavo do número anterior é:

$$\frac{M(0)}{8} = \frac{19,39}{8} \approx 2,424 \text{ milhares de milhões por cm}^3$$

Assim, representamos na calculadora gráfica os gráficos do modelo do número de micro-organismos, após ter sido adicionada a substância, em função do tempo ($y = 19,39 \times e^{-0,08x}$) e da reta correspondente ao valor de um oitavo do valor inicial ($y = 2,424$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $0 \leq x \leq 20$ e também com os valores esperados para a evolução do número de micro-organismos, ou seja, $0 \leq y < 30$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (com três casas decimais) da abcissa dos ponto de interseção, ou seja, o número de dias necessários para que o número de micro-organismos presentes na água seja igual a um oitavo do número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância, isto é, o ponto de coordenadas (25,992; 2,424)

Assim o número mínimo de dias necessários para que o número de micro-organismos presentes na água seja inferior a um oitavo do número de micro-organismos que tinham sido contabilizados na água no instante em que se adicionou a substância foi de 26 dias.



3.2. Calculando o valor patrimonial tributário do imóvel do Francisco, de acordo com a avaliação do perito, e fazendo o arredondamento para a dezena superior, temos:

$$V_t = A \times C_a \times C_l \times C_q \times C_v \times V_c = 312,32 \times 1 \times 1,4 \times 1,1 \times 0,85 \times 603 \approx 246\,530 \text{ €}$$

Assim, o valor do IMI que o Francisco deverá pagar em 2014, ou seja, 0,6% do valor patrimonial tributário arredondado, é:

$$\text{IMI} = 246\,530 \times 0,006 = 1\,479,18 \text{ €}$$

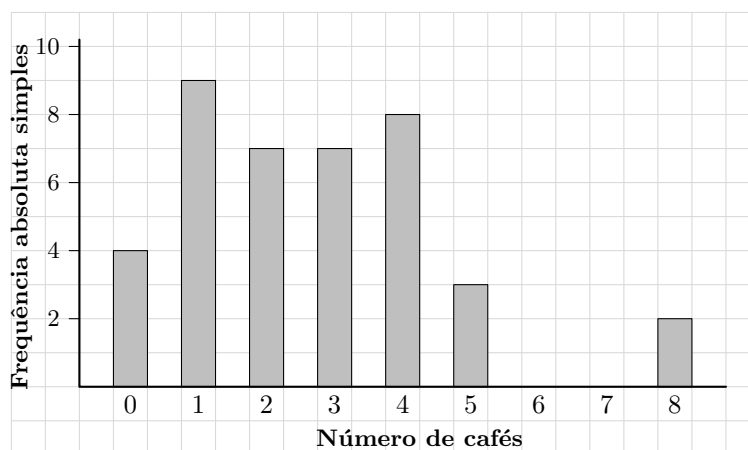


4.

4.1. Começando por fazer as contagens e organizando os dados numa tabela de frequências absolutas simples, obtemos a tabela seguinte.

Traçando o diagrama de barras, fazendo corresponder a altura de cada barra à frequência absoluta de cada valor, obtemos o diagrama seguinte:

Número de cafés bebidos em cada dia	Frequência absoluta simples
0	4
1	9
2	7
3	7
4	8
5	3
6	0
7	0
8	2



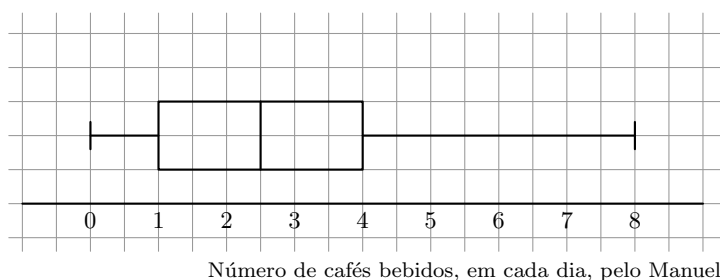
4.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à amostra de 40 dias, ou seja, os valores

0,1,2,2,2,1,3,2,1,1,3,4,1,3,3,0,1,5,4,2,0,4,1,3,4,4,2,4,5,3,3,1,2,4,8,5,0,1,8,4

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores do mínimo, do 1.º quartil, da mediana, do 3.º quartil e do máximo:

Mínimo	0
1.º quartil	1
Mediana	2,5
3.º quartil	4
Máximo	0

E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis que representa a amostra:



Assim, comparando o diagrama obtido com o diagrama dado, podemos verificar que as diferenças são:

- O valor máximo (é 8 e no diagrama dado é 7,5)
- O valor do 3.º quartil (é 4 e no diagrama dado é 3)
- O valor da mediana (é 2,5 e no diagrama dado é 2)



4.3. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à amostra de 40 dias, ou seja, os valores

0,1,2,2,2,1,3,2,1,1,3,4,1,3,3,0,1,5,4,2,0,4,1,3,4,4,2,4,5,3,3,1,2,4,8,5,0,1,8,4

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores da média e do desvio padrão da amostra:

- $\bar{x} = 2,675$ cafés por dia
- $s \approx 1,9267$ cafés por dia

Como a dimensão da amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo ainda:

- A dimensão da amostra: $n = 40$
- O valor de z para um nível de confiança de 95%: $z = 1,960$

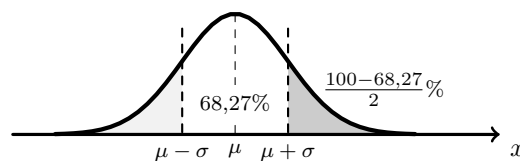
Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança o número médio de cafés bebidos, em cada dia, pelo Manuel $\left(\left[\bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right] \right)$, e arredondando os valores dos extremos às milésimas, temos:

$$\left] 2,675 - 1,960 \times \frac{1,9267}{\sqrt{40}} ; 2,675 + 1,960 \times \frac{1,9267}{\sqrt{40}} \left[\approx]2,078; 3,272[$$

5.

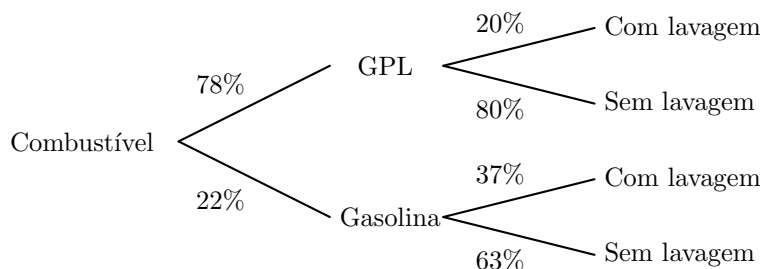
5.1. Como 42% da capacidade do depósito são $2000 \times 0,42 = 840$ litros, podemos verificar que o alarme dispara sempre que a quantidade de GPL no depósito é inferior a $800 + 40 = \mu + \sigma$

Assim, a probabilidade de o alarme, numa semana escolhida ao acaso, não ser acionado o alarme, corresponde à probabilidade da quantidade de combustível ser superior a 840 litros, ou seja, considerando a variável aleatória X : quantidade de GPL no depósito, temos:



$$P(X > 840) = P(X > \mu + \sigma) \approx \frac{100 - 68,27}{2} \approx 15,87\%$$

5.2. Esquematizando as probabilidades conhecidas num diagrama em árvore, temos:



Assim, considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um condutor que realizou abastecimento na ECOL, e os acontecimentos:

J : «O condutor abasteceu o veículo com gasolina»

L : «O condutor fez um abastecimento com lavagem»

Desta forma, a probabilidade de um condutor ter abastecido o seu veículo de gasolina, sabendo que utilizou a ECOL para fazer o abastecimento do seu veículo com lavagem, é:

$$P(G|L) = \frac{P(G \cap L)}{P(L)} = \frac{P(G \cap L)}{P(G \cap L) + P(\bar{G} \cap L)} = \frac{0,22 \times 0,37}{0,22 \times 0,37 + 0,78 \times 0,2} = \frac{0,0814}{0,2374} \approx 0,34288$$

A que corresponde a probabilidade na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas, de 34,29



- 5.3. Como 15% dos funcionários têm veículo sem sensores de estacionamento e sem gancho de reboque, a percentagem dos funcionários que têm um veículo com sensores ou gancho (ou os dois) é:

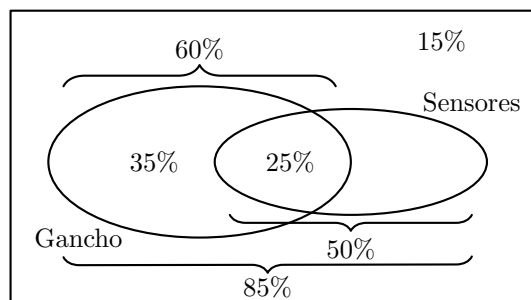
$$100 - 15 = 85\%$$

Assim, como a soma das percentagens dos veículos com sensores e com gancho é $60 + 50 = 110\%$, temos que a percentagem dos pedidos que incluem simultaneamente sensores e gancho é:

$$P(A) = 110 - 85 = 25\%$$

e a percentagem de funcionários com veículos apenas equipados com gancho é:

$$P(B) = 60 - 25 = 35\%$$



Desta forma, temos que o acontecimento B é mais provável.